Danuta Holejko
Wieńczysław J. Kościelny

# Automatyka procesów ciągłych

Oficyna
Wydawnicza
Politechniki
Warszawskiej

Warszawa 2012

Opiniodawca
*Jerzy Pułaczewski*



Opracowanie redakcyjne
*Barbara Punda*

Projekt okładki
*Danuta Czudek-Puchalska*

Skład komputerowy
*Beata Zalewska-Kraśniewska*
*Andrzej Kowalczyk*



ISBN 978-83-7207-998-5

Księgarnia internetowa Oficyny Wydawniczej PW www.wydawnictwopw.pl
tel.: 22 825-75-18, 22 234-75-03; fax 22 234-70-60; e-mail: oficyna@wpw.pw.edu.pl

Oficyna Wydawnicza PW, ul. Polna 50, 00-644 Warszawa. Wydanie I. Zamówienie nr 1/2010
Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-55-93

# SPIS TREŚCI

# PRZEDMOWA

Skrypt przeznaczony jest dla studentów studiów zaocznych Wydziału Mechatroniki Politechniki Warszawskiej do przedmiotu „*automatyka procesów ciągłych*", będącego przedmiotem podstawowym na wszystkich specjalnościach tego wydziału.

Skrypt obejmuje zarówno teoretyczne, jak i praktyczne zagadnienia liniowych i nieliniowych układów ciągłych. Jest wzbogacony o liczne przykłady problemowe z rozwiązaniami oraz do samodzielnego rozwiązania. Ze względu na praktyczny aspekt wielu poruszanych zagadnień teoretycznych, jest polecany także słuchaczom studiów podyplomowych z zakresu automatyki.

Chcielibyśmy podziękować recenzentowi, Panu doc. dr. Jerzemu Pułaczewskiemu, dzięki którego wnikliwym uwagom uniknęliśmy wielu potknięć, a skrypt został znacznie ulepszony.

*Autorzy*

# 1. WPROWADZENIE

## 1.1. POJĘCIA PODSTAWOWE

W naszym bliższym i dalszym otoczeniu nieustannie zachodzą niezliczone, różnorodne fizyczne i chemiczne przemiany stanu materii. Są to **procesy naturalne** – dokonujące się bez udziału człowieka. Przedmiotem rozważań będą procesy realizowane przez człowieka za pomocą odpowiednich, zbudowanych przez niego urządzeń, w celu uzyskania zamierzonych zmian stanu materii. Procesy takie nazywane są ogólnie **procesami technologicznymi**.

Wykonywanie określonych czynności związanych z oddziaływaniem na urządzenie, za pomocą którego realizowany jest dany proces technologiczny, w celu uzyskania pożądanego przebiegu tego procesu, nazywane jest **sterowaniem**. Natomiast sam proces technologiczny, którego pożądany przebieg uzyskuje się w wyniku sterowania, nazywany jest **obiektem sterowania**.

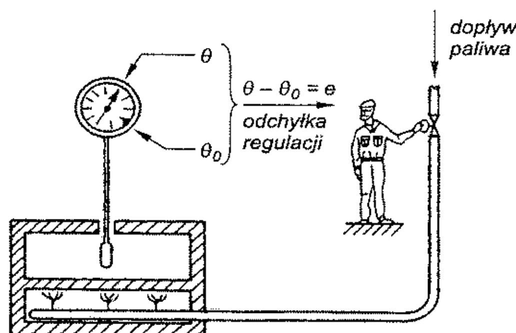
Należy zwrócić uwagę, że *proces technologiczny* jest pojęciem abstrakcyjnym, natomiast czynności nazwane sterowaniem dotyczą konkretnego urządzenia, za pomocą którego realizowany jest dany proces technologiczny. Dlatego w wielu rozważaniach przyjmuje się, że obiektem sterowania jest urządzenie, za pomocą którego realizowany jest dany proces technologiczny i do którego odnoszą się czynności nazwane sterowaniem. Mówi się, że jest to **obiekt sterowania w sensie aparaturowym**.

Aby oddziaływanie na urządzenie, za pomocą którego realizowany jest dany proces technologiczny, mogło powodować zamierzony przebieg tego procesu, rezultaty tego oddziaływania muszą być wcześniej znane. Zespół wiadomości dotyczących oddziaływania na urządzenie, za pomocą którego realizowany jest dany proces technologiczny, i skutków tego oddziaływania tworzy w pewnym sensie **model** tego **procesu**.

Rozpatrzone zostaną dwa proste przykłady procesów technologicznych.

**Przykład 1**

Na rys. 1.1 przedstawiono piec ogrzewany paliwem gazowym, wyposażony w miernik temperatury panującej w jego wnętrzu, przeznaczony do wygrzewania określonego wsadu, np. do wypieku chleba. Przyjęto, że w wyniku wcześniejszych doświadczeń została ustalona wartość temperatury najbardziej odpowiednia do uzyskania właściwego przebiegu procesu wypieku. Na temperaturę w piecu można wpływać, zwiększając lub zmniejszając dopływ paliwa. Sterowanie przebiegiem procesu wypieku, co w tym przypadku jest zadaniem pokazanej na rysunku osoby – **operatora**, polega na manipulowaniu zaworem dopływu paliwa tak, aby doprowadzić temperaturę wewnątrz pieca do pożądanej wartości i utrzymać ją na tym poziomie (opis procedury zakończenia procesu zostanie pominięty).




Rys. 1.1. Przykład urządzenia do realizacji procesu ciągłego; $\theta$ – temperatura w piecu, $\theta_0$ – temperatura wymagana

Zadanie to wymaga obserwacji wskazań miernika temperatury. Podczas nagrzewania wsadu, operator powinien ustawić zawór dopływu paliwa w określonym wcześniej położeniu, zapewniającym pożądaną szybkość narastania temperatury. Po zbliżeniu się do docelowej wartości temperatury, zapewne zajdzie potrzeba zmniejszenia dopływu paliwa. To zmniejszenie może okazać się zbyt małe – temperatura będzie nadal wzrastać, lub zbyt duże – temperatura zacznie się obniżać. Będą zatem konieczne dalsze korekty dopływu paliwa na podstawie wskazań miernika temperatury. Praktycznie żadna nastawa dopływu paliwa nie zapewni uzyskania stałej temperatury, ponieważ w rzeczywistości występują ciągłe zmiany szeregu innych czynników, mających wpływ na uzyskiwaną wartość temperatury, np. ciśnienia w układzie doprowadzającym paliwo, wartości opałowej paliwa, temperatury otoczenia czy właściwości cieplnych wsadu.

Wszystkie te niezależne od operatora czynniki, oddziałujące na realizowany proces, nazywane są **wielkościami zakłócającymi** lub **zakłóceniami**. Aby więc



wywiązać się z powierzonego zadania – utrzymania pożądanej wartości temperatury, operator powinien stale śledzić (kontrolować) wskazania termometru i odpowiednio zmieniać dopływ paliwa. Sterowanie wykonywane bezpośrednio przez operatora nazywa się **sterowaniem ręcznym**; w tym przypadku operator **steruje przebiegiem procesu** wypieku.

Sterowanie omawianym procesem jest też możliwe bez użycia miernika temperatury. Decyzje dotyczące oddziaływania na dopływ paliwa operator musiałby podejmować na podstawie bezpośredniej obserwacji różnych symptomów przebiegu procesu wypieku chleba. W takim przypadku operator musiałby mieć odpowiednie doświadczenie i wiedzę praktyczną, często trudną do przekazania innym. Całokształt takiej wiedzy umożliwiającej sterowanie procesem to właśnie tkwiący w świadomości operatora abstrakcyjny **model procesu**.

Dzięki naukom fizycznym pożądane warunki przebiegu danego procesu mogą być definiowane w sposób ścisły, przez określenie wartości odpowiednich wielkości fizycznych. Eliminuje to konieczność bezpośredniej obserwacji bliżej niesprecyzowanych symptomów przebiegu procesu, gdyż do kontroli jego przebiegu mogą być wykorzystane odpowiednie przyrządy pomiarowe.

W rozważanym przypadku wielkością, od wartości której zależy przebieg procesu, jest temperatura $\theta$. Zastosowanie miernika temperatury uwalnia operatora od konieczności bezpośredniej obserwacji procesu. Charakter zachodzącego w piecu procesu technologicznego (rodzaj wsadu) staje się dla operatora nieistotny; zadaniem operatora jest tylko utrzymanie temperatury na określonym przez technologa stałym lub zmieniającym się w czasie poziomie. Zakres wiedzy potrzebnej operatorowi do sterowania procesem radykalnie się zmniejsza. Niezbędne informacje można łatwo zapisać lub przekazać innym.

Wykorzystanie do opisu stanu procesu odpowiednich wielkości fizycznych umożliwia formułowanie modeli procesów w języku matematyki – w postaci **modeli matematycznych**. Opracowanie odpowiednio dokładnego matematycznego modelu procesu, wyrażającego zachowanie się procesu – przebieg zmian odpowiednich wielkości fizycznych pod wpływem oddziaływań – zmian innych wielkości fizycznych, umożliwia budowę (projektowanie) urządzeń sterujących, działających samoczynnie (automatycznie) bez udziału lub z ograniczonym udziałem człowieka.

Procesy, do opisu przebiegu których są wykorzystywane wielkości fizyczne mogące przybierać, podobnie jak temperatura, nieskończenie wiele różnych wartości (np. ciśnienie, natężenie przepływu, gęstość, lepkość, wilgotność, długość, siła, prędkość, przyspieszenie, stosunek zawartości składników, napięcie i natężenie prądu), nazywają się **procesami ciągłymi**. Do opisu złożonych procesów mogą być potrzebne jednocześnie różne wielkości.

W rozważanym układzie sterowania sposób oddziaływania na obiekt sterowania operator wypracowuje na podstawie bieżącej kontroli przebiegu procesu (na

podstawie wskazań miernika temperatury). Taki sposób sterowania nazywa się **sterowaniem w układzie zamkniętym**. Uzależnienie oddziaływania na obiekt sterowania od informacji o stanie procesu nazywa się **sprzężeniem zwrotnym**. Operator, reagując właściwie, w sytuacji kiedy zakłócenia powodują obniżenie temperatury w piecu poniżej wartości pożądanej, podejmuje działanie zmierzające do skompensowania skutków oddziaływania zakłóceń – zwiększa dopływ paliwa. Takie sprzężenie zwrotne nazywa się **ujemnym sprzężeniem zwrotnym**.

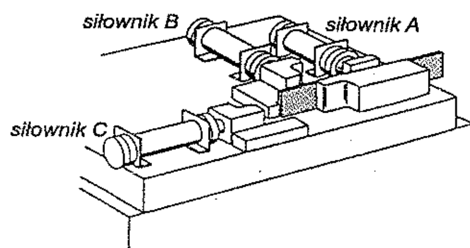
Gdyby działanie operatora było odwrotne – gdyby w przypadku obniżenia się temperatury w wyniku oddziaływania czynników zewnętrznych, operator zmniejszał dopływ paliwa, powodując dalsze obniżanie temperatury, to tego rodzaju sprzężenie zwrotne nazwalibyśmy **dodatnim sprzężeniem zwrotnym**. Jest oczywiste, że dążąc do utrzymania temperatury na pożądanym poziomie, operator powinien realizować ujemne sprzężenie zwrotne.

Sterowanie, w wyniku którego określona wielkość fizyczna utrzymywana jest na stałym lub zmieniającym się według określonego prawa poziomie, przy czym oddziaływanie na obiekt sterowania uzależnione jest od wyniku bieżącej kontroli przebiegu procesu, nazywa się **regulacją**. Zgodnie z wcześniejszym wnioskiem, **regulacja jest to sterowanie w układzie zamkniętym z ujemnym sprzężeniem zwrotnym**. Regulacja realizowana przez człowieka nazywa się **regulacją ręczną**.

Można sobie wyobrazić, że sterując wielokrotnie procesem wypieku chleba, operator zapamięta, jak na ogół powinien manipulować zaworem dopływu paliwa podczas wypieku, i na tej podstawie będzie próbował sterować procesem bez spoglądania na termometr. Takie sterowanie nazywa się **sterowaniem w układzie otwartym**. Jest oczywiste, że w ten sposób operator nie jest w stanie skompensować wpływu nieprzewidzianych zakłóceń. Efekt sterowania – zgodność uzyskiwanej temperatury z wartością pożądaną – będzie znacznie gorszy niż w przypadku sterowania z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

**Przykład 2**

Rozpatrzony zostanie przebieg procesu zaginania blachy realizowanego z wykorzystaniem urządzenia przedstawionego na rys. 1.2. Po ręcznym ułożeniu detalu z blachy, za pomocą odpowiednich elementów sterowniczych operator wywołuje kolejne ruchy tłoczysk trzech siłowników: wysunięcie tłoczyska siłownika A, co powoduje zamocowanie detalu, wysunięcie tłoczyska siłownika B (zagięcie wstępne blachy) i jego wycofanie, wysunięcie tłoczyska siłownika C (końcowe dogięcie blachy) i jego wycofanie, wycofanie tłoczyska siłownika A, co




Rys. 1.2. Przykład urządzenia do realizacji procesu dyskretnego



umożliwia wyjęcie detalu i rozpoczęcie kolejnego cyklu pracy. Operator obserwujący proces i sterujący jego przebiegiem zwraca uwagę na położenie tłoczysk siłowników. Interesuje go tylko, czy tłoczysko danego siłownika jest wycofane czy wysunięte. W tym przypadku wielkości charakteryzujące stan i przebieg procesu (położenie tłoczysk siłowników) są wielkościami dwustanowymi.

Procesy, do opisu których są wykorzystywane wielkości fizyczne o skończonej liczbie różnych wartości, nazywane są **procesami dyskretnymi**. Szczególnym rodzajem procesów dyskretnych są **procesy binarne** (najliczniej występujące w praktyce), do opisu których wykorzystywane są wielkości dwustanowe (dwuwartościowe, binarne). Są to procesy związane z obróbką materiałów, zmianą kształtu, montażem, dozowaniem, pakowaniem i wiele innych.

W procesach produkcyjnych często mamy do czynienia zarówno z procesami ciągłymi, jak i dyskretnymi.

Zespół przedsięwzięć zarówno technicznych jak i ekonomicznych, zmierzających do częściowego lub całkowitego uwolnienia człowieka (operatora) od wykonywania często uciążliwych i wyczerpujących czynności kontrolnych i sterowniczych, zastępując go urządzeniami działającymi samoczynnie – automatami (od gr. *automatos* – samoczynny), nazywa się **automatyzacją procesów**. Dziedzina nauki i techniki zajmująca się teoretycznymi i praktycznymi zagadnieniami automatycznego sterowania procesami nazywa się **automatyką**. Niniejszy skrypt obejmuje podstawowe zagadnienia automatyki procesów ciągłych.

Automatyzacja jest kolejnym po mechanizacji etapem rozwoju techniki, zmierzającym do uwolnienia człowieka od bezpośredniego udziału w realizacji procesów technologicznych.

Dążenie do zastąpienia człowieka urządzeniami działającymi samoczynnie nie jest zjawiskiem nowym. Różnego rodzaju urządzenia działające samoczynnie konstruowano już w starożytności. Jednakże początki nowoczesnej automatyki przypadają na okres tzw. pierwszej rewolucji przemysłowej (XVIII w.).

Najstarszym ze znanych urządzeń zawierających układ automatycznej regulacji, w tym przypadku układ regulacji natężenia przepływu wody, jest zegar wodny (wodna klepsydra) Ktesibiosa z Aleksandrii (III w. p.n.e.). Wiele urządzeń działających samoczynnie skonstruowali technicy aleksandryjscy, w szczególności najsłynniejszy z nich Heron (I w. n.e.). Urządzenia te nie miały zastosowań praktycznych. Były to automaty wykonujące różne czynności, najczęściej naśladujące ruchy człowieka. Na przykład Heron zbudował „rękę", która uderzała periodycznie młotem w dzwon. Podobne automaty o charakterze zabawowym konstruowane były w średniowieczu, głównie z wykorzystaniem techniki zegarmistrzowskiej.

Rozwój przemysłu w XVIII wieku spowodował zapotrzebowanie na urządzenia napędowe do kopalń, warsztatów tkackich, zakładów obróbki metali i drewna, środków transportu, co doprowadziło do wynalezienia i szybkiego udoskonalenia

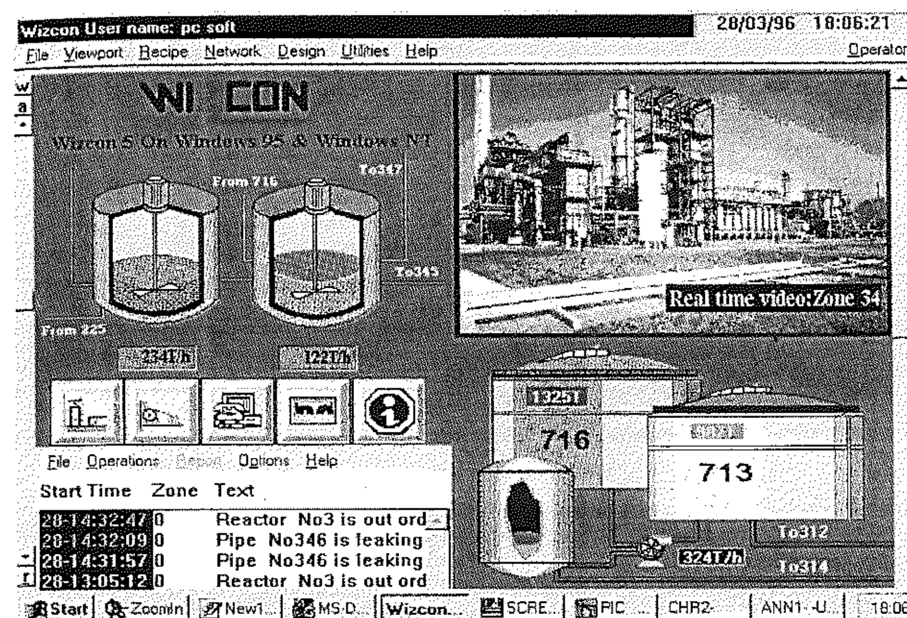
silnika parowego (XVIII w.) oraz silnika spalinowego i elektrycznego (XIX w.). Rozpoczęła się era mechanizacji; pracę mięśni ludzi i zwierząt zaczęto zastępować pracą silników. Rozwój przemysłu, głównie dzięki mechanizacji produkcji, stwarzał zapotrzebowanie na różne urządzenia automatyczne. Przykładami mogą być: kocioł maszyny parowej, w którym należy utrzymywać stały poziom wody pomimo zmieniającego się zapotrzebowania na parę, oraz silnik, którego prędkość powinna być stała pomimo zmian obciążenia. Dlatego pierwsze automatyczne urządzenia sterujące związane były z pracą napędów – pływakowy regulator poziomu wody w kotle parowym (Iwan Połzunow, 1765 r.) i odśrodkowy regulator prędkości obrotowej wału silnika parowego (James Watt, 1788 r.).

W XIX wieku opracowano szereg ważnych automatycznych urządzeń, takich jak automatyczny warsztat tkacki (Joseph Jacquard, 1804 r.), automaty tokarskie i wiele innych. Urządzenia te budowano, opierając się na wiedzy praktycznej i intuicji. Brak możliwości ścisłej analizy zjawisk zachodzących w budowanych urządzeniach, wynikający z braku odpowiedniej teorii, ograniczał możliwości rozwoju automatyzacji produkcji. Sprzyjające warunki automatyzacji powstały w wyniku wprowadzania na początku XX wieku nowych metod organizacji produkcji, głównie tzw. taśmy produkcyjnej. Produkcję taśmową na wielką skalę jako pierwszy zastosował Henry Ford (ok. 1913 r.) w fabryce samochodów. W produkcji taśmowej następuje rozbicie procesu produkcyjnego na wiele procesów elementarnych, realizowanych na kolejnych stanowiskach. Taka organizacja pracy eliminuje potrzebę wykorzystania wysoko kwalifikowanej kadry pracowników. Wiele prostych czynności mogą wykonywać pracownicy o niskich kwalifikacjach, a przy tym proste procesy dają się łatwo automatyzować.

Bardzo szybki rozwój automatyki i automatyzacji produkcji, co przyjęto nazywać drugą rewolucją przemysłową, spowodowała dopiero II wojna światowa. Rozwój ten spowodowany był koniecznością dynamicznego zwiększania sił wytwórczych państw walczących i doskonaleniem techniki wojennej. Na dużą skalę zaczęto stosować automatyczne maszyny produkcyjne, np. automatyczne obrabiarki czy automaty montażowe. W okresie tym opracowano matematyczne metody projektowania wielu układów automatycznego sterowania, co stworzyło podwaliny współczesnej teorii automatyki. Prace te dotyczyły głównie projektowania tzw. serwomechanizmów – urządzeń do sterowania położeniem ruchomych obiektów, takich jak lufy dział, stery samolotów i okrętów, anteny urządzeń radiolokacyjnych itp. Dzięki temu mogły powstać nowe urządzenia: autopiloty, automatyczne celowniki, systemy nawigacyjne, systemy obrony przeciwlotniczej i wiele innych. Po wojnie osiągnięcia automatyki mogły zostać wykorzystane w zastosowaniach cywilnych.

Szczególne znaczenie dla rozwoju współczesnej automatyki miało wynalezienie mikroprocesora i w konsekwencji powstanie techniki mikroprocesorowej, techniki komputerowej i informatyki. Wraz z rozwojem środków przekazywania i przetwarzania informacji oraz rozwojem nowoczesnych metod pomiarowych stała się możliwa automatyzacja coraz bardziej złożonych procesów, całych ciągów technologicznych, a nawet zakładów przemysłowych. Jest to tzw. **automatyzacja kompleksowa**.

Na rys. 1.3 pokazano synoptykę monitora stacji operatorskiej komputerowego układu sterowania blokiem reaktorów w instalacji petrochemicznej.




Rys. 1.3. Synoptyka monitora stacji operatorskiej komputerowego układu sterowania blokiem reaktorów w instalacji petrochemicznej

O rozwoju automatyzacji, podobnie jak wcześniej o wdrażaniu mechanizacji, decydowały najczęściej względy ekonomiczne. Automatyzacja przyczynia się do zwiększenia wydajności produkcji, podniesienia jakości wyrobów, zmniejszenia zużycia surowców i energii, polepszenia bezpieczeństwa pracy. Umożliwia realizację procesów technologicznych stwarzających zagrożenie dla zdrowia człowieka, np. w zakładach chemicznych, reaktorach jądrowych lub w środowiskach niedostępnych dla człowieka. Ponadto pozwala na realizację wielu procesów z szybkością i dokładnością nieosiągalną w przypadku sterowania ręcznego. Dzięki automatyzacji pojawiły się możliwości opracowywania i wdrażania nowych technologii, co z kolei, jako dodatnie sprzężenie zwrotne, przyczynia się do coraz bardziej dynamicznego wkraczania automatyzacji do badań naukowych, przemysłu, rolnictwa,

handlu, usług, transportu, łączności, bankowości, medycyny, rozrywki, sportu i wielu innych dziedzin działalności człowieka. Bez automatyzacji nie byłby możliwy rozwój badań kosmicznych. Istnieje przekonanie, że automatyzacja jest jedną z głównych cech nowoczesności i postępu technicznego.

Automatyka jako dziedzina nauki i techniki przygotowała warunki do powstania nowych dziedzin. Jedną z nich jest **cybernetyka**. W cybernetyce sterowanie oznacza wywieranie wpływu na dowolne zjawisko, nie tylko jak w automatyce np. na wartość temperatury w piecu lub prędkość samochodu, lecz także na wydzielanie hormonów w żywym organizmie, na proces nauczania w szkołach poprzez zmianę programów, na gospodarkę poprzez zmianę podatków itp. Doniosłość cybernetyki polega na tym, że wykorzystując zasady automatyki (np. zasadę sprzężenia zwrotnego), bada zjawiska z dziedziny techniki, biologii, medycyny, ekonomii, socjologii i innych oraz umożliwia wykorzystanie wyników badań z jednej dziedziny w innej, np. wykorzystanie wiedzy o działaniu organizmów do budowy podobnie działających maszyn. Między innymi dzięki temu rozwinęła się nowa gałąź automatyki – **robotyka**. Ważnym działem cybernetyki jest **teoria informacji**. Osiągnięcia w tym zakresie umożliwiają tworzenie zautomatyzowanych urządzeń i systemów wyręczających człowieka w pracy koncepcyjnej, kierowniczej i nadzorowaniu procesów, przy czym aktualnie dotyczy to nie tylko urządzeń i systemów przemysłowych, lecz także wszelkich urządzeń budowanych i wykorzystywanych przez człowieka. Wykorzystując osiągnięcia mikroelektroniki, mikromechaniki, sensoryki, automatyki, buduje się urządzenia o prostej obsłudze, przekazujące człowiekowi szereg interesujących go informacji, realizujących automatycznie wiele czynności i funkcji wymagających dawniej ingerencji człowieka. Przykładem takich urządzeń wykorzystywanych w życiu codziennym są komputery, automatyczne aparaty fotograficzne, kamery, sprzęt gospodarstwa domowego, współczesna aparatura medyczna, wyposażenie środków transportu i wiele innych. Technika projektowania oraz budowy inteligentnych i przyjaznych obsłudze urządzeń i systemów nazywa się **mechatroniką**.

Posłużmy się ponownie, wcześniej opisanym (przykład 1), układem regulacji temperatury (rys. 1.1). Temperatura $\theta$ wewnątrz pieca jest **wielkością regulowaną**; w dalszych rozważaniach wielkość regulowana będzie oznaczana symbolem $y$. Zmiana wielkości regulowanej – temperatury, oddziałując na czujnik miernika temperatury, wywołuje przemieszczenia wskazówki miernika; położenie wskazówki w danym momencie stanowi informację o **bieżącej wartości wielkości regulowanej**. Zastosowany miernik przetwarza wielkość regulowaną na położenie wskazówki miernika. Ta przetworzona wielkość regulowana jest w przemysłowych układach regulacji **wielkością mierzoną** albo **zmienną procesową**. Operator, aby wykonać stawiane mu zadanie, musi ciągle porównywać bieżącą wartość wielkości regulowanej $\theta$ z pożądaną wartością temperatury $\theta_0$. Tę pożądaną wartość wielkości regulowanej nazywa się **wartością zadaną**; jest ona ogólnie oznaczana symbolem $w$. Na rys. 1.1 wartość zadaną oznaczono na tarczy miernika temperatury zaciemnionym trójkącikiem; oznaczenie takie uwalnia operatora od konieczności pamiętania pożądanej wartości wielkości regulowanej. Jego zadanie upraszcza się jeszcze bardziej: jeżeli wskazówka termometru jest powyżej wartości zadanej – należy zmniejszyć dopływ paliwa, jeżeli poniżej – należy dopływ paliwa zwiększyć. Różnica między bieżącą wartością wielkości regulowanej a wartością zadaną nazywana jest **odchyłką regulacji** i oznaczana symbolem $e$. Zatem celem regulacji jest minimalizacja odchyłki regulacji.

W rozważanym układzie regulacji ręcznej dokonuje się **jednokierunkowe przekazywanie oddziaływań – jednokierunkowe przekazywanie informacji**. Miernik temperatury dostarcza człowiekowi informacji o aktualnej wartości wielkości regulowanej (o aktualnym stanie procesu). Człowiek na podstawie tej informacji spełnia trzy funkcje:

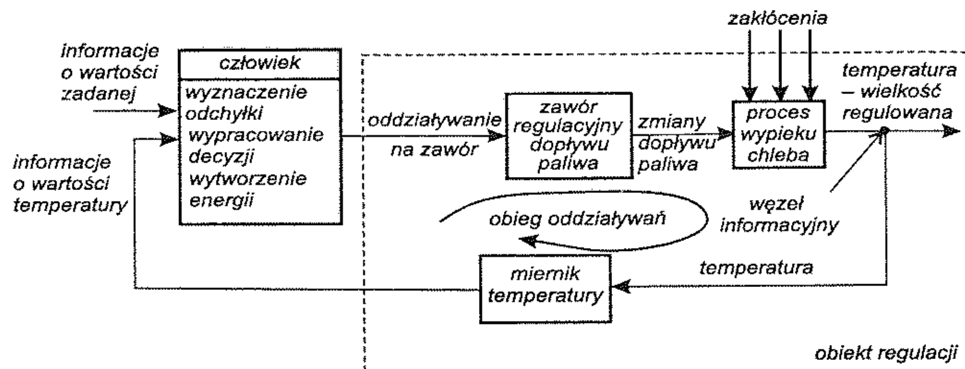
- ocenia wartość odchyłki regulacji,
- wypracowuje decyzję dotyczącą sposobu oddziaływania na zawór dopływu paliwa,
- przekazuje informację o wypracowanej decyzji, realizując odpowiednie oddziaływanie na zawór.

Zmiana położenia odpowiedniego elementu zaworu wywołuje zmianę dopływu paliwa do pieca, co z kolei wpływa na stan procesu, czego przejawem jest oczekiwana zmiana temperatury, która spowoduje kolejny obieg oddziaływań – kolejny obieg informacji. Zatem układ regulacji tworzy zamknięty obieg informacji. W otwartym układzie sterowania informacja przekazywana jest tylko w stronę obiektu regulacji. Strukturę oddziaływań zachodzących między częściami funkcjonalnymi dowolnego układu sterowania przyjęto w automatyce przedstawiać w postaci **schematów blokowych**, w których poszczególne części funkcjonalne układu (w tym przypadku także operator traktowany jest jako część funkcjonalna układu), zwane **elementami** tego układu, przedstawiane są w postaci prostokątów zwanych blokami, a oddziaływania jednych elementów na następne reprezentują strzałki. Takie oddziaływania, zarówno zewnętrzne jak i zachodzące między elementami układu, zawierające określone informacje, nazywane są ogólnie **sygnałami**. Do każdego elementu układu dochodzi jeden lub kilka **sygnałów wejściowych**. Każdy element wytwarza co najmniej jeden **sygnał wyjściowy**, który jest jednocześnie sygnałem wejściowym elementu następnego.

Sygnał informujący o wartości zadanej oraz zakłócenia (sygnały zakłócające) są sygnałami wejściowymi odpowiednich elementów układu i jednocześnie sygnałami wejściowymi całego układu regulacji. Przebieg wielkości regulowanej – sygnał wyjściowy obiektu regulacji – traktowany jest jako sygnał wyjściowy całego układu regulacji. Aby zaznaczyć ten fakt, strzałkę reprezentującą sygnał wyjściowy wyprowadza

się na zewnątrz pętli oddziaływań. Ten sam sygnał jest jednocześnie sygnałem wejściowym miernika temperatury. Zatem, na schemacie blokowym sygnał wyjściowy obiektu regulacji rozgałęzia się na sygnał wyjściowy układu i sygnał wejściowy miernika temperatury. Takie rozgałęzienie sygnału na schemacie nazywa się **węzłem informacyjnym** i zaznacza się widoczną kropką w miejscu rozgałęzienia.

Na rys. 1.4 przedstawiono schemat blokowy rozważanego układu ręcznej regulacji temperatury.




Rys. 1.4. Schemat blokowy układu ręcznej regulacji temperatury

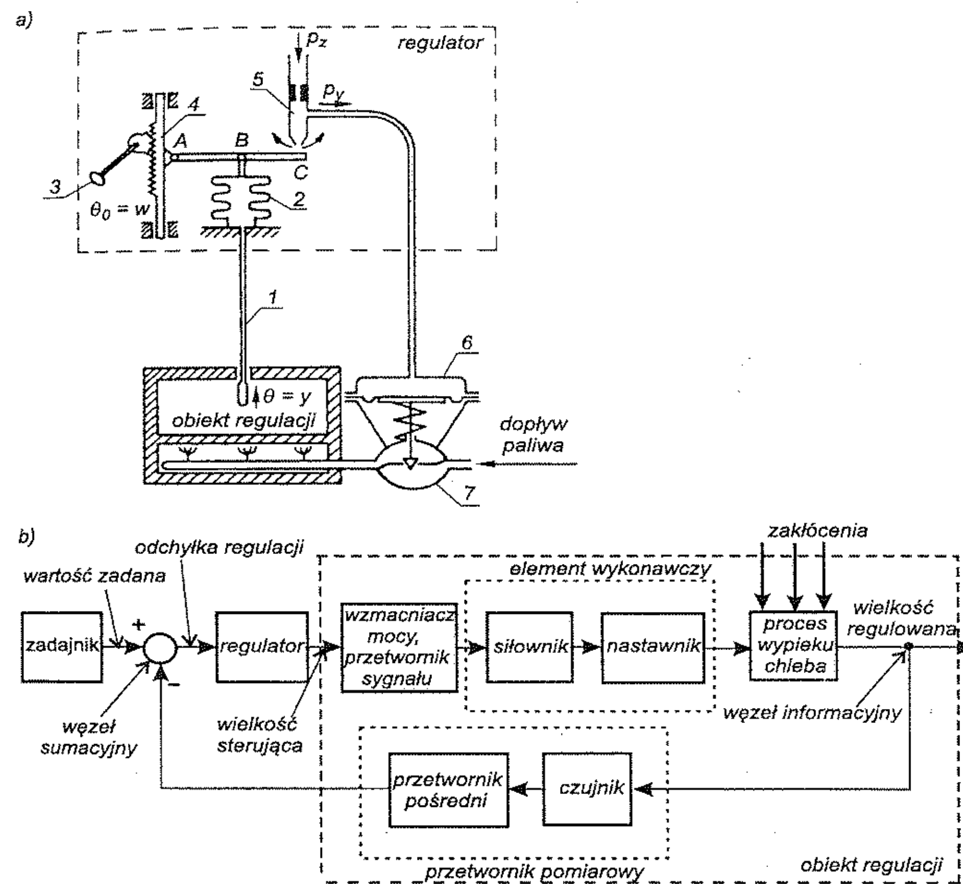
Zastąpienie człowieka w układzie regulacji ręcznej odpowiednimi urządzeniami pełniącymi analogiczne funkcje prowadzi do uzyskania **układu regulacji automatycznej**.

Przykładowy schemat ideowy analogicznego układu automatycznej regulacji temperatury przedstawiono na rys. 1.5. W układzie tym wielkość regulowana – temperatura $\theta$ oddziałuje na czujnik 1. W zależności od temperatury zmienia się ciśnienie płynu wewnątrz czujnika, powodując rozszerzenie lub kurczenie się mieszka sprężystego 2. Przebieg zmian tego ciśnienia jest sygnałem informującym o zmianach temperatury w piecu. Zmiany ciśnienia w czujniku powodują wydłużanie lub skracanie mieszka sprężystego 2 i związane z tym ruchy punktu *B* dźwigni *ABC*. Położenie punktu *B* zależy od wartości temperatury $\theta$. Czujnik 1 wraz z mieszkiem 2 tworzy przetwornik temperatury – informację o wartości temperatury wyraża on w postaci położenia punktu *B*. Wartość zadana *w* wielkości regulowanej ustawiana jest pokrętłem 3, które zmienia położenie punktu *A* dźwigni *ABC* związanej z zębatką 4. Pokrętło wraz z zębatką pełni rolę urządzenia do wytwarzania informacji o wartości zadanej w układzie regulacji, nazywanego **zadajnikiem**.

Położenie punktu *C* dźwigni *ABC* zależy od różnicy położenia punktu *A* (reprezentującego wartość zadaną) i punktu *B* (reprezentującego wielkość regulowaną). Położenie punktu *C* stanowi więc informację o wartości odchyłki regulacji.



Na schematach blokowych takie urządzenia porównawcze wytwarzające informację o wartości odchyłki regulacji przedstawiane są w postaci tzw. węzła sumacyjnego. Położenie punktu *C* (odchyłka regulacji) wpływa na stopień otwarcia dyszy kaskady pneumatycznej 5. Do otworu stałego kaskady doprowadzone jest sprężone powietrze pod ciśnieniem $p_z$. Ciśnienie $p_y$ w kaskadzie zależy od stopnia otwarcia dyszy przysłanianej przez dźwignię *ABC*. Wzrost temperatury w piecu powoduje zbliżenie punktu *C* do wylotu dyszy kaskady 5 i wzrost ciśnienia $p_y$, które oddziałując na membranę siłownika 6, powoduje zmniejszenie przekroju przepływowego zaworu regulacyjnego 7, zmniejszenie dopływu paliwa, co w konsekwencji przeciwdziała wzrostowi temperatury.




Rys. 1.5. Przykład układu automatycznej regulacji temperatury: a) schemat ideowy, b) schemat blokowy

Elementy układu, służące do przyjmowania informacji (sygnałów) o wartości wielkości regulowanej, wyznaczania odchyłki regulacji przez porównanie wartości wielkości regulowanej z wartością zadaną i wytwarzania sygnału sterującego elementem wykonawczym, tworzą zespół funkcjonalny nazywany **regulatorem** (mówi się, że jest to regulator w sensie aparaturowym; może on być wyposażony w inne jeszcze urządzenia pomocnicze). Sygnał wyjściowy regulatora (w omawianym przykładzie przebieg ciśnienia $p_y$) nazywa się **sygnałem sterującym** lub **sterowaniem** i oznaczany jest ogólnie symbolem $u$. Na schematach blokowych regulator jest przedstawiany w postaci dwóch symboli: **węzła sumacyjnego** – reprezentującego tę część regulatora w sensie aparaturowym, która służy do wytworzenia sygnału odchyłki regulacji, i **bloku działań dynamicznych**, reprezentującego tę część regulatora w sensie aparaturowym, która na podstawie sygnału odchyłki regulacji wytwarza sygnał sterujący. Mówiąc o właściwościach regulatora na ogół rozumie się, że chodzi o właściwości bloku działań dynamicznych.

Urządzenie służące do wprowadzania zmian strumienia materii lub energii do obiektu nazywa się **elementem (zespołem) wykonawczym**. W rozważanym przykładzie jest to siłownik membranowy z zaworem regulacyjnym. Regulator oddziałując na zespół wykonawczy, wywołuje odpowiednią zmianę ilości doprowadzanego paliwa.

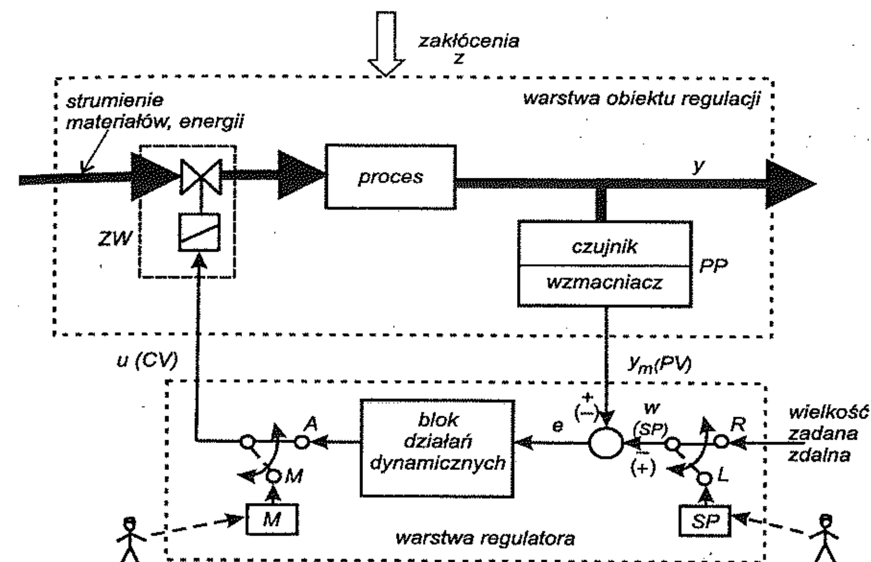
W rozważanym przykładzie siłownik pneumatyczny wykonuje pracę, korzystając z energii sygnału wytwarzanego przez regulator. W praktyce może zachodzić potrzeba wzmocnienia sygnału sterującego, co wymaga zastosowania **wzmacniacza mocy**, lub przetworzenia go na inną postać fizyczną, a to wymaga zastosowania przetwornika sygnału, np. przetwornika elektropneumatycznego.

Urządzenie służące do pozyskiwania i przekazywania do regulatora informacji o wartości wielkości regulowanej nazywa się **przetwornikiem pomiarowym**. Na ogół w przetworniku pomiarowym można wyodrębnić element zwany **czujnikiem**, na który bezpośrednio oddziałuje wielkość mierzona, i **przetwornik pośredniczący**, przetwarzający sygnał czujnika na postać dostosowaną do regulatora. Niekiedy zachodzi potrzeba przetworzenia sygnału wyjściowego zastosowanego przetwornika pomiarowego na inną postać fizyczną, do czego należy wykorzystać odpowiedni **przetwornik sygnału**, np. przetwornik pneumoelektryczny.

Układy automatycznego sterowania wyposażane są ponadto w urządzenia pomiarowe, informujące obsługę o wartościach istotnych wielkości, urządzenia rejestrujące, sygnalizujące przekroczenie wartości granicznych, urządzenia blokady, których zadaniem jest niedopuszczenie do awarii (np. zawory bezpieczeństwa), oraz urządzenia pozwalające obsłudze (operatorom) na ingerencję w proces sterowania (regulacji) np. w przypadku awarii regulatora lub rozruchu instalacji. W praktyce każdy układ regulacji powinien mieć możliwość realizacji regulacji ręcznej i automatycznej.



Schemat blokowy typowej struktury przyrządowej układu automatycznej regulacji przedstawiono na rys. 1.6. Cienkie linie ze strzałkami reprezentują sygnały przekazywane między elementami układu, natomiast gruba linia reprezentuje przepływ strumieni materiałów lub energii dostarczanych do procesu.




Rys. 1.6. Schemat blokowy struktury przyrządowej układu automatycznej regulacji; $y$ – wielkość regulowana, $w$ (*SP*) – sygnał wielkości zadanej, $e$ – sygnał odchyłki regulacji, $u$ (*CV*) – sygnał sterujący (sygnał wyjściowy regulatora), $y_m$ (*PV*) – zmienna procesowa (wielkość regulowana przetworzona na sygnał standardowy), M – regulacja ręczna (*Manual*), A – regulacja automatyczna (*Auto*), L – wartość zadana lokalna, R – zdalna wartość zadana, ZW – zespół wykonawczy, PP – przetwornik pomiarowy

Sygnały występujące w układzie regulacji, niezależnie od ich natury fizycznej, są opisywane standardowymi symbolami stosowanymi w rozważaniach teoretycznych (symbole podane w nawiasach są używane w zapisie dokumentacji projektowej):

- sygnał wyjściowy procesu (wielkość regulowana) – $y$;
- zmienna procesowa, sygnał informujący o wartości wielkości regulowanej (sygnał wyjściowy przetwornika pomiarowego) – $y_m$ (ang. *process variable, PV*);
- wartość zadana (sygnał informujący o wartości zadanej) – $w$ ( ang. *set point, SP*);
- odchyłka regulacji (sygnał informujący o wartości odchyłki) – $e$;
- sygnał wyjściowy regulatora (sygnał sterujący) – $u$ (ang. *control variable, CV*).

Występujące w układach automatycznego sterowania (regulacji) urządzenia można podzielić, ze względu na pełnione funkcje, na:
– obiekty sterowania (regulacji);
– urządzenia pomiarowe, przetwarzające, rejestracji, sygnalizacji, diagnostyki, blokady;
– urządzenia generujące sygnał (sygnały) sterujący; w przypadku układów regulacji są to różnego rodzaju regulatory;
– urządzenia wykonawcze, służące do wprowadzania zmian strumienia materii lub energii do obiektów regulacji pod wpływem zmian sygnałów sterujących;
– osprzęt.

Rzeczywiste układy automatycznej regulacji zwykle mają strukturę bardziej złożoną niż układ przedstawiony na rys. 1.6.

W zależności od potrzeby, schematy blokowe danego układu mogą być tworzone o różnym stopniu szczegółowości. Na przykład regulator na schemacie ogólnym może być przedstawiony jako pojedynczy element (blok), na schemacie szczegółowym – w postaci układu kilku elementów składowych.

Ważnym narzędziem automatyki jest tzw. algebra schematów blokowych (patrz rozdz. 4). Stwarza ona efektywną metodę tworzenia modeli matematycznych złożonych zespołów i układów na podstawie ich szczegółowych schematów blokowych, zbudowanych z bloków reprezentujących człony elementarne o znanych modelach matematycznych.

W czasie pracy układu regulacji wartości poszczególnych oddziaływań praktycznie ciągle się zmieniają. Stan, w którym wszystkie występujące w układzie oddziaływania nie zmieniają swej wartości, nazywa się **stanem równowagi** lub **stanem ustalonym**. W przypadku pojawienia się zakłócenia, np. w rozważanym układzie regulacji temperatury zakłócenia w postaci wzrostu ciśnienia na dopływie paliwa, temperatura w piecu zacznie wzrastać. Wynikiem tego jest pojawienie się niezerowej odchyłki regulacji i zmian sygnału sterującego, co powinno w prawidłowo zbudowanym układzie regulacji doprowadzić do powrotu do stanu ustalonego (o ile wcześniej nie pojawią się kolejne zakłócenia). Taki stan, trwający od chwili pojawienia się zakłócenia do ponownego osiągnięcia stanu ustalonego, nazywa się **stanem nieustalonym** lub **stanem przejściowym**. Układ regulacji ze stanu równowagi może być wytrącony nie tylko w wyniku oddziaływania zakłóceń, lecz także na skutek zmiany wartości zadanej.

Zdolność osiągania stanu ustalonego, w przypadku zaniku oddziaływań wytrącających układ ze stanu równowagi, nazywa się **stabilnością** układu (patrz rozdz. 9). Układ regulacji bez takiej zdolności jest bezużyteczny. Dlatego podstawowym zadaniem projektanta układu regulacji jest zapewnienie stabilności układu.

Ze względu na realizowany proces technologiczny lub zadanie układu regulacji nie jest obojętny sposób osiągania przez układ stanu ustalonego. Do formułowania wymagań dotyczących tej właściwości układu służą **kryteria jakości** (patrz rozdz. 10).



Jak wspomniano, do sterowania przebiegiem jakiegokolwiek procesu technologicznego niezbędna jest znajomość jego modelu. Kiedy procesem steruje człowiek, musi posiadać określony zakres wiedzy składającej się na ten model. Na przykład, człowiek sterujący pojazdem musi znać sposoby oddziaływania na pojazd, by osiągnąć zamierzony skutek tego oddziaływania. Ponadto, co nie mniej ważne, człowiek musi nabyć umiejętności sprawnego posługiwania się tą wiedzą. W przeciwnym przypadku łatwo straci panowanie nad pojazdem. Podobnie jest w przypadku procesów sterowanych automatycznie. „Umiejętności" urządzenia sterującego muszą być odpowiednio dobrane do właściwości sterowanego obiektu. W początkowym okresie rozwoju automatyki dobór ten był dokonywany intuicyjnie, co umożliwiało tworzenie jedynie bardzo prostych układów działających samoczynnie. Z czasem zostały opracowane formalne metody dokonywania takiego doboru. Aby było to możliwe, właściwości zarówno obiektów sterowania jak i urządzeń sterujących muszą być opisane za pomocą odpowiednich formuł matematycznych. Współczesna automatyka zajmuje się więc metodami matematycznego opisu właściwości obiektów sterowania (tworzeniem modeli matematycznych obiektów sterowania) i urządzeń sterujących, metodami projektowania urządzeń sterujących zapewniających wymaganą jakość procesów sterowania oraz techniczną realizacją układów automatycznego sterowania.

## 1.2. SYGNAŁY W UKŁADACH AUTOMATYKI

Niezwykle ważną czynnością człowieka, a w istocie wszystkich żywych organizmów, jest przekazywanie (przesyłanie) informacji.

Można ją przekazywać w postaci utrwalonej (zapisanej) na odpowiednim nośniku z wykorzystaniem umownych znaków lub zespołów znaków. Takimi zapisanymi i utrwalonymi informacjami są np. znaki drogowe, piktogramy, napisy informacyjne, umowne zapisy na różnych nośnikach, takich jak papier, taśma magnetyczna, płyta CD itp. W tym przypadku odczytanie (odebranie) informacji nie musi być funkcjonalnie ani czasowo związane z jej zapisywaniem. Informacja zapisana w formie trwałej może być przejmowana (odczytywana) wielokrotnie.

Drugi sposób przekazywania informacji polega na generowaniu w funkcji czasu zmian różnych wielkości fizycznych. Takie zmiany określonej wielkości fizycznej, wyrażające w umowny sposób przekazywane informacje, nazywane są **sygnałami**. W tym przypadku, aby informacja była przejęta (odczytana, zrozumiana), wyrażające ją zmiany danej wielkości fizycznej muszą być zauważone (odebrane) w odpowiednim czasie.

Spotykane w potocznej mowie określenia związane ze słowem „sygnał" mogą wyrażać rodzaj przekazywanych informacji (np. sygnał alarmowy, sygnał ostrzegawczy, sygnał czasu, sygnał zajętości, sygnał pomiarowy, sygnał sterujący), rodzaj medium wykorzystanego do przekazywania informacji (np. sygnał flagowy, głosowy, świetlny, radiowy, akustyczny, elektryczny, pneumatyczny) lub wyrażać pewne cechy sygnałów (np. sygnał silny, słaby, ciągły, nieciągły, pulsacyjny, analogowy, cyfrowy) itd.

W rozdz. 1.1 stwierdzono, że układ regulacji jest zamkniętym obwodem przekazywania informacji, w którym występuje sprzężenie zwrotne. Układy sterowania bez sprzężeń zwrotnych są otwartymi układami przekazywania informacji. Poniżej przytoczono przydatne w dalszych rozważaniach informacje dotyczące sygnałów wykorzystywanych w układach automatycznego sterowania.

**Sygnał** – przebieg (w czasie) zmian określonej wielkości fizycznej, wyrażający w umowny sposób informacje.

**Wielkość nośna sygnału** – wielkość fizyczna, której zmiany są wykorzystywane do przekazywania informacji. W przypadku sygnałów elektrycznych wielkością nośną może być napięcie lub natężenie prądu. Wielkością nośną sygnałów pneumatycznych i hydraulicznych jest ciśnienie, odpowiednio, gazu lub cieczy. Wielkością nośną sygnałów mechanicznych może być położenie (liniowa lub kątowa odległość elementu mechanicznego od położenia bazowego), siła, moment.

**Parametr informacyjny sygnału** – cecha wielkości nośnej sygnału, zawierająca przekazywane informacje. Na przykład, informacje przekazywane za pomocą sygnału elektrycznego, którego wielkością nośną jest napięcie, mogą być wyrażane albo przez zmiany wartości tego napięcia – parametrem informacyjnym w takim przypadku jest także napięcie, albo przez zmiany częstotliwości sinusoidalnego przebiegu napięcia, albo poprzez zmiany czasu trwania impulsów napięcia o jednakowej amplitudzie itp. Najczęściej parametrem informacyjnym sygnału jest wartość wielkości nośnej.

**Wartość sygnału** – wartość parametru informacyjnego sygnału.

Niezależnie od rodzaju wielkości nośnej, wyróżnia się dwie klasy sygnałów: sygnały analogowe i sygnały cyfrowe.

**Sygnałami analogowymi** nazywane są takie sygnały, które w wykorzystywanym zakresie zmian parametru informacyjnego mają nieprzeliczalną liczbę różnych wartości. Wartości sygnałów analogowych są liczbami mianowanymi.

W automatyce sygnały analogowe są wykorzystywane do przekazywania informacji o wartości wielkości zmieniających się w sposób ciągły (mogących przyjmować nieskończenie wiele wartości), takich jak temperatura, ciśnienie, napięcie, natężenie, przy czym zależność wartości sygnału od wartości wielkości, o której sygnał informuje, jest funkcją monotoniczną.

W urządzeniach automatyki wykorzystuje się standardowe zakresy zmian wartości sygnałów analogowych (tabl. 1.1).



Tablica 1.1

**Standardowe zakresy zmian sygnałów analogowych**

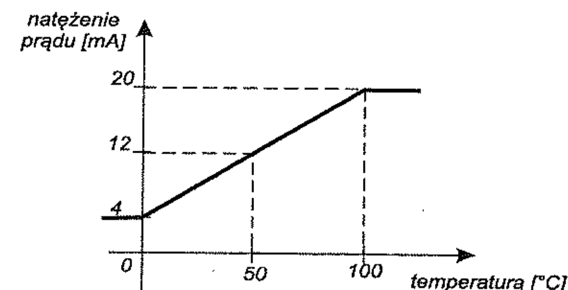
| Rodzaj sygnału | Wielkość nośna | Parametr informacyjny | Standardowe zakresy wartości sygnału |
|---|---|---|---|
| Pneumatyczny | ciśnienie | ciśnienie | 20÷100 kPa |
| Elektryczny | natężenie prądu stałego | natężenie prądu | 0÷5 mA<br>0÷10 mA<br>0÷20 mA<br>4÷20 mA |
| | napięcie prądu stałego | napięcie prądu | 0÷5 V<br>0÷10 V<br>1÷5 V |

Ze względu na początkową wartość standardowego zakresu zmian wartości rozróżnia się **sygnały zerowe** i **sygnały niezerowe**. Początkowa wartość zakresu zmian wartości sygnału zerowego odpowiada zerowej wartości parametru informacyjnego, np. w przypadku zerowego sygnału prądowego o zakresie zmian 0÷20 mA początkowi zakresu zmian wartości sygnału odpowiada natężenie prądu 0 mA.

Początkowa wartość zakresu zmian sygnału niezerowego odpowiada niezerowej jego wartości fizycznej, np. dla niezerowego sygnału prądowego o zakresie zmian 4÷20 mA początek zakresu wynosi 4 mA.

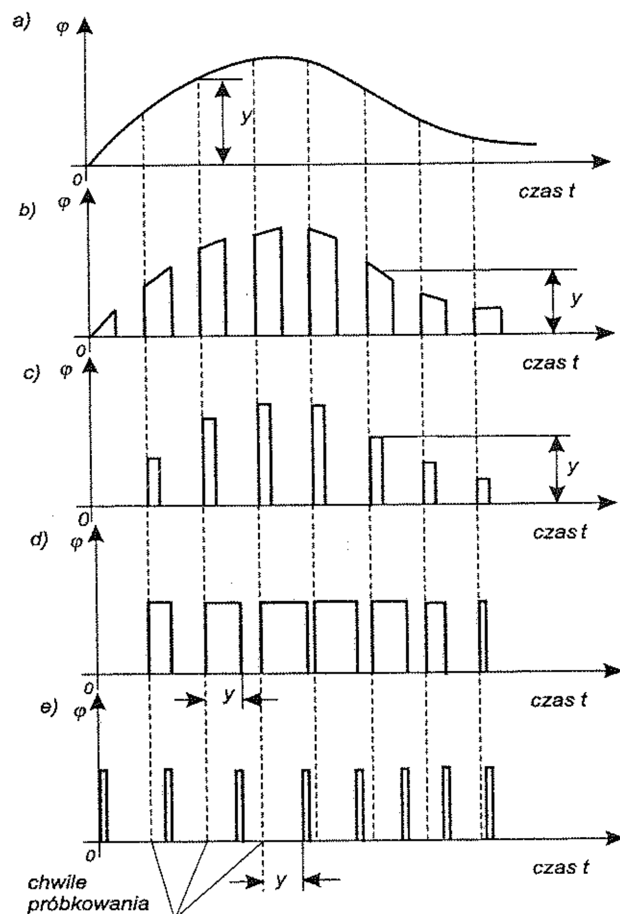
W obecnie projektowanych urządzeniach automatyki preferowane są sygnały niezerowe, ze względu na łatwość detekcji uszkodzenia przyrządu generującego sygnał.

Sygnał analogowy odwzorowujący daną wielkość fizyczną najczęściej zmienia swą wartość proporcjonalnie do zmian wartości danej wielkości. Na rys. 1.7 pokazano przyporządkowanie wartości niezerowego napięciowego sygnału elektrycznego zmianom temperatury w zakresie od 0 do 100°C.




Rys. 1.7. Przykład przyporządkowania wartości prądowego niezerowego sygnału elektrycznego zmianom temperatury w zakresie od 0 do 100°C

Sygnały analogowe, ze względu na ciągłość w czasie, można podzielić na:
- ciągłe (rys. 1.8a),
- nieciągłe:
  - przerywane (rys. 1.8b),
  - zdyskretyzowane w czasie (impulsowe, próbkowane) (rys. 1.8c–e).




Rys. 1.8. Przykłady sygnałów analogowych (φ – wartość wielkości nośnej, $y$ – wartość sygnału): a) sygnał ciągły, b) sygnał przerywany, c, d, e) sygnały zdyskretyzowane w czasie (c – parametrem informacyjnym jest amplituda impulsów, d – parametrem informacyjnym jest szerokość impulsów, e – parametrem informacyjnym jest przesunięcie fazowe impulsów względem chwil próbkowania)



Sygnały przerywane przekazują informacje o wartości danej wielkości tylko w pewnych okresach czasu.

Sygnały zdyskretyzowane w czasie przekazują informacje o wartościach danej wielkości występujących w określonych chwilach czasu, zwanych **chwilami próbkowania**. Zwykle odstęp między kolejnymi chwilami próbkowania jest stały i nazywa się **okresem próbkowania**.

**Sygnałami cyfrowymi** nazywane są takie sygnały, w których w wykorzystywanym zakresie zmian parametru informacyjnego wyróżnia się skończoną liczbę różnych wartości. Mówi się, że sygnały cyfrowe są zdyskretyzowane w amplitudzie. Wartości sygnałów cyfrowych są umownymi liczbami niemianowanymi.

Ze względu na liczbę wartości sygnału, sygnały cyfrowe dzieli się na:
- dwustanowe (dwuwartościowe, binarne),
- trójstanowe (trójwartościowe),
- wielostanowe (wielowartościowe).

Ze względu na ciągłość w czasie, sygnały cyfrowe można podzielić na:
- ciągłe,
- zdyskretyzowane w czasie (próbkowane).

Sygnały cyfrowe zdyskretyzowane w czasie nazywają się **sygnałami dyskretnymi** (są one zdyskretyzowane w czasie i zdyskretyzowane w amplitudzie).

Sygnały cyfrowe mogą być wykorzystywane do przekazywania informacji nie tylko o wartości wielkości binarnych i wielowartościowych, lecz także o wartości wielkości zmieniających się w sposób ciągły – każdej wartości sygnału cyfrowego odpowiada pewien zakres zmian wielkości ciągłej. Podział zakresu zmian wielkości ciągłej na części przyporządkowane poszczególnym wartościom sygnału cyfrowego nazywa się **kwantyzacją**.

## 1.3. KLASYFIKACJA UKŁADÓW AUTOMATYCZNEJ REGULACJI (UAR)

W rozdz. 1.1 analizowano przykład układu regulacji, którego zadaniem jest utrzymanie stałej wartości wielkości regulowanej. Układy takie nazywają się **układami regulacji stałowartościowej** (układami stabilizacji). W trakcie pracy takich układów wartość zadana $w = \text{const}$.

W szeregu przypadków, do zapewnienia prawidłowego przebiegu procesu, wymagany jest odpowiedni przebieg zmian wartości wielkości regulowanej. Zatem wartość zadana musi być znaną z góry funkcją czasu. Układy realizujące ta-

kie zadanie nazywają się **układami regulacji programowej**. Natomiast układy, w których przebieg wartości zadanej jest nieznaną funkcją czasu (zmiany wartości zadanej uzależnione są od wielkości, których zmian nie można przewidzieć), nazywają się **układami regulacji nadążnej** lub **układami śledzącymi**.

Układy regulacji nadążnej, których wielkością regulowaną jest położenie określonego elementu (liniowa lub kątowa odległość od pozycji bazowej), siła lub moment, nazywane są **serwomechanizmami**.

Ze względu na strukturę (liczbę sprzężeń zwrotnych) rozróżnia się:
- **jednoobwodowe układy regulacji**,
- **wieloobwodowe układy regulacji**.

Ze względu na liczbę wielkości podlegających regulacji wyróżnia się:
- **układy jednowymiarowe**, w których występuje jedna tylko wielkość regulowana;
- **układy wielowymiarowe**, w których regulacji podlega jednocześnie kilka wielkości.

Jak wspomniano w rozdz. 1.1, układy automatyki tworzy się, posługując się modelami matematycznymi obiektów regulacji i innych elementów układu. Ze względu na postać modelu matematycznego danego układu rozróżnia się:
- **układy liniowe**,
- **układy nieliniowe**.

Liniowymi nazywane są układy spełniające **zasadę superpozycji**; nieliniowymi – niespełniające tej zasady.

Układ spełnia zasadę superpozycji, jeżeli przy zerowych warunkach początkowych odpowiedź układu na sygnał wejściowy będący sumą sygnałów jest równa sumie odpowiedzi układu na poszczególne sygnały składowe.

Ze względu na technikę realizacyjną aparatury regulacyjnej, rozróżnia się układy:
- mechaniczne,
- pneumatyczne,
- hydrauliczne,
- elektryczne,
- mieszane.

Ze względu na rodzaj sygnałów sterujących wytwarzanych przez regulator, wyróżnia się:
- analogowe układy regulacji o działaniu ciągłym (regulator wytwarza sygnał analogowy ciągły),
- układy regulacji dwu- i trójstawnej (regulator wytwarza sygnał odpowiednio dwu- lub trójwartościowy),



- układy impulsowe (regulator wytwarza sygnał impulsowy),
- układy cyfrowe (regulator wytwarza sygnał cyfrowy).

Dalsze rozważania dotyczyć będą jedynie analogowych układów regulacji o działaniu ciągłym z jedną wielkością regulowaną.

W powyższych rozważaniach jako jedyne zadanie układu regulacji wymieniano utrzymanie zgodności wartości wielkości regulowanej z wartością zadaną. Odrębną klasą układów regulacji są układy, których zadaniem jest takie sterowanie przebiegiem procesu, aby np. zminimalizować zużycie energii lub czynnika biorącego udział w procesie; są to **układy regulacji ekstremalnej**.

# 2. WYBRANE ZAGADNIENIA MATEMATYKI WYKORZYSTYWANE DO OPISU LINIOWYCH UKŁADÓW AUTOMATYKI

## 2.1. PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A

Wykorzystanie przekształcenia Laplace'a do obliczeń zwane jest rachunkiem operatorowym. Znaczenie rachunku operatorowego w zastosowaniach technicznych polega na tym, że umożliwia on w stosunkowo prosty sposób rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych.

Przekształcenie Laplace'a, oznaczane symbolem $L$, przyporządkowuje funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej $t$ funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = c + j\omega$ wg zależności zwanej całką Laplace'a:

$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = F(s) \tag{2.1}$$

Funkcja $F(s)$ nazywa się transformatą Laplace'a danej funkcji $f(t)$; funkcja $f(t)$ nazywa się oryginałem funkcji $F(s)$. Nie wszystkie funkcje $f(t)$ mają transformaty. Aby można było wyznaczyć transformatę funkcji $f(t)$, muszą być spełnione warunki:

- $f(t)$ ma w każdym przedziale skończonym wartość skończoną,
- $f(t)$ ma pochodną $df/dt$ w każdym przedziale skończonym,
- istnieje zbiór liczb rzeczywistych $c$, dla których całka $\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ct}\,dt$ jest absolutnie zbieżna.

Operacja wyznaczania funkcji $F(s)$ dla danej funkcji $f(t)$ nazywa się prostym przekształceniem (prostą transformacją) Laplace'a. Operacja wyznaczania oryginału na podstawie transformaty, oznaczana symbolem $L^{-1}$, nazywa się odwrotnym przekształceniem Laplace'a. Zależność umożliwiająca określenie oryginału na podstawie transformaty, zwana całką Riemanna-Mellina, ma postać:



$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,ds \tag{2.2}$$

W technice funkcje $f(t)$ są funkcjami czasu, które mają fizyczny sens dla $t \geq 0$. Zakłada się, że $f(t) \equiv 0$ dla $t < 0$. Przy tym założeniu, całka Laplace'a przybiera postać zwaną jednostronnym przekształceniem Laplace'a:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \tag{2.3}$$

W zastosowaniach praktycznych przy wykonywaniu transformacji prostej i odwrotnej, które są podstawowymi operacjami w rachunku operatorowym, zwykle nie zachodzi potrzeba wykorzystywania wzorów definicyjnych. Najczęściej wystarczy znajomość podstawowych własności przekształceń Laplace'a i tablic transformat typowych funkcji zmiennej rzeczywistej. Zestawienie transformat funkcji przydatnych w dalszych rozważaniach zawiera tabl. 2.1.

W tablicy 2.1 między innymi występują dwie funkcje, odgrywające ważną rolę w analizie modeli matematycznych elementów i układów automatyki: $f(t) = \delta(t)$ – impuls jednostkowy (funkcja Diraca – rys. 2.1) i $f(t) = 1(t)$ – skok jednostkowy (funkcja Heaviside'a – rys. 2.2). Definicje tych funkcji są następujące:

$\delta(t) = +\infty$ dla $t = 0+$,

$\delta(t) = 0$ dla $t \neq 0$

oraz

$1(t) = 0$ dla $t \leq 0$,

$1(t) = 1$ dla $t > 0$.

Nazwa „impuls jednostkowy" funkcji $\delta(t)$ wynika z właściwości tej funkcji:

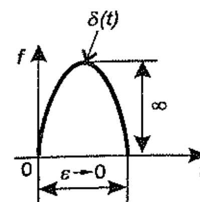
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Tablica 2.1

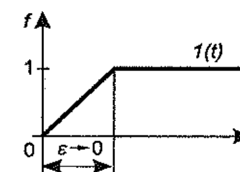
**Tablica transformat Laplace'a wybranych funkcji**

| Lp. | Oryginał $f(t)$ | Transformata $F(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\delta(t)$ – impuls jednostkowy | $1$ |
| 2 | $1(t)$ – skok jednostkowy | $\frac{1}{s}$ |
| 3 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 4 | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$ | $\frac{1}{s^n};\quad n \geq 1$ |
| 5 | $e^{\pm\alpha t}$ | $\frac{1}{s\mp\alpha}$ |
| 6 | $te^{\pm\alpha t}$ | $\frac{1}{(s\mp\alpha)^2}$ |
| 7 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\mp\alpha t}$ | $\frac{1}{(s\pm\alpha)^n};\quad n>0$ |
| 8 | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 9 | $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 10 | $\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$ | $\frac{1}{s(s+\alpha)}$ |
| 11 | $\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$ | $\frac{1}{s(s-\alpha)}$ |
| 12 | $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2})\,t$ | $\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2};\quad 0<\xi<1$ |
| 13 | $1-\frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi);\ \phi=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ | $\frac{\omega_0^2}{s(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)};\quad 0<\xi<1$ |
| 14 | $Ae^{-\frac{C}{2}t}\cos t\sqrt{D-\frac{C^2}{4}}+\frac{2B-AC}{\sqrt{4D-C^2}}e^{-\frac{C}{2}t}\sin t\sqrt{D-\frac{C^2}{4}}$ | $\frac{As+B}{s^2+Cs+D};\ C^2-4D<0$ |






Rys. 2.1. Impuls jednostkowy (funkcja Diraca)




Rys. 2.2. Skok jednostkowy (funkcja Heaviside'a)

W dalszych rozważaniach będą wykorzystywane następujące twierdzenia dotyczące własności przekształcenia Laplace'a.

**Twierdzenia o liniowości:**

$$\left.\begin{aligned} L[f_1(t)+f_2(t)] &= L[f_1(t)]+L[f_2(t)] \\ L[kf(t)] &= kL[f(t)] \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned} L^{-1}[F_1(s)+F_2(s)] &= L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)] \\ L^{-1}[kF_1(s)] &= kL^{-1}[F_1(s)] \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

**Twierdzenia o transformacie pochodnych:**

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sL[f(t)]-f(0+)=sF(s)-f(0+);\quad F(s)=L[f(t)] \tag{2.6}$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0+)-f'(0+);\quad f'=\frac{df(t)}{dt} \tag{2.7}$$

Wzór ogólny ma postać:

$$\begin{gathered} L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0+)-s^{n-2}f'(0+)\ldots-s\,f^{(n-2)}(0+)-f^{(n-1)}(0+); \\ f^{(n-1)}=\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}} \end{gathered} \tag{2.8}$$

**Twierdzenie o transformacie całki:**

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}L[f(t)]=\frac{F(s)}{s} \tag{2.9}$$

**Twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie zmiennej zespolonej:**

$$\left.\begin{aligned} L\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] &= F(s+\alpha) \\ L\left[e^{+\alpha t} f(t)\right] &= F(s-\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

**Twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie zmiennej rzeczywistej:**

$$\left.\begin{aligned} L[f(t-\tau)] &= e^{-\tau s} L[f(t)] = e^{-\tau s} F(s) \\ L[f(t+\tau)] &= e^{+\tau s} L[f(t)] = e^{+\tau s} F(s) \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

**Twierdzenia o wartości początkowej i końcowej:**

– jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{t \to 0+} f(t) = f(0+)$, to

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s) \qquad (2.12)$$

– jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = f(\infty)$, to

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s) \qquad (2.13)$$

## 2.2. ZASTOSOWANIE PRZEKSZTAŁCENIA LAPLACE'A DO ROZWIĄZYWANIA LINIOWYCH ZWYCZAJNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH. ROZKŁAD TRANSFORMATY NA UŁAMKI PROSTE

Rozwiązaniem równania różniczkowego

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = f(t) \qquad (2.14)$$

ze stałymi współczynnikami $a_n, \ldots, a_0$, w którym $f(t)$ jest znaną funkcją zmiennej rzeczywistej $t$, jest funkcja $y(t)$, spełniająca to równanie. Na ogół równanie takie spełnia wiele funkcji $y(t)$ (tzw. rodzina funkcji). Zwykle poszukuje się jednej funkcji $y(t)$ spełniającej dodatkowe warunki, tzw. warunki brzegowe (początkowe), która nazywa się rozwiązaniem szczególnym danego równania różniczkowego.



Równanie różniczkowe można zapisać także, stosując uproszczoną symbolikę:

$$a_n\, y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2\, \ddot{y}(t) + a_1\, \dot{y}(t) + a_0\, y(t) = f(t) \qquad (2.15)$$

Wykorzystując rachunek operatorowy, można poszukiwanie rozwiązania szczególnego sprowadzić do następujących operacji:

- poddanie przekształceniu Laplace'a obu stron danego równania z uwzględnieniem warunków początkowych,
- wyznaczenie transformaty $Y(s)$ szukanej funkcji,
- wyznaczenie szukanej funkcji przez wykonanie odwrotnego przekształcenia Laplace'a $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$.

**Przykład 2.1**

Wyznaczyć funkcję $y(t)$ spełniającą równanie

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$$

i warunki początkowe: $y(0+) = 0$, $\dot{y}(0+) = 2$.

*Rozwiązanie*

Zgodnie z podanym algorytmem, poddaje się obie strony równania przekształceniu Laplace'a, wykorzystując przy tym twierdzenie o liniowości i o transformacji pochodnych. Oznaczając transformatę szukanej funkcji

$$L[y(t)] = Y(s)$$

można napisać

$$s^2 Y(s) - sy(0+) - \dot{y}(0+) + 3\,[sY(s) - y(0+)] + 2Y(s) = 0$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych i przekształceniu, otrzymuje się transformatę szukanej funkcji

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

Wyznaczenie oryginału jest sprawą prostą, jeżeli otrzymana transformata występuje w tablicy transformat. W przeciwnym przypadku należy mianownik transfor-

maty rozłożyć na czynniki, co umożliwia przekształcenie transformaty na sumę ułamków prostych. W danym przypadku

$$Y(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}=\frac{2}{(s+2)(s+1)}$$

Ułamek $\frac{2}{(s+2)(s+1)}$ jest sumą dwóch ułamków prostych $\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+1}$.

Wartości $A_1$ i $A_2$ można wyznaczyć, przyrównując obydwa wyrażenia:

$$\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+1}=\frac{A_1(s+1)+A_2(s+2)}{(s+2)(s+1)}=\frac{(A_1+A_2)s+A_1+2A_2}{(s+2)(s+1)}\equiv\frac{2}{(s+2)(s+1)}$$

Z porównania liczników wynika układ równań

$$A_1+A_2=0$$

$$A_1+2A_2=2$$

z którego otrzymuje się $A_1=-2$ oraz $A_2=2$.

Transformatę szukanej funkcji można więc przedstawić w postaci

$$Y(s)=-2\frac{1}{s+2}+2\frac{1}{s+1}$$

Posługując się tablicą transformat, otrzymuje się szukaną funkcję

$$y(t)=-2\,\mathrm{e}^{-2t}+2\,\mathrm{e}^{-t}$$

Zwykle najbardziej pracochłonną czynnością przy rozwiązywaniu równania różniczkowego jest rozkład transformaty na ułamki proste. Sposób rozkładu zależy od rodzaju miejsc zerowych mianownika transformaty.

Jeżeli mianownik transformaty ma tylko pojedyncze rzeczywiste miejsca zerowe, to rozkład na ułamki proste przeprowadza się według wzoru

$$F(s)=\frac{L(s)}{M(s)}=\frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\dots+\frac{A_m}{s-s_m} \quad (2.16)$$

Współczynniki $A_1, \dots, A_m$ można wyznaczyć ze wzoru

$$A_k=\lim_{s\to s_k}\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_k) \quad (2.17)$$



Wzory (2.16) i (2.17) obowiązują również w przypadku, w którym jedno z miejsc zerowych wielomianu $M(s)$ jest zerem.

Jeżeli wielomian $M(s)$ ma oprócz pojedynczych rzeczywistych miejsc zerowych także miejsca zerowe wielokrotne, np. $p$-krotne miejsce zerowe $s_2$, to rozkład na ułamki proste przeprowadza się według wzoru

$$F(s)=\frac{L(s)}{M(s)}=\frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)^p}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{B_1}{s-s_2}+\frac{B_2}{(s-s_2)^2}+\dots+\frac{B_p}{(s-s_2)^p} \quad (2.18)$$

Współczynniki $B_1, \dots, B_p$ można wyznaczyć ze wzorów:

$$B_p=\lim_{s\to s_2}\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_2)^p \quad (2.19)$$

$$B_{p-1}=\lim_{s\to s_2}\frac{d}{ds}\left[\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_2)^p\right] \quad (2.20)$$

$$B_{p-2}=\lim_{s\to s_2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_2)^p\right] \quad (2.21)$$

$$B_{p-i}=\lim_{s\to s_2}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\left[\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_2)^p\right] \quad (2.22)$$

Podany sposób rozkładu dotyczy także wielokrotnego miejsca zerowego równego zeru.

Mianownik transformaty, oprócz miejsc zerowych rzeczywistych pojedynczych i wielokrotnych, może mieć pary miejsc zerowych zespolonych sprzężonych. W przypadku wystąpienia jednej pary miejsc zerowych sprzężonych, np.

$$F(s)=\frac{L(s)}{M(s)}=\frac{L(s)}{(s-s_1)(s^2+2s+3)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+3}$$

licznik ułamka prostego, którego mianownik jest trójmianem, powinien być dwumianem.

W każdym przypadku wartości współczynników występujących w licznikach ułamków prostych można wyznaczyć metodą wykorzystaną w przykładzie 2.1.

Wyznaczanie oryginału $f(t)$ transformaty Laplace'a $F(s) = L(s)/M(s)$ można znacznie uprościć, wykonując obliczenia w środowisku MATLAB (krótki opis programu w rozdz. 17). Funkcję wymierną $F(s)$ można rozłożyć na ułamki proste za pomocą funkcji residue. Wywołanie tej funkcji ma postać

```
[A,s,k] = residue(L,M)
```

W wyniku otrzymuje się trzy wektory: wektor $s$ zawierający zbiór biegunów funkcji $F(s)$, wektor residuów w tych biegunach oznaczony przez $A$ oraz wektor reszt $k$. Jeżeli stopień licznika funkcji $F(s)$ jest mniejszy od stopnia mianownika, to $k=0$ i w efekcie otrzymuje się

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(i)}{s-s(i)}$$

Dla tak przedstawionej postaci $F(s)$, jej odwrotna transformata Laplace'a jest określona wzorem

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}A(i)\exp(s(i)\,t)$$

Przykład zastosowania funkcji residue przedstawia fragment programu, zastosowany do rozkładu na ułamki proste funkcji $Y(s)$ z przykładu 2.1.

```
%Program obliczający odwrotną transformatę Laplace'a
L=[0 2];
M=[1 3 2];
t=0:0.1:5;
[A,s,k]=residue(L,M);
y=0;
for i=1:length(A)
    y=y+A(i)*exp(t.*s(i));
end
plot(t,y),grid,xlabel('t'),ylabel('y(t)')
title('wykres rozwiązania równania przykład 2.1')
```

Program wyliczył wartości $s_1=-2$, $s_2=-1$, $A_1=-2$, $A_2=2$, zgodne z wyliczonymi metodą konwencjonalną. Otrzymano także wykres funkcji $y(t)=-2e^{-2t}+2e^{-t}$, będącej rozwiązaniem równania z przykładu 2.1 (rys. 2.3).

**Przykłady do samodzielnego rozwiązania**

1. Rozwiązać równanie różniczkowe $\dddot{y}(t)+4\ddot{y}(t)+13\dot{y}(t)=0$ przy warunkach początkowych: $y(0+)=1$, $\dot{y}(0+)=0$, $\ddot{y}(0+)=0$.

   Odp.: $y(t)=e^{-2t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

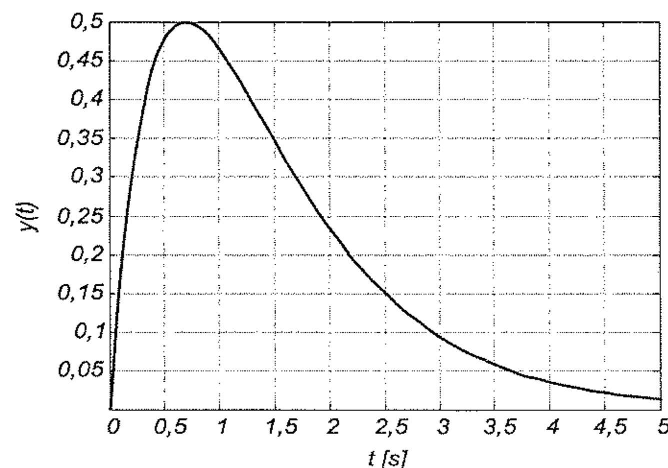
2. Rozwiązać równanie $2\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=4$ przy warunkach początkowych: $y(0+)=1$, $\dot{y}(0+)=1$.

   Odp.: $y(t)=4+e^{-t}-4e^{-0,5t}$.



3. Wyznaczyć oryginał transformaty $F(s)=\dfrac{1}{s(s+2)^2}$.

   Odp.: $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}t\,e^{-2t}$.




Rys. 2.3. Wykres rozwiązania równania różniczkowego z przykładu 2.1

## 2.3. LINEARYZACJA RÓWNAŃ NIELINIOWYCH

Modele matematyczne procesów zachodzących w urządzeniach technicznych lub z udziałem tych urządzeń mogą mieć postać równań algebraicznych, równań różniczkowych albo równań różnicowych (w przypadku urządzeń o działaniu impulsowym). Mogą to być równania liniowe albo nieliniowe. Matematyczny opis zjawisk fizycznych (model matematyczny) jest zawsze przybliżeniem ich rzeczywistego charakteru. W przypadku modeli nieliniowych, do niektórych celów może okazać się bardziej użyteczny mniej dokładny model liniowy. Tworzenie opisu liniowego na podstawie opisu nieliniowego nazywa się **linearyzacją**.

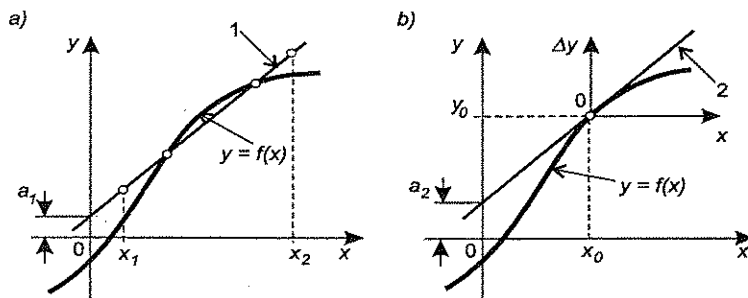
Linearyzacja opisu nieliniowego w postaci równań algebraicznych nazywa się **linearyzacją statyczną**, linearyzacja opisu nieliniowego w postaci równań różniczkowych nazywa się **linearyzacją dynamiczną**.

Metody **linearyzacji statycznej** przedstawiono na przykładzie nieliniowej funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$ (rys. 2.4).

Postać równania liniowego zależy od celu linearyzacji, którym może być:

- uzyskanie najlepszej zgodności opisu liniowego z nieliniowym w określonym przedziale zmian zmiennej niezależnej (rys. 2.4a) – jest to linearyzacja metodą siecznej,
- uzyskanie najlepszej zgodności opisu liniowego z nieliniowym dla określonej wartości zmiennej niezależnej, a więc i określonej wartości zmiennej zależnej, (rys. 2.4b) – jest to linearyzacja metodą stycznej.

Na przykład, na rys. 2.4a prosta 1 reprezentuje liniową funkcję $y_1 = a_1 + k_1 x$, która zastępuje opis nieliniowy w zakresie $x_1 \le x \le x_2$, tak aby średniokwadratowy błąd różnicy między opisem nieliniowym a jego liniowym przybliżeniem był minimalny, natomiast prosta 2 na rys. 2.4b reprezentuje liniową funkcję $y_2 = a_2 + k_2 x$, która jest zgodna z opisem nieliniowym jedynie w punkcie o współrzędnych $x_0$, $y_0$.




Rys. 2.4. Interpretacja geometryczna metod linearyzacji nieliniowej funkcji jednej zmiennej: a) linearyzacja metodą siecznej, b) linearyzacja metodą stycznej

Ponieważ w automatyce analizuje się zachowanie układów w otoczeniu określonego punktu pracy, w dalszych rozważaniach przydatny jest drugi sposób linearyzacji.

Jest oczywiste, że współczynnik kierunkowy $k_2$ jest pochodną nieliniowej funkcji $f(x)$, wyznaczoną w punkcie pracy o współrzędnych $x_0$ i $y_0$:

$$k_2 = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_0$$

Zlinearyzowaną funkcję $y_2 = a_2 + k_2 x$ można zapisać także w postaci

$$y_2 - y_0 = k_2(x - x_0)$$



W automatyce, w przypadku posługiwania się funkcjami zlinearyzowanymi w określonym punkcie pracy, na ogół interesująca jest zależność między odchyleniami $\Delta x$ i $\Delta y$ od punktu pracy, gdzie: $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$. Zatem jako ostateczny wynik linearyzacji metodą stycznej traktuje się zależność

$$\Delta y = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_0 \Delta x \tag{2.23}$$

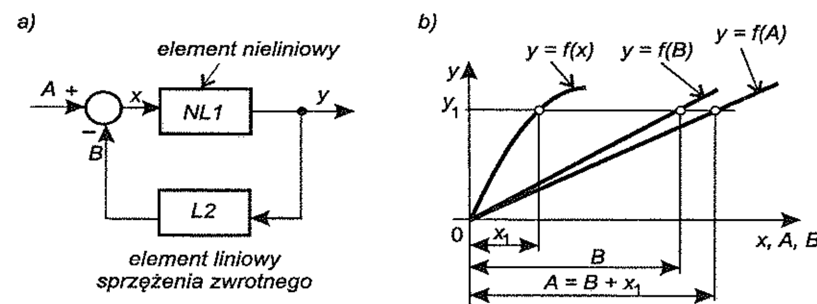
między odchyleniami $\Delta x$ i $\Delta y$ od punktu pracy, zwanymi zmiennymi przyrostowymi.

Przeprowadzony proces linearyzacji polegał więc na:

- zastąpieniu krzywej, reprezentującej nieliniową zależność $y = f(x)$, styczną do niej w punkcie pracy,
- przeniesieniu początku układu współrzędnych do punktu pracy,
- zastąpieniu w modelu matematycznym zmiennych absolutnych $x$ i $y$ odchyleniami tych zmiennych od punktu pracy – zmiennymi przyrostowymi $\Delta x$ i $\Delta y$.

**Należy pamiętać, że tak zlinearyzowane równanie stanowi przybliżenie funkcji nieliniowej jedynie w otoczeniu punktu pracy, dla którego zostało wyznaczone. Przedstawione metody linearyzacji nie zmieniają rzeczywistych nieliniowych właściwości opisywanego urządzenia, a jedynie ułatwiają ich analizę.**

W praktyce przemysłowej wykorzystuje się również tzw. linearyzację układową, polegającą na zastosowaniu dodatkowych elementów, które w odpowiednim połączeniu z elementem nieliniowym tworzą układ o charakterystyce zbliżonej do liniowej. Przykład takiej linearyzacji przedstawiono na rys. 2.5.




Rys. 2.5. Interpretacja geometryczna linearyzacji układowej nieliniowego elementu NL1 metodą ujemnego sprzężenia zwrotnego: a) schemat układu, b) zależności między sygnałami

Przeprowadzone rozważania można rozszerzyć na funkcje wielu zmiennych. Na przykład, nieliniowej zależności $y = f(x_1, x_2)$ odpowiada równanie zlinearyzowane

$$\Delta y = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right]_0 \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right]_0 \Delta x_2 \tag{2.24}$$

Równanie to reprezentuje płaszczyznę styczną do powierzchni opisanej nieliniowym równaniem $y = f(x_1, x_2)$, przy czym punkt styczności odpowiada założonemu punktowi pracy.

Ogólnie nieliniowej zależności $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ odpowiada równanie zlinearyzowane:

$$\Delta y = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_0 \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_0 \Delta x_2 + ... + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]_0 \Delta x_n \tag{2.25}$$

W przypadku nieliniowej funkcji przedstawionej w postaci uwikłanej, np.

$$F(x_1, x_2, y) = 0$$

funkcja zlinearyzowana wokół punktu pracy o współrzędnych $x_{10}$, $x_{20}$, $y_0$, ma postać:

$$\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 \Delta y = 0 \tag{2.26}$$

**Przykład 2.2**

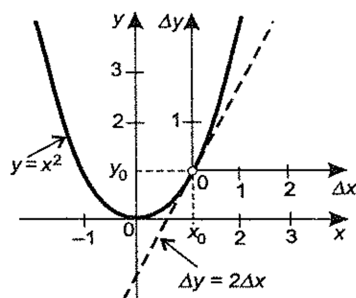
Przeprowadzić linearyzację funkcji $y = x^2$ w punkcie o współrzędnej $x_0 = 1$.

*Rozwiązanie*

Korzystając ze wzoru (2.23), otrzymuje się

$$\Delta y = \left[\frac{d}{dx}(x^2)\right]_0 \Delta x = [2x]_0 \Delta x = 2\Delta x$$

Linearyzowaną funkcję oraz wynik linearyzacji – funkcję $\Delta y = 2\Delta x$ (linia przerywana) przedstawiono na rys. 2.6.

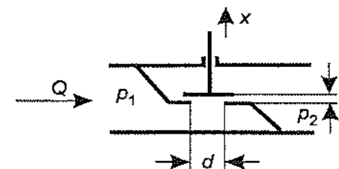



Rys. 2.6. Ilustracja przykładu 2.2



**Przykład 2.3**

Wyznaczyć zlinearyzowaną funkcję określającą zależność strumienia masy $Q$ cieczy przepływającej przez zawór od ciśnień $p_1$ i $p_2$ odpowiednio przed zaworem i za nim oraz od odległości $x$ grzybka od gniazda zaworu (rys. 2.7).




Rys. 2.7. Schemat ideowy zaworu do przykładu 2.3

*Rozwiązanie*

W praktyce do wyrażenia zależności $Q = f(x, p_1, p_2)$ wykorzystuje się wzór

$$Q = \alpha \pi d x \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}$$

w którym: $\alpha$ – współczynnik przepływu, $d$ – średnica gniazda zaworu, $\rho$ – gęstość cieczy, przy czym zakłada się, że $\alpha = \text{const}$, $\rho = \text{const}$.

Jest to zależność nieliniowa, która po linearyzacji przybiera postać

$$\Delta Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_0 \Delta x + \left[\frac{\partial Q}{\partial p_1}\right]_0 \Delta p_1 + \left[\frac{\partial Q}{\partial p_2}\right]_0 \Delta p_2$$

przy czym:

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_0 = \left[\alpha\pi d\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}\right]_0 = \alpha\pi d\sqrt{2\rho(p_{10} - p_{20})}$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial p_1}\right]_0 = \left[\alpha\pi d x\sqrt{\frac{\rho}{2(p_1 - p_2)}}\right]_0 = \alpha\pi d x_0\sqrt{\frac{\rho}{2(p_{10} - p_{20})}}$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial p_2}\right]_0 = \left[-\alpha\pi d x\sqrt{\frac{\rho}{2(p_1 - p_2)}}\right]_0 = -\alpha\pi d x_0\sqrt{\frac{\rho}{2(p_{10} - p_{20})}}$$

gdzie $x_0$, $p_{10}$, $p_{20}$ są współrzędnymi (parametrami) założonego punktu pracy. Wartości współczynników równania zlinearyzowanego zmieniają się w przypadku zmiany punktu pracy.

Metodę **linearyzacji dynamicznej** przedstawiono na przykładzie równania różniczkowego, będącego nieliniową zależnością między funkcjami $y(t)$ i $x(t)$ i ich pochodnymi:

$$F\left[y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), ..., y^{(n)}(t), x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), ..., x^{(m)}(t)\right] = 0 \tag{2.27}$$

W zastosowaniach praktycznych linearyzację dynamiczną przeprowadza się dla tzw. statycznych punktów pracy, tj. punktów, w których wszystkie pochodne w równaniu (2.27) przybierają wartość zero. Zbiór takich statycznych punktów pracy nazywa się **charakterystyką statyczną** opisywanego procesu. Zależność reprezentującą charakterystykę statyczną wyznacza się, przyrównując do zera wartości pochodnych w równaniu różniczkowym. Oznacza to, że występujące w linearyzowanym równaniu funkcje $y(t)$ i $x(t)$ przybierają wartości stałe, oznaczane jako $y$ i $x$. Charakterystyka statyczna procesu opisanego równaniem różniczkowym (2.26) jest równaniem algebraicznym

$$F_0(x, y) = 0 \tag{2.28}$$

gdzie $x$ i $y$ są współrzędnymi charakterystyki statycznej danego procesu.

Linearyzując równanie różniczkowe (2.27), zarówno funkcje $y(t)$ i $x(t)$ jak i ich pochodne traktuje się analogicznie jak zmienne funkcji uwikłanej. Zatem równanie zlinearyzowane ma postać

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_0 \Delta y + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right]_0 \Delta \dot{y} + \left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right]_0 \Delta \ddot{y} + ... + \left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right]_0 \Delta y^{(n)} + \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_0 \Delta x + \\ &+ \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_0 \Delta \dot{x} + \left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right]_0 \Delta \ddot{x} + ... + \left[\frac{\partial F}{\partial x^{(m)}}\right]_0 \Delta x^{(m)} = 0\end{aligned} \tag{2.29}$$

gdzie:

$$\Delta y = y(t) - y_0, \quad \Delta \dot{y} = \frac{d\Delta y}{dt}, \quad \Delta \ddot{y} = \frac{d^2 \Delta y}{dt^2}, \quad \Delta y^{(n)} = \frac{d^n \Delta y}{dt^n}, \quad \Delta x = x(t) - x_0,$$

$$\Delta \dot{x} = \frac{d\Delta x}{dt}, \quad \Delta \ddot{x} = \frac{d^2 \Delta x}{dt^2}, \quad \Delta x^{(m)} = \frac{d^m \Delta x}{dt^m}$$

Nieliniowe równanie różniczkowe (2.27) zostało w wyniku linearyzacji zastąpione równaniem różniczkowym liniowym (2.29) o stałych współczynnikach. Współczynnikami tymi są wartości odpowiednich pochodnych, wyznaczone w założonym punkcie pracy.



**Przykład 2.4**

Zlinearyzować równanie różniczkowe

$$y(t) - 2[x(t)]^2 - x(t)\,\dot{x}(t) - 2[\ddot{x}(t)]^2 = 0$$

w statycznym punkcie pracy o współrzędnej $x_0 = 1$ i wyznaczyć rzeczywistą i zlinearyzowaną charakterystykę statyczną.

*Rozwiązanie*

Zgodnie ze wzorem (2.29) równanie zlinearyzowane ma postać

$$\Delta y(t) + [-4x(t) - \dot{x}(t)]_0\, \Delta x(t) - [x(t)]_0\, \Delta \dot{x}(t) - [4\ddot{x}(t)]_0\, \Delta \ddot{x}(t) = 0$$

Ponieważ w statycznym punkcie pracy $\dot{x}(t) = 0$ i $\ddot{x}(t) = 0$, ostatecznie otrzymuje się równanie zlinearyzowane

$$\Delta y(t) - 4\Delta x(t) - \Delta \dot{x}(t) = 0$$

Przyrównując w danym nieliniowym równaniu różniczkowym pochodne do zera otrzymuje się rzeczywistą charakterystykę statyczną

$$y = 2x^2$$

Dla modelu zlinearyzowanego można także wyznaczyć charakterystykę statyczną, przyrównując pochodne do zera. W rozważanym przykładzie ma ona postać

$$\Delta y = 4\Delta x$$

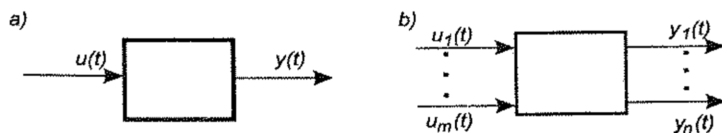
Łatwo zauważyć, że charakterystyka statyczna wyznaczona na podstawie modelu zlinearyzowanego reprezentuje linię prostą, styczną w punkcie pracy do charakterystyki statycznej wyznaczonej na podstawie modelu nieliniowego.

# 3. METODY MATEMATYCZNEGO OPISU WŁAŚCIWOŚCI LINIOWYCH ELEMENTÓW I UKŁADÓW AUTOMATYKI

W automatyce jako „właściwość" elementu lub układu rozumie się sposób jego działania, czyli reakcje jego wielkości wyjściowych (sygnałów wyjściowych) na zmiany wielkości wejściowych (sygnałów wejściowych). Wielkości wejściowe i wyjściowe elementu (układu) są wielkościami fizycznymi, których wartości można wyrazić liczbowo. Zatem związek wielkości wyjściowych od wejściowych danego elementu (układu), niezależnie od ich fizycznej postaci, można wyrazić zależnościami matematycznymi, które nazywane są modelami matematycznymi tego elementu (układu).

W rzeczywistości wszystkie procesy fizyczne są nieliniowe (nie podlegają prawu superpozycji). Odpowiadające im modele matematyczne są zależnościami nieliniowymi. W wielu praktycznych przypadkach jednakże, w rozpatrywanym zakresie zmian wielkości wejściowych i wyjściowych, wystarczająco dobrym modelem matematycznym może okazać się model liniowy, bardziej dogodny do analizy niż model nieliniowy. Elementy lub układy, których działanie z wystarczającą w danym zastosowaniu dokładnością opisuje model liniowy, nazywane są elementami (układami) liniowymi.

Przedstawione w tym rozdziale metody opisu właściwości odnoszą się do liniowych układów jednowymiarowych (rys. 3.1a), tzn. układów i elementów o jednym sygnale wejściowym i jednym sygnale wyjściowym. Są one modyfikowane na potrzeby opisu elementów (układów) wielowymiarowych.




Rys. 3.1. Schemat blokowy układu: a) jednowymiarowego, b) wielowymiarowego



## 3.1. RÓWNANIE DYNAMIKI

Podstawową formą matematycznego opisu właściwości elementów i układów automatyki o działaniu ciągłym jest tzw. **równanie dynamiki**, nazywane także **równaniem ruchu**. Wyraża ono zależność między sygnałem wyjściowym $y(t)$ elementu lub układu a wywołującym go sygnałem wejściowym $u(t)$. Równanie dynamiki elementu (układu) liniowego o działaniu ciągłym jest liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym o stałych współczynnikach:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \tag{3.1}$$

Zwykle interesuje nas zachowanie układu w okolicy określonego punktu równowagi (punktu pracy), w którym sygnały wejściowy $u(t)$ lub wyjściowy $y(t)$ mają niezerowe wartości, np. $u(0) = u_0$ i $y(0) = y_0$. W takich przypadkach równanie dynamiki formułuje się z wykorzystaniem zmiennych przyrostowych:

$$\Delta u(t) = u(t) - u_0, \qquad \Delta y(t) = y(t) - y_0$$

Równanie dynamiki sformułowane z wykorzystaniem zmiennych przyrostowych ma postać

$$a_n \frac{d^n \Delta y(t)}{dt^n} + \ldots + a_2 \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + a_0 \Delta y(t) = b_m \frac{d^m \Delta u(t)}{dt^m} + \ldots + b_2 \frac{d^2 \Delta u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\Delta u(t)}{dt} + b_0 \Delta u(t) \tag{3.1a}$$

Zmienne przyrostowe stosuje się także, jeżeli model liniowy został uzyskany w wyniku linearyzacji modelu nieliniowego. Jeżeli równanie w postaci (3.1a) uzyskano w wyniku linearyzacji równania nieliniowego, to jest ono słuszne tylko w otoczeniu przyjętego punktu pracy układu nieliniowego.

Elementy (układy), których równanie dynamiki zawiera pochodne, nazywane są **elementami (układami) dynamicznymi**; jeżeli nie zawiera pochodnych – **elementami (układami) statycznymi**.

Elementy (układy), których równanie dynamiki ma stałe współczynniki $a_i$ i $b_i$, nazywane są **elementami (układami) stacjonarnymi**; jeżeli współczynniki te są funkcjami czasu – nazywane są **elementami (układami) niestacjonarnymi**.

Rozwiązaniami równań dynamiki są funkcje $y(t)$ lub $\Delta y(t)$, które reprezentują reakcje układów na zmiany wielkości wejściowych, opisane funkcjami $u(t)$ lub $\Delta u(t)$, przy określonych warunkach początkowych.

W równaniach dynamiki opisujących układy rzeczywiste spełniony jest warunek $n \geq m$.

Zwykle równania ruchu przedstawia się w postaci znormalizowanej, przyjmując $a_0 = 1$.

## 3.2. TRANSMITANCJA OPERATOROWA

**Transmitancja operatorowa** $G(s)$ elementu (układu) jest to stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego elementu (układu) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego, wyznaczony przy zerowych warunkach początkowych:

$$\left.\begin{aligned} & G(s) = \frac{L[y(t)]}{L[u(t)]} = \frac{Y(s)}{U(s)} \\ & \text{przy:} \\ & y(0+) = \dot{y}(0+) = \ldots = y^{(n-1)}(0+) = 0 \\ & u(0+) = \dot{u}(0+) = \ldots = u^{(m-1)}(0+) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Poddając równanie dynamiki (3.1) przekształceniu Laplace'a z uwzględnieniem założonych zerowych warunków początkowych, otrzymuje się

$$Y(s)[a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0]$$

skąd po przekształceniu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{3.3}$$

W przypadku równania dynamiki w postaci (3.1a), transmitancję operatorową elementu (układu) definiuje się jako

$$\left.\begin{aligned} & G(s) = \frac{L[\Delta y(t)]}{L[\Delta u(t)]} = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} \\ & \text{przy:} \\ & \Delta y(0+) = \Delta\dot{y}(0+) = \ldots = \Delta y^{(n-1)}(0+) = 0 \\ & \Delta u(0+) = \Delta\dot{u}(0+) = \ldots = \Delta u^{(m-1)}(0+) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2a}$$



Na podstawie równania (3.1a) otrzymuje się

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{3.3a}$$

W większości przypadków transmitancja operatorowa jest ilorazem wielomianów licznika $L(s)$ i mianownika $M(s)$:

$$\left.\begin{aligned} & G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \\ & \text{gdzie:} \\ & L(s) = b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \\ & M(s) = a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Mianownik $M(s)$ transmitancji operatorowej elementu (układu) przyrównany do zera nazywa się **równaniem charakterystycznym** tego elementu (układu).

Postępując odwrotnie niż przy wyznaczaniu transmitancji operatorowej, na podstawie transmitancji operatorowej można odtworzyć równanie dynamiki. Transmitancja operatorowa i równanie dynamiki są więc równorzędnymi formami matematycznego opisu właściwości dynamicznych elementu (układu).

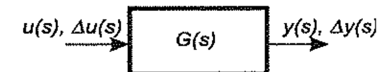
Przekształcając równanie (3.2) lub (3.2a), otrzymuje się odpowiednio

$$U(s)\,G(s) = Y(s) \tag{3.5}$$

lub

$$\Delta U(s)\,G(s) = \Delta Y(s) \tag{3.5a}$$

Równanie (3.5) albo (3.5a) wyraża matematyczny sens schematu blokowego elementu (układu) automatyki: iloczyn transformaty sygnału wejściowego $U(s)$ (albo transformaty $\Delta U(s)$) i transmitancji operatorowej elementu (układu) $G(s)$ (wpisanej wewnątrz bloku – rys. 3.2) jest transformatą sygnału wyjściowego $Y(s)$ (albo transformatą $\Delta Y(s)$), przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe. Zatem, schemat blokowy z podanymi transmitancjami poszczególnych członów można traktować jako formę matematycznego opisu właściwości dynamicznych układu.




Rys. 3.2. Schemat blokowy elementu (układu) automatyki

Zwykle na schematach blokowych strzałki opisywane są oznaczeniami sygnałów (a nie symbolami transformat sygnałów) – jak na rys. 3.1, co nie zmienia sensu schematu blokowego.

Poddając równanie (3.5) lub (3.5a) odwrotnemu przekształceniu Laplace'a, otrzymuje się odpowiednio funkcje $y(t)$ lub $\Delta y(t)$, będące rozwiązaniami równań dy-

namiki (3.1) lub (3.1a), reprezentujące reakcje układu na zmiany wielkości wejściowych, opisane funkcjami $u(t)$ lub $\Delta u(t)$, przy zerowych warunkach początkowych:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[U(s)\,G(s)] \\ \Delta y(t) &= L^{-1}[\Delta Y(s)] = L^{-1}[\Delta U(s)\,G(s)] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Transmitancja operatorowa umożliwia zatem wykorzystanie rachunku operatorowego do wyznaczania rozwiązań różniczkowych równań dynamiki przy zerowych warunkach początkowych. Obecnie znaczenie tej metody zmalało, ze względu na łatwość wyznaczania rozwiązań równań różniczkowych metodami numerycznymi.

**Przykład 3.1**

Układ fizyczny o sygnale wejściowym $U_1$ i sygnale wyjściowym $U_2$ opisany jest równaniem dynamiki:

$$3\frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = 4U_1(t)$$

Należy wyznaczyć transmitancję operatorową tego układu i przedstawić ten układ w postaci schematu blokowego.

*Rozwiązanie*

Poddając obie strony równania przekształceniu Laplace'a i zakładając zerowe warunki początkowe, otrzymuje się:

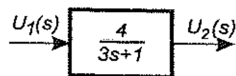
$$3sU_2(s) + U_2(s) = 4U_1(s)$$

$$U_2(s)(3s+1) = 4U_1(s)$$

skąd

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{4}{3s+1}$$

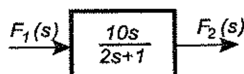
Schemat blokowy układu przedstawiono na rys. 3.3.




Rys. 3.3. Schemat blokowy do przykładu 3.1

**Przykład 3.2**

Dany jest schemat blokowy elementu automatyki przedstawiony na rys. 3.4. Wyznaczyć równanie dynamiki tego elementu.




Rys. 3.4. Schemat blokowy do przykładu 3.2



*Rozwiązanie*

Transmitancja operatorowa elementu ma postać

$$G(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)} = \frac{10s}{2s+1}$$

Przekształcając, otrzymuje się:

$$(2s+1)F_2(s) = 10sF_1(s)$$

$$2sF_2(s) + F_2(s) = 10sF_1(s)$$

Aby odtworzyć równanie dynamiki elementu, należy poszczególne wyrazy tej zależności poddać odwrotnemu przekształceniu Laplace'a, w celu znalezienia ich oryginałów.

Ponieważ transmitancja operatorowa wyznaczana jest przy zerowych warunkach początkowych, więc:

$$L^{-1}[2sF_2(s)] = 2\frac{dF_2(t)}{dt}$$

$$L^{-1}[F_2(s)] = F_2(t)$$

$$L^{-1}[10sF_1(s)] = 10\frac{dF_1}{dt}$$

Zatem równanie dynamiki elementu ma postać

$$2\frac{dF_2(t)}{dt} + F_2(t) = 10\frac{dF_1(t)}{dt}$$

## 3.3. CHARAKTERYSTYKA STATYCZNA I CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE

### 3.3.1. CHARAKTERYSTYKA STATYCZNA

**Charakterystyką statyczną** elementu (układu) nazywana jest zależność wartości jego sygnałów wyjściowych od wartości sygnałów wejściowych w stanach ustalonych, tj. stanach, w których wartości sygnałów wejściowych i wyjściowych nie zmieniają się w czasie. Charakterystykę statyczną elementu (układu) można

wyznaczyć na podstawie jego równania dynamiki, przyrównując do zera wszystkie pochodne występujące w tym równaniu. Zatem charakterystyka statyczna jest zależnością algebraiczną. W przypadku elementu (układu) o sygnale wejściowym $u(t)$ i wyjściowym $y(t)$, charakterystykę statyczną wyraża zależność

$$F(u,y)=0 \tag{3.7}$$

będąca związkiem nie sygnałów $y(t)$ i $u(t)$, lecz wartości $u$ i $y$ tych sygnałów w stanach równowagi.

Charakterystyka (3.7), wyznaczona na podstawie nieliniowego równania dynamiki, może być zależnością liniową albo nieliniową.

Charakterystyka statyczna układów liniowych, opisanych równaniami dynamiki (3.1) albo (3.1a), ma postać odpowiednio:

$$y=\frac{b_0}{a_0}u \tag{3.8}$$

$$\Delta y=\frac{b_0}{a_0}\Delta u \tag{3.8a}$$

Są to równania linii prostej.

Jeśli równanie (3.1a) otrzymano w wyniku linearyzacji nieliniowego równania dynamiki i rzeczywista charakterystyka statyczna, wyznaczona z nieliniowego równania ruchu przez założenie zerowych wartości pochodnych, jest nieliniowa, to charakterystyka w postaci (3.8a) jest przybliżeniem rzeczywistej charakterystyki statycznej – pokrywa się z rzeczywistą charakterystyką statyczną tylko w punkcie równowagi (punkcie pracy), względem którego przeprowadzono linearyzację. Będzie to styczna do krzywej odpowiadającej rzeczywistej charakterystyce statycznej, w przyjętym punkcie pracy. Taką charakterystyką statyczną można się posługiwać jedynie w okolicy założonego punktu pracy.

Przedmiotem dalszych rozważań są głównie układy stabilne asymptotycznie (rozdz. 9). Ich charakterystyczną cechą jest to, że po wprowadzeniu wymuszenia $u(t)=u\cdot 1(t)$, sygnał wyjściowy, po zaniku procesów przejściowych, osiąga wartość stałą (różną od nieskończoności) – układ osiąga stan ustalony.

W przypadku układów stabilnych asymptotycznie charakterystykę statyczną można także wyznaczyć na podstawie transmitancji operatorowej, wykorzystując twierdzenie (2.13) o wartości końcowej. Wartość ustaloną wielkości wyjściowej, w przypadku stałej wartości wymuszenia $u(t)=u\cdot 1(t)$, można wyrazić jako

$$y=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}s\,Y(s)=\lim_{s\to 0}s\,G(s)\,U(s)$$



Jeżeli $u(t)=u\cdot 1(t)$, to $U(s)=\frac{1}{s}u$. Zatem równanie charakterystyki statycznej można wyrazić w postaci

$$y=u\lim_{s\to 0}G(s) \tag{3.9}$$

Analogicznie dla zmiennych przyrostowych:

$$\Delta y=\Delta u\lim_{s\to 0}G(s) \tag{3.9a}$$

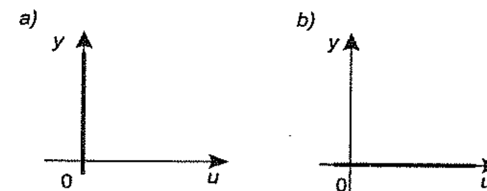
Szczególny rodzaj charakterystyki statycznej związany jest z elementami (układami), które realizują całkowanie sygnału wejściowego. Na przykład w przypadku elementu o równaniu dynamiki

$$T\frac{dy(t)}{dt}=u(t)$$

przyrównując pochodną do zera, otrzymuje się charakterystykę statyczną w postaci

$$u=0$$

Graficzną reprezentacją tego równania w układzie współrzędnych $u,y$ jest linia pokrywająca się z osią $y$ (rys. 3.5a). Jest oczywiste, że element realizujący całkowanie sygnału wejściowego może osiągać stan ustalony tylko przy zerowej wartości sygnału wejściowego i przy dowolnej (wcześniej osiągniętej) wartości sygnału wyjściowego.




Rys. 3.5. Szczególne postacie charakterystyki statycznej: a) elementu realizującego całkowanie sygnału wejściowego, b) elementu realizującego różniczkowanie sygnału wejściowego

Innym szczególnym rodzajem charakterystyki statycznej jest charakterystyka elementów (układów), które realizują różniczkowanie sygnału wejściowego. Na przykład w przypadku elementu o równaniu dynamiki

$$y(t)=T\frac{du(t)}{dt}$$

przyrównując pochodną do zera, otrzymuje się charakterystykę statyczną w postaci

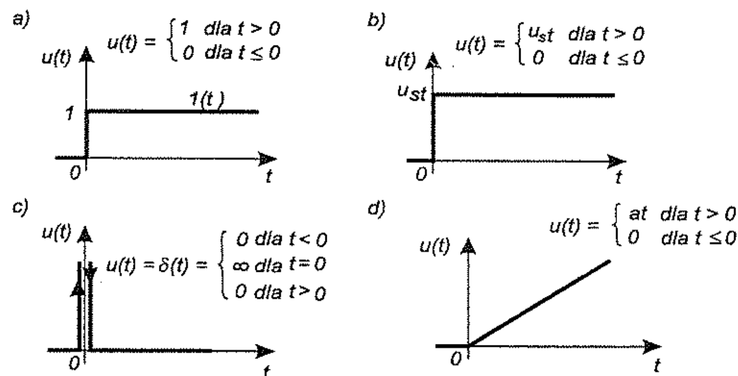
$$y=0$$

Graficzną reprezentacją tego równania w układzie współrzędnych $u,y$ jest linia pokrywająca się z osią $u$ (rys. 3.5b). Jest oczywiste, że element realizujący różniczkowanie sygnału wejściowego, po ustaleniu się sygnału wejściowego, generuje zerową wartość sygnału wyjściowego.

### 3.3.2. CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE

Zarówno równanie dynamiki, jak i transmitancja operatorowa jednoznacznie określają dynamiczne właściwości elementu (układu) – umożliwiają wyznaczenie przebiegu sygnału wyjściowego jako wyniku oddziaływania sygnału wejściowego o dowolnym przebiegu przy zerowych warunkach początkowych. Jednakże bezpośrednio na podstawie równania ruchu ani na podstawie transmitancji operatorowej nie można sobie wyobrazić i ocenić zachowania się danego elementu (układu). Do oceny, porównania i badania dynamicznych właściwości elementów (układów) wykorzystuje się przebiegi sygnałów wyjściowych uzyskane w wyniku oddziaływania na element (układ) typowych sygnałów wejściowych (mówi się także – typowych wymuszeń). Takie przebiegi sygnałów wyjściowych nazywają się odpowiedziami elementu (układu) na określony sygnał wejściowy lub ogólnie – charakterystykami dynamicznymi danego elementu (układu). Jako typowe wymuszenia najczęściej wykorzystywane są:

- sygnał w kształcie skoku jednostkowego – w kształcie funkcji Heaviside'a; wymuszenie jednostkowe (rys. 3.6a);
- sygnał skokowy (niejednostkowy); wymuszenie skokowe (rys. 3.6b);
- sygnał w kształcie impulsu Diraca; wymuszenie impulsowe (rys. 3.6c);
- sygnał liniowo narastający; wymuszenie liniowo narastające (rys. 3.6d).




Rys. 3.6. Typowe wymuszenia stosowane do analizy właściwości dynamicznych elementów (układów) automatyki: a) wymuszenie jednostkowe, b) wymuszenie skokowe, c) wymuszenie impulsowe, d) wymuszenie liniowo narastające



Charakterystyki dynamiczne można wyznaczać eksperymentalnie lub analitycznie, np. na podstawie transmitancji operatorowej, wykonując odwrotne przekształcenie transformaty sygnału wyjściowego elementu (układu), określonej zależnością (3.6):

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[U(s)\,G(s)] \tag{3.10}$$

**Odpowiedź (charakterystyka) jednostkowa** elementu (układu) jest to przebieg jego wielkości wyjściowej $y(t)$, uzyskany pod wpływem zmian wielkości wejściowej w kształcie skoku jednostkowego – $u(t) = 1(t)$, przy założeniu zerowych warunków początkowych.

Podstawiając do wzoru (3.10) transformatę sygnału wejściowego $U(s) = \frac{1}{s}$, otrzymuje się

$$y(t)\big|_{u(t)=1(t)} = L^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right] \tag{3.11}$$

**Odpowiedź (charakterystyka) skokowa** elementu (układu) jest to przebieg jego wielkości wyjściowej $y(t)$, uzyskany pod wpływem zmian wielkości wejściowej w kształcie skoku o zadanej amplitudzie – $u(t) = u_{st}\cdot 1(t)$, przy założeniu zerowych warunków początkowych.

Podstawiając do wzoru (3.10) transformatę sygnału wejściowego $U(s) = u_{st}\frac{1}{s}$, otrzymuje się

$$y(t)\big|_{u(t)=u_{st}\cdot 1(t)} = L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}G(s)\right] = u_{st}\,L^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right] \tag{3.12}$$

**Odpowiedź (charakterystyka) impulsowa** elementu (układu) jest to przebieg jego wielkości wyjściowej $y(t)$, uzyskany pod wpływem zmian wielkości wejściowej w kształcie impulsu Diraca – $u(t) = \delta(t)$, przy założeniu zerowych warunków początkowych.

Podstawiając do wzoru (3.10) transformatę sygnału wejściowego $U(s) = 1$, otrzymuje się

$$y(t)\big|_{u(t)=\delta(t)} = L^{-1}[1\cdot G(s)] = L^{-1}[G(s)] \tag{3.13}$$

Odpowiedź impulsowa oznaczana jest także symbolem $g(t)$, gdyż jest oryginałem transmitancji $G(s)$.

**Odpowiedź** elementu (układu) **na sygnał liniowo narastający** jest to przebieg jego wielkości wyjściowej $y(t)$, uzyskany pod wpływem liniowo narastającej w czasie wartości wielkości wejściowej – $u(t) = at$, gdzie $a$ jest współczynnikiem proporcjonalności, przy założeniu zerowych warunków początkowych.

Podstawiając do wzoru (3.10) transformatę sygnału wejściowego $U(s)=\frac{a}{s^2}$, otrzymuje się

$$y(t)\big|_{u(t)=at} = L^{-1}\left[\frac{a}{s^2}G(s)\right] = a\,L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^2}\right] \tag{3.14}$$

Wymienione charakterystyki, równanie dynamiki i transmitancja operatorowa są różnymi, ale wzajemnie równoważnymi formami przedstawienia właściwości dynamicznych danego elementu (układu).

## 3.4. CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE. TRANSMITANCJA WIDMOWA

Opisane w rozdz. 3.3.2 charakterystyki dynamiczne przedstawiają reakcję elementu (układu) będącego w stanie ustalonym na pojawiającą się w pewnym momencie, oznaczanym jako $t=0$, zmianę wielkości wejściowej. Są więc one wyznaczane dla czasu $t \geq 0$. Natomiast tzw. charakterystyki częstotliwościowe przedstawiają zachowanie elementu (układu) pod wpływem ustalonych, a więc teoretycznie trwających od $t=-\infty$, sinusoidalnych oscylacji wielkości wejściowej.

Jeżeli na wejście liniowego elementu (układu) zostanie wprowadzony sygnał sinusoidalny o stałej amplitudzie $A_1$ i pulsacji $\omega$, a więc jeżeli $u(t)=A_1\sin\omega t$ (rys. 3.7), to po ustaniu procesów przejściowych, na wyjściu elementu (układu) uformuje się także sygnał sinusoidalny o takiej samej pulsacji, o amplitudzie $A_2$, zwykle przesunięty w fazie względem sygnału wejściowego. Amplituda $A_2$ i przesunięcie fazowe zależą od właściwości danego elementu (układu) oraz od pulsacji $\omega$ sygnału wejściowego. Jeżeli faza sygnału wyjściowego opóźnia się w stosunku do fazy sygnału wejściowego, mówi się, że element wprowadza ujemne przesunięcie fazowe (rys. 3.7b); jeżeli wyprzedza – że powoduje dodatnie przesunięcie fazowe (rys. 3.7c).

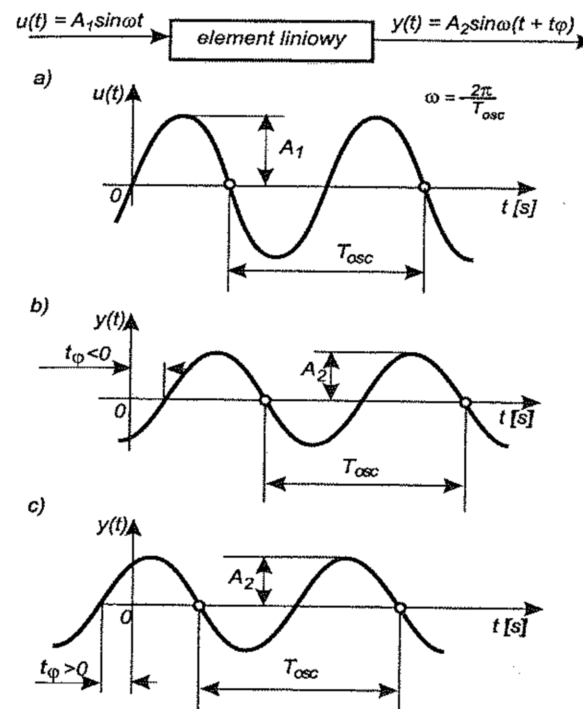
Przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego można wyrazić jako przesunięcie o czas $t_\varphi$ i wtedy sygnał wyjściowy wyraża funkcja

$$y(t)=A_2\sin[\omega(t+t_\varphi)] \tag{3.15}$$

lub jako przesunięcie kątowe $\varphi$ i wtedy

$$y(t)=A_2\sin(\omega t+\varphi) \tag{3.16}$$






Rys. 3.7. Sinusoidalne sygnały elementu liniowego w funkcji czasu: a) sygnał wejściowy, b) sygnał wyjściowy elementu opóźniającego fazę sygnału wejściowego o czas $t_\varphi$ ($t_\varphi<0$ – ujemne przesunięcie fazowe), c) sygnał wyjściowy elementu wyprzedzającego fazę sygnału wejściowego o czas $t_\varphi$ ($t_\varphi>0$ – dodatnie przesunięcie fazowe)

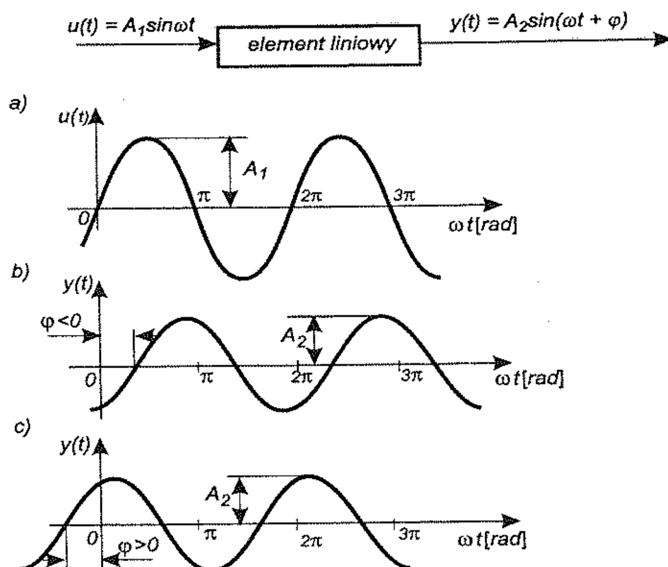
Jak wspomniano, w zależności od właściwości elementu (układu) i pulsacji $\omega$ sygnału wejściowego, wielkości $t_\varphi$ i $\varphi$ mogą przybierać wartości ujemne (ujemne przesunięcie fazowe), zerowe lub dodatnie (dodatnie przesunięcie fazowe). Należy zauważyć, że przesunięcie fazy sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego o kąt $\varphi$ odpowiada przesunięciu tych sygnałów o $\varphi/\omega$ jednostek czasu, a więc

$$t_\varphi=\frac{\varphi}{\omega} \tag{3.17}$$

Można więc zapisać

$$y(t)=A_2(\omega)\sin\{\omega[t+t_\varphi(\omega)]\}=A_2(\omega)\sin\left\{\omega\left[t+\frac{\varphi(\omega)}{\omega}\right]\right\}= \\ =A_2(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)] \tag{3.18}$$

Wygodniej jest przedstawiać sygnały sinusoidalne w funkcji kąta fazowego $\omega t$ (rys. 3.8).




Rys. 3.8. Sinusoidalne sygnały elementu liniowego w funkcji kąta fazowego $\omega t$: a) sygnał wejściowy, b) sygnał wyjściowy elementu opóźniającego fazę sygnału wejściowego o kąt $\varphi$ ($\varphi < 0$ – ujemne przesunięcie fazowe), c) sygnał wyjściowy elementu wyprzedzającego fazę sygnału wejściowego o kąt $\varphi$ ($\varphi > 0$ – dodatnie przesunięcie fazowe)

Do opisu zachowania się elementów lub układów pod wpływem sygnałów sinusoidalnie zmiennych wykorzystuje się tzw. transmitancję widmową $G(j\omega)$. Pojęcie transmitancji widmowej związane jest z przekształceniem Fouriera, które funkcji czasu $f(t)$ przyporządkowuje transformatę $F(j\omega)$ zgodnie z zależnością

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{3.19}$$

zwaną całką Fouriera.

Transmitancja widmowa jest to stosunek transformaty Fouriera sygnału wyjściowego do transformaty Fouriera sygnału wejściowego:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \tag{3.20}$$



Między transmitancją widmową a operatorową istnieje formalny związek

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega} \tag{3.21}$$

wynikający ze związku między transformatami Laplace'a i Fouriera.

Zbadajmy, co reprezentuje transmitancja widmowa elementu (układu) w przypadku sinusoidalnych sygnałów wejściowych. Jeżeli $u(t) = A_1 \sin\omega t$, to

$$L[u(t)] = U(s) = A_1 L[\sin\omega t] \tag{3.22}$$

Zgodnie z wcześniejszymi stwierdzeniami, sygnał wyjściowy elementu (układu), po ustaniu procesów przejściowych, przybiera postać

$$y(t) = A_2(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

a jego transformata Laplace'a

$$L[y(t)] = Y(s) = A_2(\omega)\, L\{\sin[\omega t + \varphi(\omega)]\}$$

Funkcja $\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ jest odwzorowaniem funkcji $\sin\omega t$ z przesunięciem względem niej o czas $t_\varphi = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$. Zgodnie z twierdzeniem (2.11) o przesunięciu w dziedzinie zmiennej rzeczywistej, można napisać, że

$$L\{\sin[\omega t + \varphi(\omega)]\} = L\left\{\sin\omega\left[t + \frac{\varphi(\omega)}{\omega}\right]\right\} = e^{\frac{\varphi(\omega)}{\omega}s}\, L[\sin\omega t]$$

a więc

$$Y(s) = A_2(\omega)\, e^{\frac{\varphi(\omega)}{\omega}s}\, L[\sin\omega t] \tag{3.23}$$

Wykorzystując wyrażenia (3.22) i (3.23), można transmitancję operatorową elementu zapisać w postaci:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A_2(\omega)}{A_1}\, e^{\frac{\varphi(\omega)}{\omega}s} \tag{3.24}$$

Uwzględniając związek (3.21), z równania (3.24) otrzymuje się wykładniczą postać transmitancji widmowej, z której wynika fizyczny sens tej transmitancji:

$$G(j\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1}\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{3.25}$$

Transmitancja widmowa jest liczbą zespoloną, której moduł $M(\omega)$ wyraża stosunek amplitudy sinusoidalnego sygnału wyjściowego do amplitudy sinusoidalnego sygnału wejściowego w funkcji pulsacji, w stanie ustalonych oscylacji

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1} \tag{3.26}$$

a argument – przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem wejściowego w funkcji pulsacji, w stanie ustalonych oscylacji

$$\arg G(j\omega) = \varphi(\omega) \tag{3.27}$$

Transmitancję widmową jako liczbę zespoloną można także przedstawić jako sumę części rzeczywistej $P(\omega)$ i urojonej $Q(\omega)$:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{3.28}$$

Moduł i argument lub część rzeczywista i urojona transmitancji widmowej danego elementu (układu) są funkcjami pulsacji $\omega$ sygnału wejściowego. Graficzne reprezentacje transmitancji widmowej dla zakresu pulsacji od 0 do $\infty$ nazywają się charakterystykami częstotliwościowymi. Wykorzystywanymi w praktyce postaciami tych charakterystyk są:

- charakterystyka amplitudowo-fazowa (wykres Nyquista),
- logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i logarytmiczna charakterystyka fazowa (wykres Bode'a),
- logarytmiczna charakterystyka amplitudowo-fazowa (wykres Blacka).

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa** jest to krzywa wykreślona na płaszczyźnie zmiennej zespolonej o współrzędnych $P(\omega)$ i $jQ(\omega)$, która jest miejscem geometrycznym końca wektora transmitancji widmowej $G(j\omega)$ przy zmianach pulsacji od 0 do $\infty$. Przykładową charakterystykę amplitudowo-fazową przedstawiono na rys. 3.9. Na podstawie tego rysunku można napisać zależności między modułem, argumentem, częścią rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

$$M(\omega) = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} \tag{3.29}$$

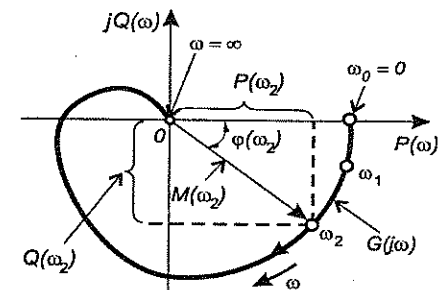
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \tag{3.30}$$

$$P(\omega) = M(\omega)\cos\varphi(\omega) \tag{3.31}$$

$$Q(\omega) = M(\omega)\sin\varphi(\omega) \tag{3.32}$$

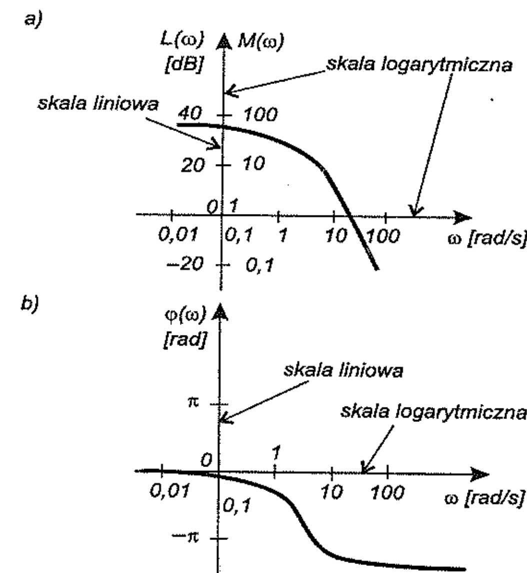


Długość wektora $G(j\omega)$, łączącego początek układu współrzędnych z punktem na charakterystyce, np. w przypadku pulsacji $\omega_2$, przedstawia moduł tego wektora w odniesieniu do tej pulsacji – stosunek amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego. Kąt miedzy dodatnią osią rzeczywistych i wektorem jest równy kątowi przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego. Na rysunku 3.9 kąt $\varphi(\omega_2)$ reprezentuje ujemne przesunięcie fazowe.




Rys. 3.9. Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej (wykres Nyquista) elementu (układu) opóźniającego fazę

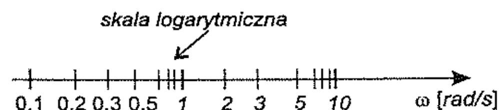
Przydatną do analizy właściwości elementu (układu) automatyki formą graficznej prezentacji transmitancji widmowej jest także zespół charakterystyk częstotliwościowych: **logarytmiczna charakterystyka amplitudowa** i **logarytmiczna charakterystyka fazowa** (rys. 3.10).




Rys. 3.10. Przykładowe charakterystyki logarytmiczne: a) amplitudowa, b) fazowa

Wykorzystywane są dwie formy logarytmicznej charakterystyki amplitudowej (rys. 3.10a). Jedna z nich jest graficznym obrazem zależności $M(\omega) = f(\omega)$, przedstawionym w układzie współrzędnych, w którym na osiach podane są war-

tości $M(\omega)$ i $\omega$ w skali logarytmicznej. Fragment skali logarytmicznej na osi odciętych, obejmujący dwie dekady, pokazano na rys. 3.11.

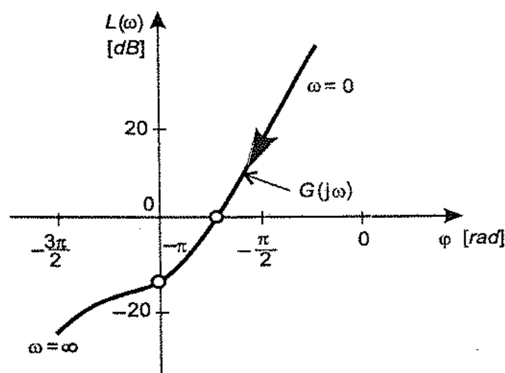



Rys. 3.11. Fragment skali logarytmicznej obejmujący dwie dekady

Druga forma logarytmicznej charakterystyki amplitudowej jest graficznym obrazem zależności $20 \log M(\omega) = f(\omega)$, przedstawionym w układzie współrzędnych, w którym na osi rzędnych jest naniesiona liniowa skala wielkości $L(\omega) = 20 \log M(\omega)$, zwanej modułem logarytmicznym; jednostką tej wielkości jest decybel (dB). Na osi odciętych tej charakterystyki podane są wartości pulsacji $\omega$ w skali logarytmicznej. Logarytmiczna charakterystyka fazowa (rys. 3.10b) jest graficznym obrazem zależności $\varphi(\omega) = f(\omega)$, przedstawionym w układzie współrzędnych, w którym na osi rzędnych są podane wartości przesunięcia fazowego w stopniach lub radianach w skali liniowej, na osi odciętych – wartości pulsacji $\omega$ w skali logarytmicznej. Logarytmiczną charakterystykę fazową zwykle umieszcza się pod charakterystyką amplitudową, co ułatwia odczytywanie wartości modułu i przesunięcia fazowego odpowiadających danej pulsacji.

Praktyczne znaczenie charakterystyk logarytmicznych wynika z łatwości ich wyznaczania metodami graficznymi.

W praktyce wykorzystywane jest także graficzne odwzorowanie transmitancji widmowej w układzie tzw. współrzędnych Blacka (rys. 3.12), w którym na osi odciętych znajduje się liniowa skala wartości przesunięcia fazowego $\varphi$ w stopniach lub radianach, a na osi rzędnych liniowa skala wartości modułu logarytmicznego




Rys. 3.12. Przykład logarytmicznej charakterystyki amplitudowo-fazowej (wykres Blacka)

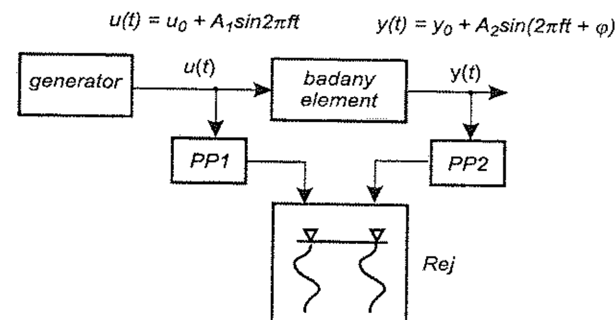


$L(\omega)$ w decybelach, przy czym oś rzędnych przecina oś odciętych nie przy wartości 0 radianów, lecz przy wartości $-\pi$ radianów. Takie odwzorowanie transmitancji widmowej nazywa się **logarytmiczną charakterystyką amplitudowo-fazową** lub **wykresem Blacka**. Ułatwia ono badanie zapasów stabilności układów (rozdz. 9).

## 3.5. DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH

Charakterystyki częstotliwościowe można wyznaczać analitycznie zarówno dla elementów (układów) stabilnych jak i niestabilnych na podstawie transmitancji operatorowej, wykorzystując zależność (3.21), a jeżeli nie jest znana transmitancja operatorowa elementu (układu), to charakterystyki częstotliwościowe można wyznaczać doświadczalnie, ale jedynie dla elementów (układów) stabilnych.

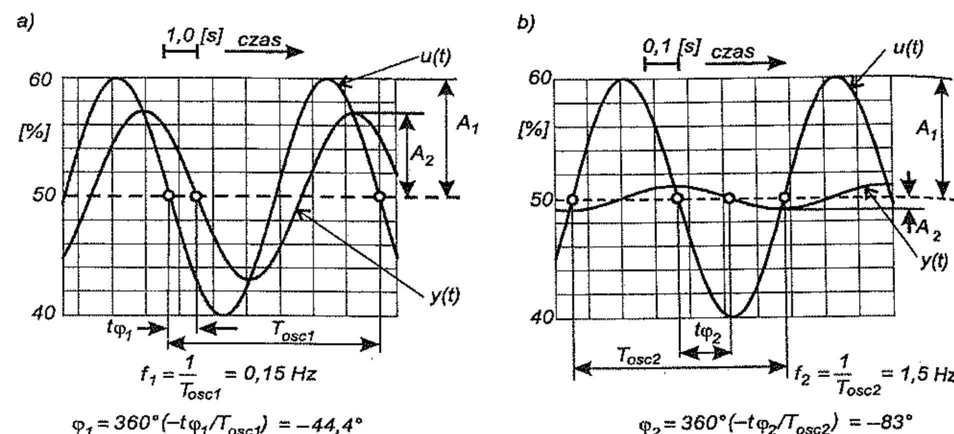
Schemat układu pomiarowego do eksperymentalnego wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych jest przedstawiony na rys. 3.13. Przetworniki PP1 i PP2 służą do przetwarzania sygnału wymuszenia $u(t)$ i sygnału odpowiedzi $y(t)$ badanego elementu na sygnały dostosowane do rodzaju użytego urządzenia rejestrującego (rejestrator, drukarka, oscyloskop, komputer).




Rys. 3.13. Schemat układu pomiarowego do doświadczalnego wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych; PP1, PP2 – przetworniki pomiarowe, Rej – rejestrator dwukanałowy, $u_0$, $y_0$ – składowe stałe sygnałów sinusoidalnych, $f$ – nastawiana częstotliwość sygnału generatora w hercach

Metodą doświadczalną można wyznaczać charakterystyki częstotliwościowe jedynie w zakresie fizycznie realizowanych wartości pulsacji sygnału wejściowego. W praktyce pomiary wykonuje się dla kilku, kilkunastu wybranych częstotliwości, obejmujących zakres pracy badanego elementu (układu). Istotną sprawą jest zapewnienie niezbędnej dokładności realizowanych pomiarów dynamicznych.

Przykładowe przebiegi zarejestrowane na taśmie rejestratora elektrycznego dla częstotliwości: $f_1 = 0{,}15$ Hz i $f_2 = 1{,}5$ Hz oraz sposób obróbki danych pomiarowych przedstawiono na rys. 3.14.




Rys. 3.14. Przykładowe zarejestrowane sinusoidalne przebiegi sygnału wejściowego i wyjściowego badanego układu: a) dla częstotliwości 0,15 Hz, b) dla częstotliwości 1,5 Hz

Sygnały wejściowy i wyjściowy na rys. 3.14 to sygnały standardowe z zakresu 4÷20 mA. Pozwoliło to zastosować standardowy rejestrator dwukanałowy z nastawianym posuwem taśmy w zakresie 36÷360 cm/min i liniową skalą procentową, co oznacza, że rejestrowanej wartości 50% odpowiada sygnał 12 mA. Zastosowany generator RC przebiegów wolnozmiennych umożliwiał nastawianie częstotliwości w zakresie 0,001÷100 Hz.

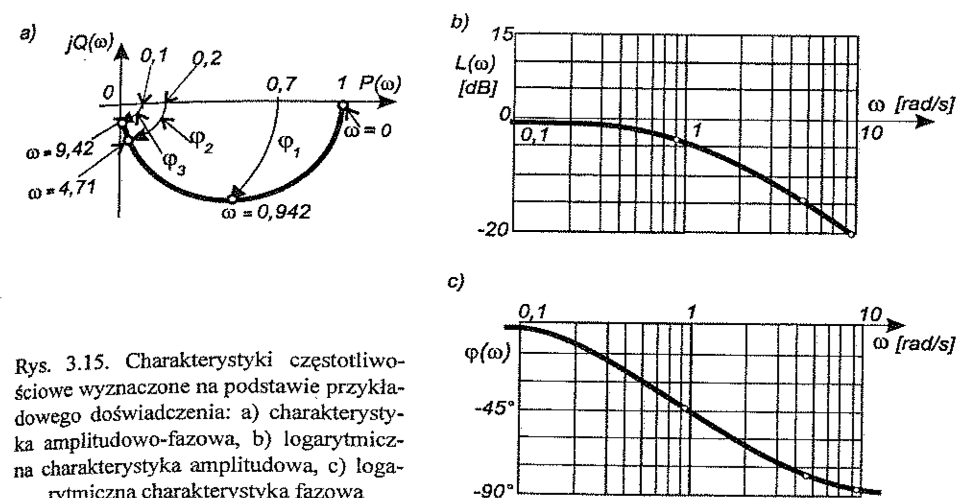
W tablicy 3.1 zestawiono wyniki pomiarów i dodatkowych przeliczeń wyników przykładowego doświadczenia, na podstawie których wyznaczono charakterystyki częstotliwościowe (rys. 3.15).

Tablica 3.1

**Wyniki pomiarów**

| $f$ [Hz] | $\omega$ [rad/s] | $A_1$ [%] | $A_2(\omega)$ [%] | $M(\omega)$ | $\varphi(\omega)$ [°] | $L(\omega)$ [dB] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 10 | 10 | 1 | 0 | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 0,15 | 0,942 | 10 | 7,1 | 0,71 | –44,4 | –2,97 |
| 0,75 | 4,71 | 10 | 2 | 0,2 | –80 | –14 |
| 1,5 | 9,42 | 10 | 1 | 0,1 | –83 | –20 |



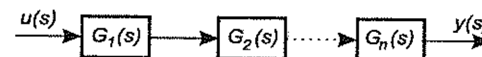



Rys. 3.15. Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone na podstawie przykładowego doświadczenia: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, c) logarytmiczna charakterystyka fazowa

## 3.6. CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE SZEREGOWEGO POŁĄCZENIA ELEMENTÓW

Transmitancja operatorowa $G(s)$ szeregowego połączenia elementów (rys. 3.16) o transmitancjach $G_1(s)$, $G_2(s), \ldots, G_n(s)$ jest iloczynem transmitancji elementów składowych:

$$G(s) = G_1(s)\, G_2(s) \cdots G_n(s)$$




Rys. 3.16. Schemat blokowy szeregowego połączenia elementów

Transmitancja widmowa takiego połączenia jest zatem iloczynem transmitancji widmowych elementów składowych:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = M(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = G_1(j\omega)\, G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega) \tag{3.33}$$

Jeżeli znane są charakterystyki częstotliwościowe poszczególnych elementów

$$G_1(j\omega) = M_1(\omega)\, e^{j\varphi_1(\omega)}$$
$$G_2(j\omega) = M_2(\omega)\, e^{j\varphi_2(\omega)} \qquad (3.34)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_n(j\omega) = M_n(\omega)\, e^{j\varphi_n(\omega)}$$

to

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = M_1(\omega)\, M_2(\omega) \ldots M_n(\omega) \qquad (3.35)$$

oraz

$$\arg G(j\omega) = \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \ldots + \varphi_n(\omega) \qquad (3.36)$$

Logarytmiczny moduł połączenia szeregowego jest sumą modułów logarytmicznych elementów składowych:

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \ldots + L_n(\omega) \qquad (3.37)$$

gdzie:

$$L_1(\omega) = 20\lg M_1(\omega)$$
$$L_2(\omega) = 20\lg M_2(\omega)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n(\omega) = 20\lg M_n(\omega)$$

Ze wzorów (3.36) i (3.37) wynika, że zarówno logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, jak i logarytmiczna charakterystyka fazowa połączenia szeregowego jest sumą odpowiednich charakterystyk elementów składowych.



# 4. SCHEMATY BLOKOWE. ALGEBRA SCHEMATÓW BLOKOWYCH

W każdym złożonym układzie automatyki można wyodrębnić współpracujące ze sobą elementy prostsze, których właściwości są znane i sformułowane np. w postaci transmitancji operatorowej. Użyteczną i przejrzystą formą przedstawiania takich złożonych układów i analizy ich właściwości jest schemat blokowy. Każdy element składowy układu złożonego występuje w schemacie blokowym w postaci pojedynczego „bloku" – prostokąta ze strzałkami reprezentującymi jego sygnał wejściowy i wyjściowy, wewnątrz którego jest wpisana jego transmitancja operatorowa (patrz rys. 3.2). Sygnały wyjściowe jednych elementów są sygnałami wejściowymi innych. Sieć połączeń między elementami schematu blokowego przedstawia istniejący w układzie obieg oddziaływań (obieg informacji). Do przedstawienia tego układu oddziaływań wykorzystuje się dodatkowe symbole, tzw. węzły informacyjne (zaczepowe) i węzły sumacyjne.

Jeżeli dany sygnał jednocześnie oddziałuje na dwa elementy, to na schemacie jego rozgałęzienie oznaczane jest w postaci dużej kropki – jest to węzeł informacyjny. Węzeł informacyjny przedstawia rozgałęzienie informacji.

W postaci węzła sumacyjnego (kółko) przedstawiane jest oddziaływanie na dany element dwóch lub więcej sygnałów, przy czym może ono być sumą albo różnicą oddziaływań składowych. Dlatego strzałki reprezentujące dochodzące do węzła sygnały są opatrzone odpowiednimi znakami.

Schemat blokowy zarówno pojedynczego elementu, jak i układu złożonego jest formą matematycznego opisu jego działania – jednoznacznie wyraża zależność sygnałów wyjściowych od sygnałów wejściowych, jeżeli znane są opisy właściwości (transmitancje) elementów składowych. Może on być poddawany przekształceniom z zastosowaniem odpowiednich działań, niezniekształcających jego matematycznego sensu. Zestaw takich działań zawiera tabl. 4.1. Zależności sygnałów wyjściowych od sygnałów wejściowych w schematach przekształconych są takie same, jak w odpowiadających im schematach pierwotnych.

Tablica 4.1

**Zasady przekształcania schematów blokowych**

| Schemat pierwotny | Schemat przekształcony |
|---|---|
| Przenoszenie węzła sumacyjnego sprzed bloku za blok | |
| | |
| Przenoszenie węzła sumacyjnego zza bloku przed blok | |
| | |
| Przenoszenie węzła informacyjnego sprzed bloku za blok | |
| | |
| Przenoszenie węzła informacyjnego zza bloku przed blok | |
| | |
| Rozdzielanie węzła sumacyjnego wielowejściowego | |
| | |
| Zmiana kolejności węzłów sumacyjnych | |
| | |
| Zmiana kolejności węzłów informacyjnych | |
| | |



Stosując odpowiednie przekształcenia, można każdy pierwotny schemat blokowy doprowadzić do postaci, w której występują jedynie cztery rodzaje połączeń elementów (tabl. 4.2), zwane połączeniami elementarnymi. Są to:

- połączenie szeregowe (łańcuchowe),
- połączenie równoległe,
- ujemne sprzężenie zwrotne,
- dodatnie sprzężenie zwrotne.

Zastępując występujące w danym schemacie połączenia elementarne pojedynczymi blokami o odpowiadających tym blokom transmitancjach, otrzymuje się coraz prostszą strukturę schematu, co w końcowym efekcie umożliwia wyznaczenie transmitancji całego układu.

Procedura przekształcania schematów blokowych nazywa się **algebrą schematów blokowych.**

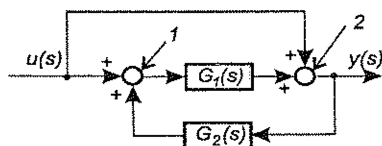
Tablica 4.2

**Połączenia elementarne**

| | |
|---|---|
| Połączenie szeregowe | |
| | $Y(s)=U(s)\,G_1(s)\,G_2(s)$<br>$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=G_1(s)\,G_2(s)$ |
| Połączenie równoległe | |
| | $Y(s)=U(s)\,[\pm G_1(s)\pm G_2(s)]$<br>$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\pm G_1(s)\pm G_2(s)$ |
| Ujemne sprzężenie zwrotne | |
| | $Y(s)=\pm U(s)\,G_1(s)-Y(s)\,G_1(s)\,G_2(s)$<br>$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{\pm G_1(s)}{1+G_1(s)\,G_2(s)}$ |
| Dodatnie sprzężenie zwrotne | |
| | $Y(s)=\pm U(s)\,G_1(s)+Y(s)\,G_1(s)\,G_2(s)$<br>$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{\pm G_1(s)}{1-G_1(s)\,G_2(s)}$ |

**Przykład 4.1**

Wyznaczyć transmitancję operatorową układu o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 4.1.

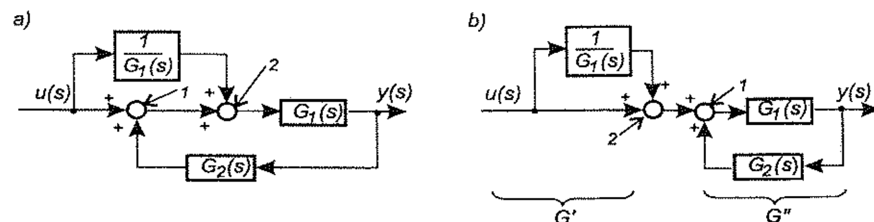



Rys. 4.1. Schemat do przykładu 4.1

*Rozwiązanie*

Schemat blokowy należy tak przekształcić, żeby można było wyodrębnić połączenia elementarne. Po przesunięciu węzła sumacyjnego 2 przed blok o transmitancji $G_1(s)$ (rys. 4.2a) i zmianie kolejności węzłów sumacyjnych 1 i 2, otrzymuje się schemat (rys. 4.2b), przedstawiający szeregowe połączenie dwóch połączeń elementarnych: połączenia równoległego G′ i dodatniego sprzężenia zwrotnego G″. Transmitancja całego układu jest więc iloczynem transmitancji układów G′ i G″. Wykorzystując zależności podane w tabl. 4.2, otrzymuje się

$$G(s)=\left[1+\frac{1}{G_1(s)}\right]\frac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}=\frac{1+G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}$$

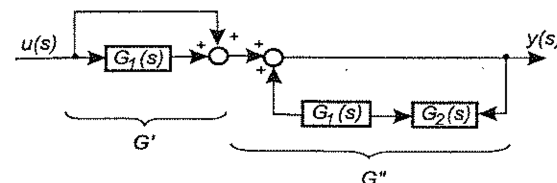



Rys. 4.2. Etapy przekształcania schematu blokowego z rys. 4.1: a) układ po przesunięciu węzła 2 przed blok o transmitancji $G_1(s)$, b) układ po zmianie kolejności węzłów sumacyjnych

Innym sposobem przekształcenia schematu wg rys. 4.1 jest przesunięcie węzła sumacyjnego 1 za element o transmitancji operatorowej $G_1(s)$. Po zmianie kolejności węzłów sumacyjnych otrzymuje się schemat jak na rys. 4.3, umożliwiający wyznaczenie transmitancji układu jako iloczynu transmitancji połączeń G′ i G″:

$$G(s)=[1+G_1(s)]\frac{1}{1-G_1(s)G_2(s)}=\frac{1+G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}$$

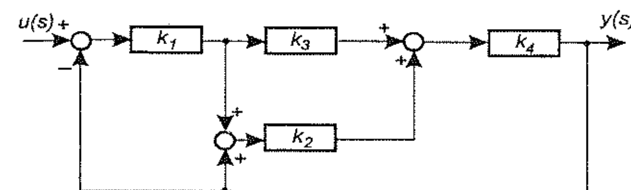





Rys. 4.3. Przekształcony schemat blokowy do przykładu 4.1

**Przykład 4.2**

Wyznaczyć transmitancję operatorową układu o schemacie blokowym jak na rys. 4.4.




Rys. 4.4. Schemat blokowy do przykładu 4.2

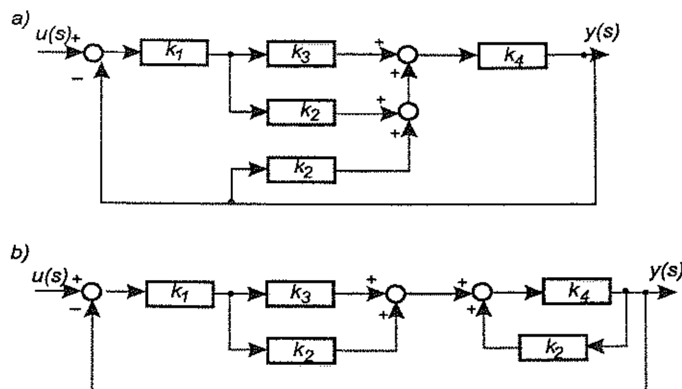
*Rozwiązanie*

Przeniesienie węzła sumacyjnego sprzed członu o transmitancji $k_2$ za ten człon prowadzi do schematu jak na rys. 4.5a. Po narysowaniu tego schematu w bardziej przejrzystej formie (rys. 4.5b), otrzymuje się schemat z widocznymi połączeniami elementarnymi. W torze głównym układu (między sygnałami $u$ i $y$) występuje szeregowe połączenie: członu o transmitancji $k_1$, równoległego połączenia członów $k_2$ i $k_3$ o transmitancji $k_2+k_3$ oraz dodatniego sprzężenia zwrotnego (czony $k_4$ i $k_5$) o transmitancji $\frac{k_4}{1-k_2k_4}$. Transmitancja toru głównego ma postać:

$$G_1(s)=\frac{k_1k_4(k_2+k_3)}{1-k_2k_4}$$

Cały układ jest ujemnym sprzężeniem zwrotnym o transmitancji

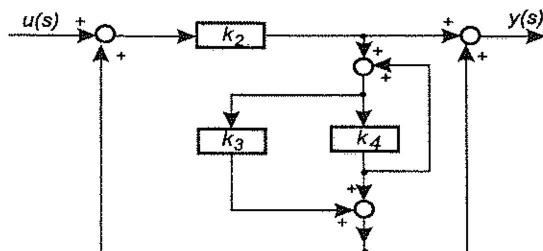
$$G(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)}=\frac{k_1k_4(k_2+k_3)}{1-k_4k_2+k_1k_4(k_2+k_3)}$$




Rys. 4.5. Etapy przekształcania schematu blokowego z rys. 4.4

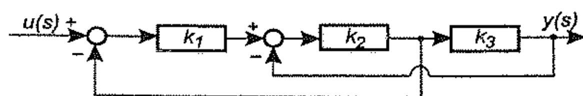
**Przykłady do samodzielnego rozwiązania**

Wyznaczyć transmitancję operatorową układów przedstawionych na rys. 4.6 oraz na rys. 4.7.




Rys. 4.6. Przykładowy schemat blokowy

Odp.: $G(s) = \dfrac{k_2(1+k_3)}{1-k_4-k_2(k_3+k_4)}$.




Rys. 4.7. Przykładowy schemat blokowy

Odp.: $G(s) = \dfrac{k_1 k_2 k_3}{1+k_2 k_3 + k_1 k_2}$.



# 5. LINIOWE CZŁONY DYNAMICZNE

## 5.1. CZŁONY PODSTAWOWE (ELEMENTARNE)

W złożonych układach automatyki zwykle można wyodrębnić szereg najprostszych niepodzielnych już elementów funkcjonalnych. Pomimo różnorodnych form ich fizycznej budowy i fizycznych postaci ich sygnałów, właściwości tych najprostszych rzeczywistych elementów można przyporządkować z większym lub mniejszym przybliżeniem zaledwie kilku różnym modelom matematycznym. Abstrakcyjne urządzenia o właściwościach odpowiadających tym modelom nazywane są podstawowymi (elementarnymi) liniowymi członami dynamicznymi. Równania dynamiki podstawowych liniowych członów dynamicznych (tabl. 5.1) są szczególnymi postaciami równania różniczkowego (3.1).

Tablica 5.1

**Równania dynamiki podstawowych liniowych członów dynamicznych**

| Nazwa członu | Równanie dynamiki członu |
|---|---|
| Człon proporcjonalny (bezinercyjny) | $y(t) = ku(t)$ (5.1)<br>$k$ – współczynnik wzmocnienia (wzmocnienie), jeżeli $u$ i $y$ są jednakowymi wielkościami fizycznymi, lub $k$ – współczynnik proporcjonalności, jeżeli $u$ i $y$ są wielkościami różnymi |
| Człon inercyjny | $T\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ (5.2)<br>$T$ – stała czasowa [s], $k$ – wzmocnienie albo współczynnik proporcjonalności |

Tablica 5.1, cd.

| Nazwa członu | Równanie dynamiki członu |
|---|---|
| Człon całkujący | jeżeli $u$ i $y$ są jednakowymi wielkościami fizycznymi $$T\frac{dy(t)}{dt}=u(t) \quad (5.3)$$ jeżeli $u$ i $y$ są różnymi wielkościami fizycznymi $$\frac{dy(t)}{dt}=ku(t) \quad (5.4)$$ $T$ – stała czasowa [s], $k$ – współczynnik proporcjonalności |
| Człon różniczkujący idealny | jeżeli $u$ i $y$ są jednakowymi wielkościami fizycznymi $$y(t)=T_d\frac{du(t)}{dt} \quad (5.5)$$ jeżeli $u$ i $y$ są różnymi wielkościami fizycznymi $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt} \quad (5.6)$$ $T_d$ – stała czasowa [s], $k$ – współczynnik proporcjonalności |
| Człon różniczkujący rzeczywisty | jeżeli $u$ i $y$ są jednakowymi wielkościami fizycznymi $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=T_d\frac{du(t)}{dt} \quad (5.7)$$ jeżeli $u$ i $y$ są różnymi wielkościami fizycznymi $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt} \quad (5.8)$$ $T$ – stała czasowa inercji [s], $T_d$ – stała czasowa różniczkowania [s], $k$ – współczynnik proporcjonalności |
| Człon oscylacyjny | $$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t) \quad (5.9)$$ lub $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2y(t)=k\omega_0^2u(t) \quad (5.10)$$ $\omega_0$ – pulsacja drgań nietłumionych, $\xi$ – współczynnik tłumienia, $0\le\xi<1$; $k$ – wzmocnienie albo współczynnik proporcjonalności |
| Człon opóźniający | $$y(t)=u(t-T_0) \quad (5.11)$$ $T_0$ – opóźnienie (czas opóźnienia) [s] |



Równania (5.9) i (5.10) reprezentują człon oscylacyjny tylko wtedy, gdy $0\le\xi<1$. Wprowadzając do równania (5.9) oznaczenie $\omega_0 = 1/T$, otrzymuje się

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\,u(t)$$

Transmitancja operatorowa członu wyznaczona na podstawie tego równania ma postać

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$$

Gdy $\xi=1$, transmitancję tę można przedstawić jako

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{(Ts+1)^2}$$

Element o takiej transmitancji można traktować jako szeregowe połączenie dwóch członów inercyjnych o jednakowych stałych czasowych. Element o takiej transmitancji nazywany jest inercyjnym drugiego rzędu. Natomiast jeżeli $\xi>1$, trójmian mianownika transmitancji ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe, gdyż

$$\Delta=(2\xi T)^2-4T^2>0$$

i można go wyrazić w postaci iloczynu dwóch dwumianów. Zatem, jeżeli $\xi>1$, transmitancję członu można przedstawić w postaci

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

Jest to więc transmitancja szeregowego połączenia dwóch członów inercyjnych o różnych stałych czasowych.

### 5.1.1. CZŁON PROPORCJONALNY

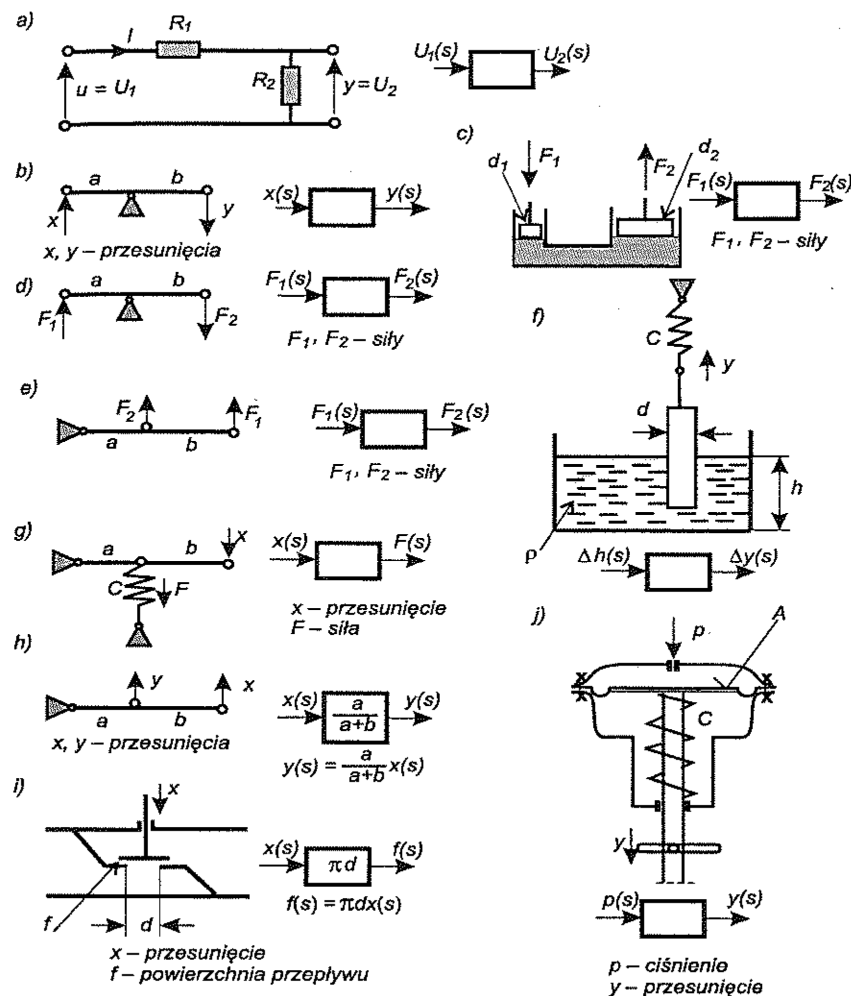
Podstawowe charakterystyki członu proporcjonalnego zestawiono w tabl. 5.2, a przykłady urządzeń, które w określonych warunkach i określonych zakresach zmian sygnałów, przy odpowiednich założeniach upraszczających, mogą być traktowane jako elementy o właściwościach członu proporcjonalnego (elementy proporcjonalne), przedstawiono na rys. 5.1. Na przykład, w przypadku dźwigni zakłada się, że są one elementami nieodkształcalnymi, bez masy i bez tarcia w przegubie.

Tablica 5.2

**Charakterystyki członu proporcjonalnego**

| Równanie dynamiki $y(t) = ku(t)$ | |
|---|---|
| Charakterystyka statyczna<br>$y = ku$ | |
| Transmitancja operatorowa<br>$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k$ | |
| Odpowiedź skokowa<br>$y(t) = L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}k\right] = ku_{st}$ | |
| Transmitancja widmowa<br>$G(j\omega) = k$<br>$P(\omega) = k$<br>$Q(\omega) = 0$ | |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br>$M(\omega) = k$<br>$L(\omega) = 20\lg k$ [dB] | |
| Logarytmiczna charakterystyka fazowa<br>$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0$ | |






Rys. 5.1. Przykłady elementów proporcjonalnych

Należy zwrócić uwagę na fakt, że o postaci równania ruchu elementu decyduje nie tylko jego budowa, lecz także sposób jego wykorzystania do przetwarzania informacji. Dlatego obok schematów ideowych poszczególnych elementów zostały podane wielkości wejściowe i wyjściowe. Na schematach blokowych (rys. 5.1h, i) podane są transmitancje elementów; wyznaczenie pozostałych pozostawia się czytelnikowi.

**Przykład 5.1**

Wyznaczyć równanie ruchu elementu wg rys. 5.1a, którego wielkością wejściową jest napięcie $U_1$, a wyjściową – napięcie $U_2$, przy założeniu, że rezystancja między zaciskami wyjściowymi jest nieskończenie wielka.

*Rozwiązanie*

Równanie ruchu danego elementu można wyznaczyć na podstawie prawa Ohma. Wartość prądu $I$ płynącego w danej chwili $t$ przez rezystory $R_1$ i $R_2$ wyraża stosunek napięcia do oporności:

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

skąd wynika zależność $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$, obowiązująca w dowolnej chwili. Zatem, równanie ruchu ma postać

$$U_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1(t)$$

Wzmocnienie elementu $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ ma wartość $\leq 1$.

**Przykład 5.2**

Wyznaczyć równanie ruchu elementu wg rys. 5.1j, w którym wielkością wejściową jest ciśnienie $p$ w komorze siłownika, a wyjściową – położenie $y$ tłoczyska siłownika ($C$ – sztywność sprężyny powrotnej), zakładając brak sił bezwładności (masa elementów ruchomych jest równa zeru), brak sił tarcia w układzie oraz pomijalnie małą objętość komory siłownika.

*Rozwiązanie*

W tym przypadku zależność wielkości wyjściowej od wejściowej wynika z równania równowagi sił działających na ruchome części siłownika. Siła wynikająca z działania ciśnienia (nadciśnienia) $p$ na powierzchnię $A$ membrany, ściskając sprężynę o sztywności $C$, powoduje wysuwanie tłoczyska o wartość $y$ od stanu początkowego. Równanie równowagi sił ma postać

$$pA = Cy$$

skąd wynika zależność wielkości wyjściowej od wejściowej

$$y = \frac{C}{A} p$$



i równanie ruchu

$$y(t) = \frac{C}{A} p(t)$$

Stosunek $C/A$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

### 5.1.2. CZŁON INERCYJNY

Charakterystyki członu inercyjnego zestawiono w tabl. 5.3. Oznaczono numerami: 1 i 2 – rzeczywistą i asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudową, 3 – rzeczywistą logarytmiczną charakterystykę fazową, 4 – asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę fazową wyznaczoną metodą siecznej, 5 – asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę fazową wyznaczoną metodą stycznej.

Tablica 5.3

**Charakterystyki członu inercyjnego**

| | |
|---|---|
| Równanie dynamiki $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ | |
| Charakterystyka statyczna $y = ku$ | y, arctg k, 0, u |
| Transmitancja operatorowa $G(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{k}{Ts+1}$ | u(s), $\frac{k}{Ts+1}$, y(s) |
| Odpowiedź skokowa $y(t) = L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}\frac{k}{Ts+1}\right] = u_{st}k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ | y(t), T, T, $ku_{st}$, $0{,}632\, ku_{st}$, 0, t [s] |

Tablica 5.3, cd.

| | |
|---|---|
| Transmitancja widmowa<br><br>$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}=P(\omega)+jQ(\omega)$<br><br>$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1}$<br><br>$Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$ | |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br><br>$M(\omega)=\sqrt{[P(\omega)]^2+[Q(\omega)]^2}$<br><br>$M(\omega)=\frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$<br><br>$L(\omega)=(20\lg k-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1})$ [dB]<br><br>Charakterystyka asymptotyczna:<br><br>$L(\omega)=20\lg k$ [dB] dla $\omega<<\frac{1}{T}$<br><br>$L(\omega)=(20\lg k-20\lg T\omega)$ [dB] dla $\omega>>\frac{1}{T}$ | |
| Logarytmiczna charakterystyka fazowa<br><br>$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=-\mathrm{arctg}T\omega$<br><br>Wzory przybliżone:<br><br>$\varphi(\omega)\approx -T\omega$ dla $\omega<<\frac{1}{T}$<br><br>$\varphi(\omega)\approx -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{T\omega}$ dla $\omega>>\frac{1}{T}$<br><br>$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{4}$ dla $\omega=\frac{1}{T}$ | |



Odpowiedź skokowa członu inercyjnego (rys. 5.2) może być wykorzystana do wyznaczenia jego parametrów $k$ i $T$. Wartość współczynnika $k$ można określić na podstawie wartości ustalonej odpowiedzi. Stałą czasową można wyznaczyć kilkoma sposobami.

Podstawiając do równania odpowiedzi skokowej czas $t$ równy stałej czasowej $T$, otrzymuje się zależność

$$y(t)\Big|_{t=T}\cong 0{,}632ku_{st}$$

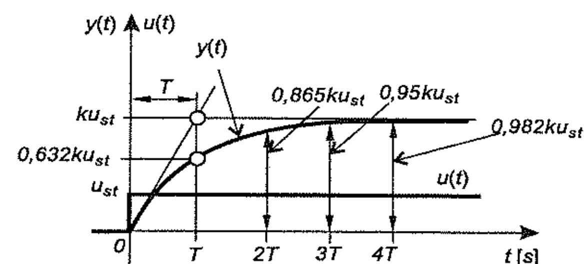
z której wynika, że po upływie czasu równego stałej czasowej od wprowadzenia wymuszenia skokowego wartość odpowiedzi skokowej osiąga około 63,2% wartości ustalonej.

Stałą czasową elementu inercyjnego można również wyznaczyć na podstawie odpowiedzi skokowej jako czas, po którym styczna do odpowiedzi osiąga wartość ustaloną tej odpowiedzi. Na przykład, równaniem stycznej $z(t)$, wystawionej do krzywej odpowiedzi w punkcie $t=0$, jest

$$z(t)=t\frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=t\left[ku_{st}\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right]_{t=0}=\left[ku_{st}\frac{1}{T}\right]t$$

Dla $t=T$ styczna $z(t)$ osiąga wartość $ku_{st}$, a więc ustaloną wartość odpowiedzi skokowej. Stałą czasową można wyznaczyć, wystawiając styczną w dowolnym punkcie odpowiedzi skokowej (tabl. 5.3).

Na podstawie równania odpowiedzi skokowej można wyznaczyć wartości odpowiedzi po upływie wielokrotności stałej czasowej (rys. 5.2).




Rys. 5.2. Odpowiedź skokowa członu inercyjnego

Na rys. 5.2 przedstawiono także informację, z jaką dokładnością wyznaczana jest eksperymentalnie wartość ustalona odpowiedzi skokowej urządzenia o właściwościach elementu inercyjnego w zależności od czasu trwania eksperymentu. Na przykład, po upływie czasu równego $4T$ błąd względny pomiaru wartości ustalonej jest mniejszy niż 2%.

Charakterystykę amplitudowo-fazową wyznacza się, obliczając $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ albo $M(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ dla szeregu wartości pulsacji. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego jest półokręgiem (tabl. 5.3). Współrzędne charakterystycznych punktów tej charakterystyki podano w tabl. 5.4.

Tablica 5.4

**Wybrane wartości charakterystyki amplitudowo-fazowej**

| $\omega$ | 0 | $\omega_s = 1/T$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $k$ | $k/2$ | 0 |
| $Q(\omega)$ | 0 | $-k/2$ | 0 |
| $M(\omega)$ | $k$ | $k/\sqrt{2}$ | 0 |
| $\varphi(\omega)$ | 0 | $-\pi/4$ | $-\pi/2$ |

Charakterystyczną wartością pulsacji jest tzw. pulsacja sprzęgająca $\omega_s = 1/T$. Wiedząc, że przy tej pulsacji przesunięcie fazowe wynosi $-\pi/4$, na podstawie eksperymentalnie wyznaczonej wartości pulsacji powodującej takie przesunięcie, można wyznaczyć wartość stałej czasowej elementu inercyjnego, a na podstawie wartości modułu $M(\omega_s)$ przy pulsacji sprzęgającej – wartość współczynnika $k$ z zależności $k = \sqrt{2}M(\omega_s)$.

Wyznaczanie charakterystyk logarytmicznych na podstawie wzorów definicyjnych

$$L(\omega) = (20\lg k - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1})\ \text{[dB]}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T\omega$$

jest pracochłonne (w tabl. 5.3 charakterystyki te wykreślono liniami ciągłymi). Dlatego w praktyce wykorzystuje się tzw. charakterystyki asymptotyczne, składające się z odcinków linii prostych (w tabl. 5.3 wykreślono je liniami przerywanymi).

**Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa** składa się z dwóch półprostych, określonych równaniami:

– dla $\omega < \omega_s = \frac{1}{T}$ zakłada się, że $T^2\omega^2 + 1 \cong 1$, a więc

$$L(\omega) = 20\lg k\ \text{[dB]}$$

jest to równanie linii prostej równoległej do osi odciętych;

– dla $\omega > \omega_s = \frac{1}{T}$ zakłada się, że $T^2\omega^2 + 1 \cong T^2\omega^2$, a więc

$$L(\omega) = (20\lg k - 20\lg T\omega)\ \text{[dB]}$$

jest to równanie linii prostej o nachyleniu –20 dB na dekadę.

Tworzące charakterystykę asymptotyczną półproste stykają się przy $\omega = \omega_s$ (stąd nazwa $\omega_s$ – pulsacja sprzęgająca), gdzie występuje największa różnica między charakterystyką rzeczywistą a asymptotyczną, wynosząca 3 dB.

Przy pulsacji sprzęgającej charakterystyka asymptotyczna ma wartość

$$L(\omega_s) = 20\lg k\ \text{[dB]}$$

natomiast charakterystyka rzeczywista – wartość

$$L(\omega_s) = (20\lg k - 20\lg\sqrt{2}) = (20\lg k - 3)\ \text{[dB]}$$

**Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka fazowa** członu inercyjnego składa się z dwóch półprostych i łączącego je odcinka linii prostej, pokrywającego się z charakterystyką rzeczywistą w punkcie jej przegięcia o współrzędnych $(\omega_s, -\pi/4)$ (tabl. 5.3). Stosowane są dwie metody wykreślania środkowego odcinka charakterystyki asymptotycznej – metoda siecznej albo metoda stycznej. Metoda siecznej polega na przeprowadzeniu tego odcinka przez punkty o współrzędnych $(0{,}1\omega_s, 0)$ i $(10\omega_s, -\pi/2)$, metoda stycznej – przez punkty $(\omega_s/4{,}81, 0)$ i $(4{,}81\omega_s, -\pi/2)$ (linia przechodząca przez te punkty jest styczną do rzeczywistej logarytmicznej charakterystyki fazowej w punkcie przegięcia). Ze względu na mniejsze (maksymalnie +5°73′ i –5°73′) odchylenia od rzeczywistego przebiegu charakterystyki fazowej oraz łatwość wykreślania, korzystniej jest stosować metodę siecznej.

Do obliczania przybliżonych wartości funkcji $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T\omega$ wykorzystuje się wzory wynikające z rozwinięcia funkcji $\operatorname{arctg} x$ w szereg, przyjmując tylko pierwsze wyrazy rozwinięcia:

dla $x < 1$ $\qquad \operatorname{arctg} x \approx x$,

dla $x > 1$ $\qquad \operatorname{arctg} x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$.

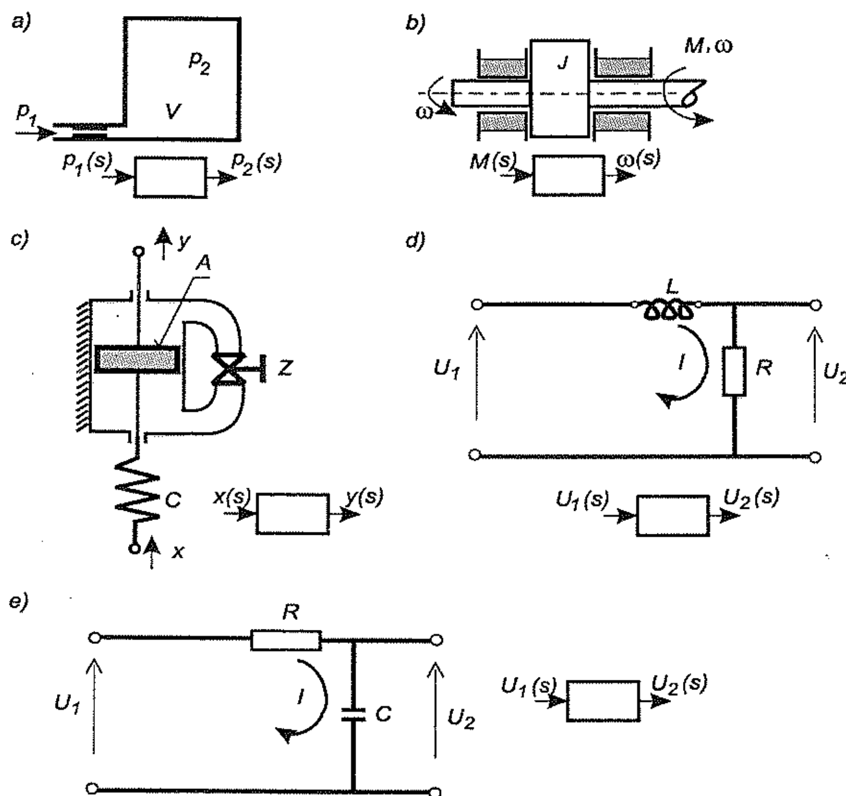
Zatem:

dla $\omega < \frac{1}{T}$ $\qquad \varphi(\omega) = -T\omega$,

dla $\omega > \frac{1}{T}$ $\qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + T\omega$,

dla $\omega = \frac{1}{T}$ $\qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{4}$.

Na rys. 5.3 przedstawiono przykłady urządzeń, które przy odpowiednich założeniach upraszczających mogą być traktowane jako elementy inercyjne.




Rys. 5.3. Przykłady elementów inercyjnych

**Przykład 5.3**

Wyznaczyć równanie ruchu elementu wg rys. 5.3a, którego wielkością wejściową jest ciśnienie $p_1$ przed zwężką, a wyjściową – ciśnienie $p_2$ wewnątrz zbiornika o objętości $V$. Należy przyjąć, że:

– zmiany ciśnienia w zbiorniku są powolne i nie powodują zmian jego temperatury (zmiany ciśnienia wg przemiany izotermicznej),
– w zwężce występuje przepływ laminarny.



*Rozwiązanie*

W przypadku przepływu laminarnego strumień masy $G$ powietrza przepływającego przez zwężkę jest proporcjonalny do spadku ciśnienia na zwężce. W przypadku dopływu do zbiornika

$$G = k(p_1 - p_2)$$

gdzie $k$ – współczynnik proporcjonalności.

Zależność masy $m$ powietrza w zbiorniku o objętości $V$ dla określonej wartości temperatury $\theta$ [K] i ciśnienia absolutnego $p_2$ można wyznaczyć z równania stanu gazu (prawo Clapeyrona):

$$m = \frac{p_2 V}{R\theta}$$

gdzie $R = 287$ J/(kg·K) – stała gazowa dla powietrza.

Zmiany masy powietrza w zbiorniku wskutek dopływu (lub wypływu) wywołują zmiany ciśnienia, zgodnie z zależnością

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{V}{R\theta}\frac{dp_2(t)}{dt}$$

Z prawa ciągłości (strumień masy powietrza płynącego przez zwężkę do zbiornika zwiększa masę powietrza w zbiorniku) wynika, że $\frac{dm(t)}{dt} = G$, a więc

$$\frac{V}{R\theta}\frac{dp_2(t)}{dt} = k(p_1 - p_2)$$

skąd wynika równanie ruchu

$$\frac{V}{kR\theta}\frac{dp_2(t)}{dt} + p_2(t) = p_1(t)$$

Jest to więc element inercyjny o stałej czasowej $T = \frac{V}{kR\theta}$ i wzmocnieniu $k = 1$.

**Przykład 5.4**

Wyznaczyć równanie ruchu tłumika hydraulicznego wg rys. 5.3c, którego wielkością wejściową jest przesunięcie $x$ końca sprężyny o sztywności $C$, a wyjściową – przesunięcie $y$ tłoka. Należy ponadto założyć brak ściśliwości oleju oraz laminarny charakter przepływów między komorami tłumika.

*Rozwiązanie*

Przesunięcie $x$ końca sprężyny powoduje jej ugięcie i powstanie siły wywołującej różnicę ciśnień $\Delta p$ między komorami tłumika, co z kolei powoduje prze-

pływ oleju przez dławik Z i w efekcie – przemieszczanie tłoka. Z równania równowagi sił działających na tłok

$$C[x(t) - y(t)] = A\,\Delta p$$

gdzie $A$ – powierzchnia czynna tłoka, otrzymuje się

$$\Delta p = \frac{C}{A}[x(t) - y(t)]$$

W przypadku przepływu laminarnego strumień objętości jest proporcjonalny do wywołującej go różnicy ciśnień

$$Q(t) = \alpha\,\Delta p = A\frac{dy(t)}{dt}$$

Uwzględniając zależność określającą spadek ciśnienia $\Delta p$, otrzymuje się równanie ruchu

$$\frac{A^2}{\alpha C}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Jest to więc element inercyjny o stałej czasowej $T = \frac{A^2}{\alpha C}$ i wzmocnieniu $k = 1$.

**Przykład 5.5**

Wyznaczyć równanie ruchu czwórnika $RL$ wg rys. 5.3d, którego wielkością wejściową jest napięcie $U_1$, a wyjściową – napięcie $U_2$, przy założeniu, że rezystancja między zaciskami wyjściowymi jest nieskończenie wielka.

*Rozwiązanie*

Z równania określającego napięcie na zaciskach wejściowych

$$U_1(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + U_2(t)$$

oraz prawa Ohma

$$I(t) = \frac{U_2(t)}{R}$$

otrzymuje się równanie ruchu

$$\frac{L}{R}\frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$$

Jest to równanie elementu inercyjnego o stałej czasowej $T = \frac{L}{R}$ i wzmocnieniu $k = 1$.



**Przykład 5.6**

Wyznaczyć wartość napięcia wyjściowego $U_2$ czwórnika RC wg rys. 5.3e po upływie 10 s od momentu skokowej zmiany napięcia wejściowego $U_1$ o amplitudzie 2 V, zakładając, że rezystancja między zaciskami wyjściowymi jest nieskończenie wielka. Wartości początkowe napięcia $U_1(0) = U_2(0) = 0$ V oraz $R = 1$ MΩ, $C = 10$ μF.

*Rozwiązanie*

Prąd $I$ płynący przez rezystor o oporności $R$ i w obwodzie wyjściowym można wyrazić jako

$$I(t) = \frac{U_1(t) - U_2(t)}{R}$$

$$I(t) = C\frac{dU_2(t)}{dt}$$

Z przyrównania tych zależności, po przekształceniu, otrzymuje się równanie ruchu

$$RC\frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$$

Jest to równanie elementu inercyjnego o stałej czasowej $T = RC = 10$ s i wzmocnieniu $k = 1$.

Po upływie 10 s od chwili wprowadzenia na wejście sygnału skokowego, tj. po upływie czasu równego stałej czasowej, napięcie wyjściowe $U_2$ osiągnie 63,2% stanu ustalonego, a więc wartość $0{,}632 \cdot 2$ V = 1,264 V.

**Przykład 5.7**

Do pomiaru ciśnienia $p$ gazu płynącego przez rurociąg zastosowano przetwornik pomiarowy o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{\Delta I(s)}{\Delta p(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$$

gdzie: $I$ – prądowy sygnał wyjściowy, $p$ – ciśnienie wejściowe przetwornika.

Jaki będzie błąd pomiaru amplitudy zmian ciśnienia, zmieniającego się sinusoidalnie z częstotliwością $f = 0{,}001$ Hz, jeżeli stała czasowa przetwornika $T = 30$ s.

*Rozwiązanie*

Przyrost wartości ciśnienia o $\Delta p$ powinien spowodować, po ustaniu procesów przejściowych, zmianę wartości sygnału wyjściowego przetwornika $\Delta I = k\Delta p$.

W rozważanym przypadku zmiany ciśnienia wejściowego o amplitudzie $\Delta p$ spowodują zmiany sygnału wyjściowego o amplitudzie

$$\Delta I(\omega) = \Delta p M(\omega) = \Delta p \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

gdzie $\omega = 2\pi f \approx 0{,}006\,28$ rad/s.

Po podstawieniu danych otrzymuje się

$$\Delta I(\omega) = \Delta p \frac{k}{\sqrt{30^2 \cdot 0{,}006\,28^2 + 1}} \approx 0{,}983 k\Delta p$$

Błąd względny pomiaru amplitudy zmian ciśnienia wynosi

$$\delta = \left| \frac{\Delta I(\omega) - \Delta I}{\Delta I} \right| 100\% = \frac{k\Delta p - 0{,}983 k\Delta p}{k\Delta p} 100\% = 1{,}7\%$$

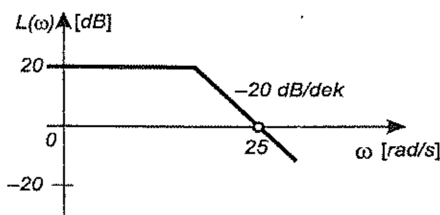
**Ćwiczenie 5.1**

Jaki jest sygnał wyjściowy elementu o transmitancji $G(s) = \dfrac{2}{0{,}1s + 1}$, jeżeli na jego wejście podawany jest sygnał $x(t) = 5\sin 10t$?

Odp.: $y(t) = 5\sqrt{2}\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Ćwiczenie 5.2**

Na rys. 5.4 przedstawiono asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudową elementu inercyjnego. Jaka jest stała czasowa $T$ i wzmocnienie $k$ tego elementu?




Rys. 5.4. Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

Odp.: $T = 0{,}4$ s, $k = 10$.



**Ćwiczenie 5.3**

Na rys. 5.3b przedstawiono koło zamachowe o momencie bezwładności $J$. Wyznaczyć równanie ruchu urządzenia, przyjmując, że wielkością wejściową jest moment napędzający $M$, wyjściową – prędkość kątowa koła $\omega$. Założyć, że w łożyskach występuje tylko tarcie lepkie proporcjonalne do prędkości kątowej $\omega$ (moment tarcia $M_t = R\omega$, gdzie $R$ – współczynnik proporcjonalności).

Odp.: $\dfrac{J}{R}\dfrac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \dfrac{1}{R}M(t)$.

## 5.1.3. CZŁON CAŁKUJĄCY

Charakterystyki członu całkującego zestawiono w tabl. 5.5.

Na rys. 5.5 przedstawiono przykłady urządzeń, które przy odpowiednich założeniach upraszczających, mogą być traktowane jako elementy całkujące.

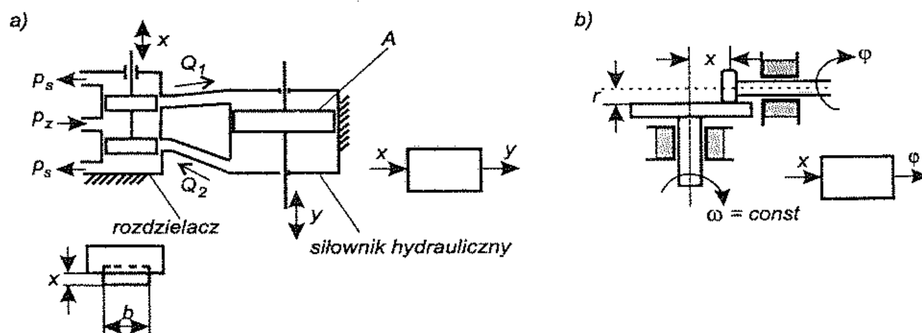
Tablica 5.5

**Charakterystyki członu całkującego**

| | |
|---|---|
| Równanie dynamiki $T\dfrac{dy(t)}{dt} = u(t)$ | |
| Charakterystyka statyczna<br>$u = 0$ | y, 0, u |
| Transmitancja operatorowa<br>$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{Ts}$ | u(s) → $\dfrac{1}{Ts}$ → y(s) |
| Odpowiedź skokowa<br>$y(t) = L^{-1}\left[u_{st}\dfrac{1}{s}\dfrac{1}{Ts}\right] = u_{st}\dfrac{t}{T}$ | y(t), u(t), $u_{st}$, 0, T, t [s] |

Tablica 5.5, cd.

| | |
|---|---|
| Transmitancja widmowa<br>$G(j\omega)=\frac{1}{Tj\omega}=-j\frac{1}{T\omega}$<br>$P(\omega)=0$<br>$Q(\omega)=-\frac{1}{T\omega}$ | $jQ(\omega)$; $\omega=\infty$; 0; $P(\omega)$; $-1$; $\omega_s=\frac{1}{T}$; $G(j\omega)$; $\omega=0$ |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br>$M(\omega)=\sqrt{[P(\omega)]^2+[Q(\omega)]^2}=\frac{1}{T\omega}$<br>$L(\omega)=20\lg\frac{1}{T\omega}=-20\lg T\omega$ [dB] | $L(\omega)$ [dB]; $\omega_s=\frac{1}{T}$; 20; $-20$ dB/dek; $\omega_s$; $10\,\omega_s$; 0; $0{,}1\,\omega_s$; $\omega$ [rad/s]; $-20$ |
| Logarytmiczna charakterystyka fazowa<br>$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=\mathrm{arctg}\frac{-\frac{1}{T\omega}}{0}=$<br>$=\mathrm{arctg}-\infty=-\frac{\pi}{2}$ | $\varphi(\omega)$ [rad]; $\frac{\pi}{2}$; 0; $\omega$ [rad/s]; $-\frac{\pi}{2}$ |




Rys. 5.5. Przykłady elementów całkujących: a) serwomotor hydrauliczny, b) przekładnia rolkowa



### Przykład 5.8

Wyznaczyć równanie ruchu serwomotoru hydraulicznego, którego schemat przedstawiono na rys. 5.5a. Wielkością wejściową serwomotoru jest przemieszczenie $x$ suwaka rozdzielacza względem pozycji, w której tłoczki suwaka całkowicie zamykają otwory prowadzące do komór siłownika (jak na rysunku). Wielkością wyjściową serwomotoru jest przemieszczenie $y$. Należy założyć, że siły działające na tłok (obciążenia zewnętrzne i opory ruchu) są pomijalnie małe, a ciśnienia zasilania $p_z$ i spływu $p_s$ są stałe.

*Rozwiązanie*

Przedstawiony na rys. 5.5a serwomotor składa się z rozdzielacza i siłownika tłokowego o powierzchni czynnej tłoka $A$. W pozycji suwaka rozdzielacza jak na rysunku tłok siłownika jest unieruchomiony. Odchylenie suwaka rozdzielacza od tej pozycji powoduje jednoczesne połączenie jednej komory siłownika z zasilaniem ($p_z$), a drugiej – ze spływem ($p_s$) i w konsekwencji ruch tłoka siłownika. Strumień objętości $Q_1$ oleju wpływającego do jednej komory siłownika i taki sam strumień $Q_2$ oleju wypływającego z drugiej komory zależą tylko od wielkości powierzchni przepływowych w rozdzielaczu, wynikających z przesunięcia $x$ suwaka.

Do obliczania strumienia objętości $Q$ cieczy o gęstości $\rho$ przez zwężkę o powierzchni przepływowej $f$ wykorzystuje się wzór

$$Q=\alpha f\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p}$$

gdzie: $\alpha$ – współczynnik przepływu, $\Delta p$ – różnica ciśnień wywołująca przepływ.

W rozdzielaczu szczeliny przepływowe na dopływie do siłownika i na wypływie tworzą wykonane w korpusie rozdzielacza prostokątne okna o szerokości $b$; przy $x=0$ są one całkowicie przysłonięte przez tłoczki rozdzielacza. Dla $x\neq 0$ powierzchnie przepływowe są równe $f=bx$.

Wprowadzając oznaczenie

$$\alpha b\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_z-p_s)}=B$$

na podstawie prawa ciągłości można napisać

$$Bx(t)=A\frac{dy(t)}{dt}$$

skąd otrzymuje się równanie ruchu

$$\frac{A}{B}\frac{dy(t)}{dt}=x(t)$$

Jest to równanie elementu całkującego o stałej czasowej

$$T=\frac{A}{B}=\frac{A}{\alpha b\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_z-p_s)}}$$

**Przykład 5.9**

Wyznaczyć równanie ruchu przekładni przedstawionej na rys. 5.5b. Obracająca się ze stałą prędkością kątową $\omega$ tarcza wprawia w ruch rolkę o promieniu $r$. Wielkością wejściową elementu jest odległość $x$ punktu styczności rolki z tarczą od środka tarczy, wielkością wyjściową – położenie kątowe $\varphi$ rolki.

*Rozwiązanie*

Przy założeniu, że toczenie odbywa się bez poślizgu, można przyjąć, że prędkości liniowe tarczy i rolki w punkcie styczności są jednakowe:

$$r\frac{d\varphi(t)}{dt}=\omega x$$

skąd

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{\omega}{r}x$$

Jest to równanie elementu całkującego o współczynniku proporcjonalności $k=\omega/r$.

**Ćwiczenie 5.4**

Wyznaczyć stałą czasową $T$ serwomotoru hydraulicznego przedstawionego na rys. 5.5a. Dane: powierzchnia czynna tłoka $A=100$ cm², szerokość szczeliny wlotowej $b=1$ cm, współczynnik przepływu $\alpha=0{,}6$, gęstość oleju $\rho=880$ kg/m³, ciśnienie zasilania $p_z=10$ MPa, ciśnienie spływu $p_s=0$ MPa.

Odp.: $T\approx 0{,}01$ s.

**Ćwiczenie 5.5**

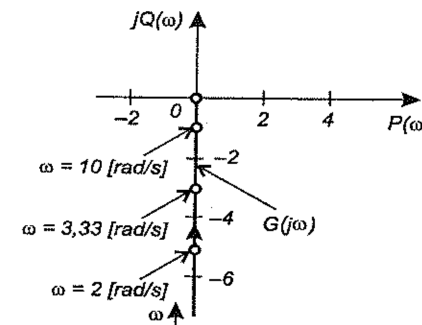
Określić wartość stałej czasowej $T$ elementu o transmitancji $G(s)=1/Ts$, jeżeli jego sygnał wyjściowy osiągnął wartość 10 po upływie 30 s od momentu skokowej zmiany sygnału wejściowego $u(t)=2\cdot 1(t)$. Założyć zerowe warunki początkowe. Naszkicować przebieg zmian $u(t)$ i $y(t)$.

Odp.: $T=6$ s.



**Ćwiczenie 5.6**

Na rys. 5.6 przedstawiono charakterystykę amplitudowo-fazową elementu całkującego. Określić wartość stałej czasowej tego elementu.




Rys. 5.6. Ilustracja ćwiczenia 5.6

Odp.: $T=0{,}1$ s.

## 5.1.4. CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY IDEALNY

Charakterystyki członu różniczkującego idealnego zestawiono w tabl. 5.6.

Przykładem idealnego elementu różniczkującego jest prądnica tachometryczna. Napięcie wyjściowe $U_y$ prądnicy jest proporcjonalne do prędkości obrotowej jej wirnika, a więc do pochodnej kątowego położenia $\varphi$ wirnika. Traktując położenie kątowe wirnika jako wielkość wejściową, a napięcie $U_y$ jako wielkość wyjściową, można równanie ruchu prądnicy sformułować w postaci

$$U_y(t)=k\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

## 5.1.5. CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY RZECZYWISTY

Charakterystyki członu różniczkującego rzeczywistego zestawiono w tabl. 5.7. W tabl. 5.7 oznaczono numerami: 1 i 2 – rzeczywistą i asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudową, 3 – rzeczywistą logarytmiczną charakterystykę fazową, 4 – asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę fazową wyznaczoną metodą siecznej.

Znajomość cech odpowiedzi skokowej i charakterystyki amplitudowo-fazowej umożliwia określanie parametrów członu na podstawie charakterystyk wyznaczonych eksperymentalnie. W przypadku charakterystyki amplitudowo-fazowej, do określenia tych parametrów wystarczy fragment w zakresie pulsacji od 0 do wartości, przy której przesunięcie fazowe osiągnie wartość 45°.

Tablica 5.6

**Charakterystyki członu różniczkującego idealnego**

| | |
|---|---|
| Równanie dynamiki $y(t)=T_d\,\frac{du(t)}{dt}$ | |
| Charakterystyka statyczna<br>$y=0$ | y, 0, u |
| Transmitancja operatorowa<br>$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=T_d\,s$ | u(s) → $T_d s$ → y(s) |
| Odpowiedź skokowa<br>$y(t)=L^{-1}\left[u_{st}\,\frac{1}{s}\,T_d s\right]=u_{st}\,T_d\,\delta(t)$ | y(t), u(t), $u_{st}$, 0, t [s] |
| Transmitancja widmowa<br>$G(j\omega)=jT_d\omega$<br>$P(\omega)=0$<br>$Q(\omega)=T_d\,\omega$ | jQ(ω), ω = ∞, ω, G(jω), 1, $\omega_s=\frac{1}{T_d}$, 0, ω = 0, P(ω) |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br>$M(\omega)=\sqrt{[P(\omega)]^2+[Q(\omega)]^2}=T_d\omega$<br>$L(\omega)=20\lg T_d\omega$ [dB] | L(ω) [dB], 20, 20 dB/dek, 0, 0,1ω s, $\omega_s$, 10ω s, ω [rad/s], −20, $\omega_s=\frac{1}{T_d}$ |
| Logarytmiczna charakterystyka fazowa<br>$\varphi(\omega)=\text{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=\text{arctg}\frac{T_d\omega}{0}=$<br>$=\text{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}$ | φ(ω) [rad], $\frac{\pi}{2}$, 0, ω [rad/s], $-\frac{\pi}{2}$ |

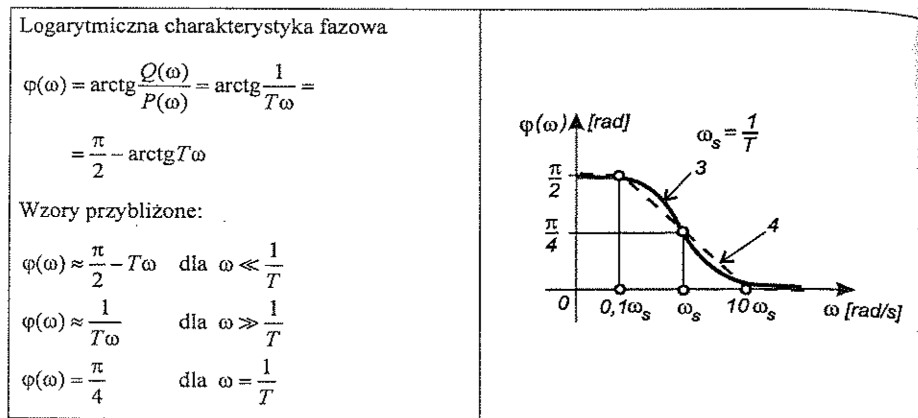


Tablica 5.7

**Charakterystyki członu różniczkującego rzeczywistego**

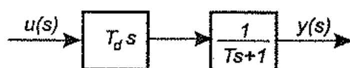
| | |
|---|---|
| Równanie dynamiki $T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=T_d\,\frac{du(t)}{dt}$ | |
| Charakterystyka statyczna<br>$y=0$ | y, 0, u |
| Transmitancja operatorowa<br>$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{T_d s}{Ts+1}$ | u(s) → $\frac{T_d s}{Ts+1}$ → y(s) |
| Odpowiedź skokowa<br>$y(t)=L^{-1}\left[u_{st}\,\frac{T_d\,s}{s(Ts+1)}\right]=u_{st}\,\frac{T_d}{T}\,e^{-\frac{t}{T}}=$<br>$=u_{st}\,k_d\,e^{-\frac{t}{T}}$<br>$k_d=\frac{T_d}{T}$ – wzmocnienie dynamiczne | y(t), u(t), $k_d u_{st}$, $k_d=\frac{T_d}{T}$, y(t), $u_{st}$, u(t), 0, t [s], $T=T_d/k_d$ |
| Transmitancja widmowa<br>$G(j\omega)=\frac{T_d\,j\omega}{Tj\omega+1}=P(\omega)+jQ(\omega)$<br>$P(\omega)=\frac{T_d T\omega^2}{T^2\omega^2+1}$, $Q(\omega)=\frac{T_d\omega}{T^2\omega^2+1}$ | jQ(ω), $\omega=\omega_s=\frac{1}{T}$, G(jω), $T=\frac{T_d}{k_d}$, ω, ω = 0, 45°, ω = ∞, 0, $\frac{k_d}{2}$, $k_d$, P(ω) |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br>$M(\omega)=\frac{T_d\omega}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$<br>$L(\omega)=[20\lg T_d\omega-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}]$ [dB]<br>Wzory przybliżone:<br>$M(\omega)\approx T_d\omega$ dla $\omega\ll\frac{1}{T}$<br>$M(\omega)\approx\frac{T_d}{T}$ dla $\omega\gg\frac{1}{T}$<br>$M(\omega)=\frac{T_d}{T\sqrt{2}}$ dla $\omega=\frac{1}{T}$ | L(ω) [dB], $k_d=\frac{T_d}{T}$, 3 dB, 2, $20\lg k_d$, 20 dB/dek, 1, 0, $\frac{1}{T_d}$, $\omega_s=\frac{1}{T}$, ω [rad/s] |

Tablica 5.7, cd.



| Logarytmiczna charakterystyka fazowa | |
|---|---|
| $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\dfrac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{T\omega} =$ <br> $= \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}T\omega$ <br> Wzory przybliżone: <br> $\varphi(\omega) \approx \dfrac{\pi}{2} - T\omega \quad \text{dla } \omega \ll \dfrac{1}{T}$ <br> $\varphi(\omega) \approx \dfrac{1}{T\omega} \quad \text{dla } \omega \gg \dfrac{1}{T}$ <br> $\varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{4} \quad \text{dla } \omega = \dfrac{1}{T}$ |  |

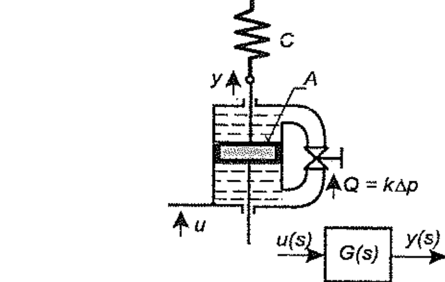
Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego członu różniczkującego są funkcjami nieliniowymi. Podobnie jak w przypadku członu inercyjnego, zastępuje się je charakterystykami asymptotycznymi. W tabl. 5.7 asymptotyczną charakterystykę fazową wyznaczono metodą siecznej.

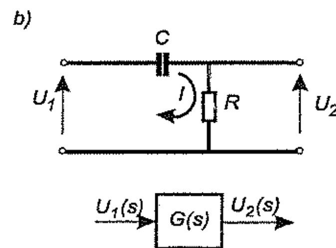



Rys. 5.7. Rzeczywisty człon różniczkujący jako szeregowe połączenie idealnego członu różniczkującego i członu inercyjnego

Asymptotyczne charakterystyki logarytmiczne amplitudową i fazową można także wykreślić, traktując rzeczywisty człon różniczkujący jako układ będący szeregowym połączeniem idealnego członu różniczkującego i członu inercyjnego (rys. 5.7).

Przykłady urządzeń, które mogą być traktowane jako elementy różniczkujące rzeczywiste, przedstawiono na rys. 5.8.




Rys. 5.8. Przykłady elementów różniczkujących rzeczywistych: a) amortyzator hydrauliczny, b) czwórnik RC



**Przykład 5.10**

Sformułować równanie ruchu i wyznaczyć odpowiedź skokową hydraulicznego amortyzatora wg rys. 5.8a, jeżeli jego wielkością wejściową jest przemieszczenie $u$ cylindra, wielkością wyjściową – przemieszczenie $y$ tłoczyska, zakładając nieściśliwość oleju. Komory cylindra połączone są ze sobą przewodem ze zwężką, przez którą może przepływać olej (w innych rozwiązaniach zwężkę tę stanowi szczelina między tłokiem i cylindrem lub otwór w tłoku).

Tłoczysko z tłokiem osiąga położenie spoczynkowe ($y = 0$) tylko wtedy, kiedy sprężyna o sztywności $C$ nie jest napięta. Ze względu na nieściśliwość oleju, skokowa zmiana wielkości wejściowej powoduje, z chwilą jej wprowadzenia, powstanie takiej samej zmiany wielkości wyjściowej, z czym związane jest ugięcie sprężyny. Siła ściśniętej (lub rozciągniętej) sprężyny, działając na tłok, wywołuje powstanie różnicy ciśnień w komorach cylindra i przetłaczanie oleju przez zwężkę z komory o ciśnieniu wyższym do drugiej komory, dzięki czemu następuje stopniowe rozprężanie sprężyny i powrót tłoka do położenia początkowego. Należy założyć, że w zwężce kształtuje się przepływ laminarny, tzn. strumień objętości $Q$ jest proporcjonalny do wywołującej go różnicy ciśnień $\Delta p$, a więc $Q = k\Delta p$ ($k$ – współczynnik proporcjonalności, stała zwężki).

*Rozwiązanie*

W tym przypadku podstawą wyznaczenia równania ruchu jest zasada ciągłości. Przepływ przez zwężkę umożliwia ruch tłoka względem cylindra, a więc

$$A\left[\frac{du(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}\right] = Q = k\Delta p$$

Uwzględniając, że

$$\Delta p = \frac{C}{A}y$$

gdzie $A$ – powierzchnia czynna tłoka, otrzymuje się równanie ruchu

$$\frac{A^2}{kC}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{A^2}{kC}\frac{du(t)}{dt}$$

Jest to więc równanie ruchu elementu różniczkującego rzeczywistego o stałych czasowych $T = T_d = \dfrac{A^2}{kC}$ (wzmocnienie dynamiczne $k_d = 1$).

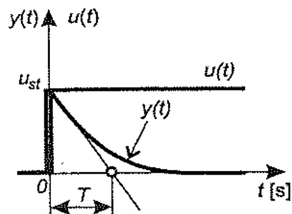
Transmitancja operatorowa elementu ma postać

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Ts}{Ts+1}$$

Odpowiedź skokową

$$y(t)=L^{-1}\left[u_{st}\frac{Ts}{s(Ts+1)}\right]=u_{st}\,e^{-\frac{t}{T}}$$

przedstawiono na rys. 5.9.




Rys. 5.9. Odpowiedź skokowa amortyzatora hydraulicznego

**Przykład 5.11**

Obliczyć napięcie $U_2$ na zaciskach rezystora $R$ czwórnika RC, przedstawionego na rys. 5.8b, przy nieskończenie dużej rezystancji między tymi zaciskami, po upływie 10 s od skokowej zmiany napięcia $U_1$ o wartości 2 V, zakładając zerowe warunki początkowe oraz $R=1$ MΩ, $C=10\,\mu$F.

*Rozwiązanie*

Wyznaczmy równanie ruchu elementu. Przez kondensator i przez rezystor płynie prąd o takim samym natężeniu $I$, zatem można napisać

$$I(t)=C\frac{d\left[U_1(t)-U_2(t)\right]}{dt}=\frac{U_2(t)}{R}$$

Po przekształceniu otrzymuje się

$$RC\frac{dU_2(t)}{dt}+U_2(t)=RC\frac{dU_1(t)}{dt}$$

Jest to równanie elementu różniczkującego rzeczywistego o stałych czasowych $T=T_d=RC=10$ s (wzmocnienie dynamiczne $k_d=1$).

Odpowiedź skokowa elementu ma postać

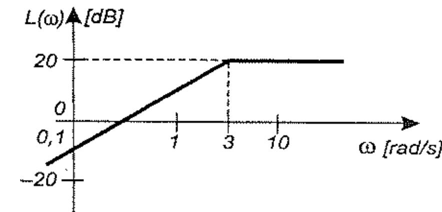
$$U_2(t)=U_{1st}\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Dla $t=10$ s, $U_2=0{,}364\cdot 2$ V $=0{,}728$ V.



**Ćwiczenie 5.7**

Na rys. 5.10 przedstawiono asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudowo-fazową członu różniczkującego rzeczywistego. Określić stałą czasową $T_d$ działania różniczkującego, stałą czasową $T$ inercji oraz wzmocnienie dynamiczne $k_d$.

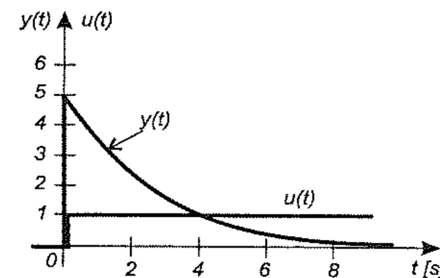



Rys. 5.10. Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowo-fazowa (ćwicz. 5.7)

Odp.: $T_d=3{,}33$ s, $T=0{,}33$ s, $k_d=10$.

**Ćwiczenie 5.8**

Na rys. 5.11 przedstawiono odpowiedź skokową rzeczywistego elementu różniczkującego o transmitancji operatorowej $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{T_d s}{Ts+1}$. Wyznaczyć stałą czasową $T_d$ działania różniczkującego, stałą czasową $T$ inercji oraz wzmocnienie dynamiczne $k_d$.




Rys. 5.11. Odpowiedź skokowa rzeczywistego elementu różniczkującego (ćwicz. 5.8)

Odp.: $T_d=15$ s, $T=3$ s, $k_d=5$.

### 5.1.6. CZŁON OSCYLACYJNY

Rozpatrzono właściwości członu oscylacyjnego, wykorzystując jego równanie dynamiki w postaci

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2y(t)=k\omega_0^2u(t) \tag{5.12}$$

Charakterystykę statyczną członu oscylacyjnego opisuje równanie

$$y=ku \tag{5.13}$$

Poddając równanie dynamiki transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych, otrzymano transmitancję operatorową

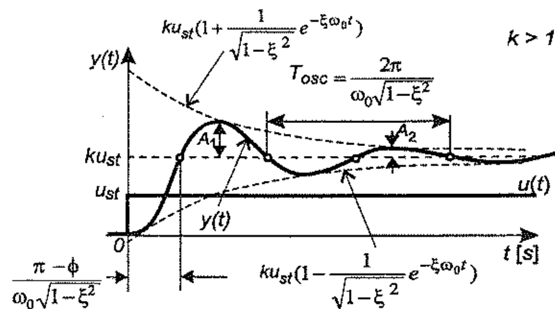
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2} \tag{5.14}$$

Korzystając z tablicy transformat, wyznaczono charakterystykę skokową

$$\begin{aligned}y(t)&=L^{-1}\left(u_{st}\frac{1}{s}\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}\right)=\\&=k\,u_{st}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi)\right]\end{aligned} \tag{5.15}$$

gdzie $\phi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$. (5.16)

Odpowiedź skokową członu oscylacyjnego dla $0<\xi<1$ pokazano na rys. 5.12.




Rys. 5.12. Odpowiedź skokowa członu oscylacyjnego



Z równania (5.15) wynika, że odpowiedź skokowa jest różnicą funkcji stałej o wartości $ku_{st}$ i funkcji sinusoidalnej $A\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi)$, której:

- amplituda $A$ maleje wykładniczo w funkcji czasu

$$A=ku_{st}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t} \tag{5.17}$$

- okres oscylacji

$$T_{osc}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \tag{5.18}$$

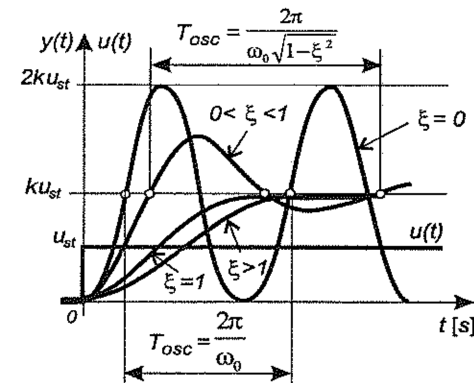
rośnie wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia $\xi$ od wartości $2\pi/\omega_0$ przy $\xi=0$ do nieskończoności przy $\xi=1$,

- dodatnie przesunięcie fazowe

$$\phi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

względem sinusoidy $\sin\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t$ przy wzroście tłumienia maleje od wartości $\pi/2$ przy $\xi=0$ do zera przy $\xi=1$.

Wpływ wartości współczynnika tłumienia $\xi$ na charakter odpowiedzi skokowej ilustruje rys. 5.13.




Rys. 5.13. Wpływ wartości współczynnika tłumienia $\xi$ na charakter odpowiedzi skokowej członu oscylacyjnego

Na podstawie odpowiedzi skokowej można wyznaczyć parametry $\omega_0$, $\xi$, $k$ członu. Wyznaczając stosunek amplitud odległych od siebie o okres oscylacji $T_{osc}$

$$A_1 = k u_{st} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t_1}, \quad A_2 = k u_{st} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 (t_1 + T_{osc})} \tag{5.19}$$

gdzie $t_1$ to chwila, w której występuje amplituda $A_1$, otrzymuje się

$$\frac{1}{T_{osc}} \ln \frac{A_1}{A_2} = \xi\omega_0 \tag{5.20}$$

Oznaczając lewą stronę równania (5.20) przez $\alpha$, otrzymuje się zależność

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0} \tag{5.21}$$

Z zależności (5.21) i (5.18) wynika wzór

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_{osc}}\right)^2 + \alpha^2} \tag{5.22}$$

umożliwiający wyznaczenie pulsacji $\omega_0$ na podstawie danych doświadczalnych. Znając wartość $\omega_0$, z zależności (5.21) wyznacza się wartość współczynnika tłumienia $\xi$. Zatem, mierząc okres oscylacji i dwie kolejne amplitudy, można wyznaczyć pulsację $\omega_0$ i współczynnik tłumienia $\xi$, a na podstawie ustalonej wartości odpowiedzi – wzmocnienie $k$.

Wykorzystując zależność $s = j\omega$, na podstawie transmitancji operatorowej (5.14) otrzymuje się **transmitancję widmową** członu oscylacyjnego

$$G(j\omega) = \frac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + 2j\xi\omega_0\omega + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\,2\xi\omega_0\omega} = \frac{k\omega_0^2[(\omega_0^2 - \omega^2) - j\,2\xi\omega_0\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2} \tag{5.23}$$

a stąd:

$$P(\omega) = \frac{k\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2} \tag{5.24}$$

$$Q(\omega) = \frac{-2k\xi\omega_0^3\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2} \tag{5.25}$$



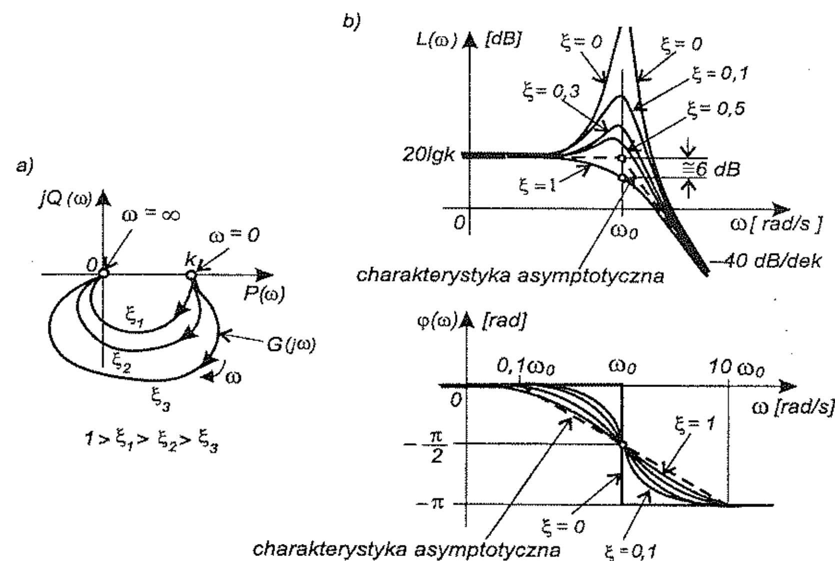
oraz

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{k\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}} \tag{5.26}$$

$$L(\omega) = [20\lg k\omega_0^2 - 20\lg\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}\,]\ [\text{dB}] \tag{5.27}$$

$$\arg G(j\omega) = \varphi(\omega) = -\text{arctg}\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{5.28}$$

Przebiegi charakterystyk częstotliwościowych członu oscylacyjnego zależą od wartości współczynnika tłumienia, co pokazano na rys. 5.14. Ze względu na ich złożony kształt, w praktyce wykorzystuje się charakterystyki logarytmiczne asymptotyczne.




Rys. 5.14. Charakterystyki częstotliwościowe członu oscylacyjnego: a) charakterystyki amplitudowo-fazowe, b) charakterystyki logarytmiczne

**Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa** składa się z dwóch półprostych, określonych równaniami:

– dla $\omega \le \omega_0$ jest to równanie linii prostej równoległej do osi odciętych

$$L(\omega) = 20\lg k\ [\text{dB}] \tag{5.29}$$

– dla $\omega > \omega_0$ jest to równanie linii prostej o nachyleniu –40 dB na dekadę

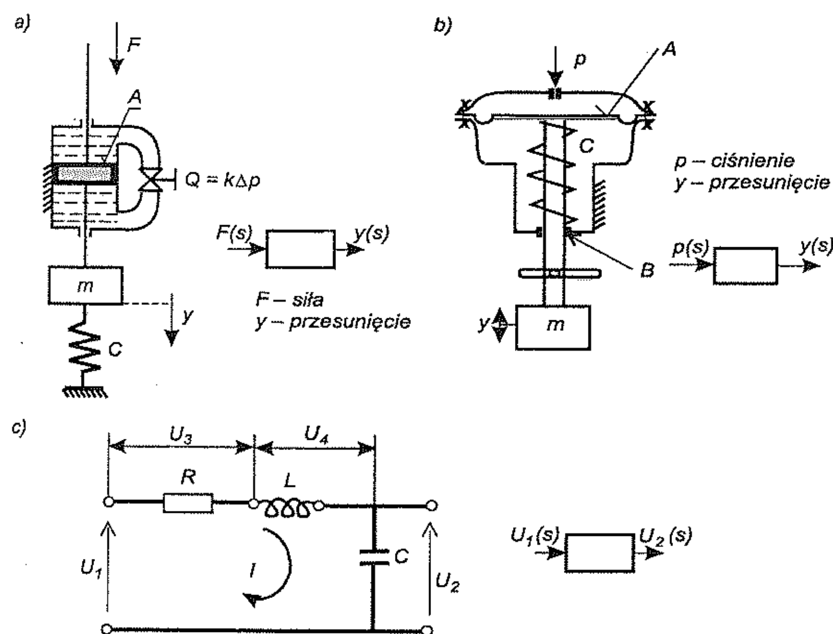
$$L(\omega) = \left( 20\lg k - 40\lg \frac{\omega}{\omega_0} \right) \text{ [dB]} \tag{5.30}$$

Tworzące charakterystykę asymptotyczną części tych linii stykają się przy $\omega = \omega_0$.

**Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka fazowa** członu oscylacyjnego składa się z dwóch półprostych ($\varphi(\omega) = 0$ i $\varphi(\omega) = -\pi$), równoległych do osi rzędnych, i łączącego je odcinka linii prostej, pokrywającego się z charakterystykami rzeczywistymi w punkcie ich przegięcia o współrzędnych ($\omega_0, -\pi/2$).

Podobnie jak w przypadku członów inercyjnych, stosowane są dwie metody wykreślania środkowego odcinka charakterystyki asymptotycznej – metoda siecznej albo metoda stycznej. Metoda siecznej polega na połączeniu odcinkiem prostej punktów o współrzędnych ($0{,}1\omega_0, 0$) i ($10\omega_0, -\pi$), metoda stycznej – punktów ($\omega_0/4{,}81, 0$) i ($4{,}81\omega_0, -\pi$) (linia przechodząca przez te punkty jest styczną do rzeczywistej logarytmicznej charakterystyki fazowej dla $\xi = 1$ w punkcie przegięcia).

Na rys. 5.15 przedstawiono przykłady urządzeń, które przy odpowiednich założeniach mogą być traktowane jako elementy oscylacyjne.




Rys. 5.15. Przykłady elementów oscylacyjnych: a) zespół masa–tłumik–sprężyna, b) siłownik pneumatyczny, c) czwórnik RLC



**Przykład. 5.12**

Wyznaczyć transmitancję operatorową czwórnika RLC przedstawionego na rys. 5.15c, przy założeniu, że rezystancja między zaciskami wyjściowymi jest nieskończenie wielka.

*Rozwiązanie*

Jeżeli $U_3(t) = RI(t)$, $U_4(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt}$, $I(t) = C\dfrac{dU_2(t)}{dt}$, to z zależności

$$U_1(t) = U_2(t) + U_3(t) + U_4(t)$$

wynika równanie ruchu elementu oscylacyjnego

$$\frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_2(t)}{dt} + \frac{1}{LC}U_2(t) = \frac{1}{LC}U_1(t)$$

w którym:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \xi = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad k = 1$$

Zatem transmitancja operatorowa czwórnika RLC ma postać

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

**Przykład 5.13**

Wyznaczyć równanie ruchu elementu wg rys. 5.15b, zakładając, że wielkością wejściową jest ciśnienie $p$ w komorze siłownika, a wyjściową – położenie $y$ tłoczyska siłownika. Jaki warunek musi być spełniony, aby skokowa zmiana wielkości wejściowej wywołała aperiodyczną zmianę wielkości wyjściowej. Parametry siłownika: powierzchnia efektywna membrany $A$, sztywność sprężyny $C$, masa części ruchomych siłownika $m$, współczynnik tarcia lepkiego w dławicy siłownika $B$.

*Rozwiązanie*

Zależność wielkości wyjściowej od wejściowej wynika z równania równowagi sił działających na ruchome części siłownika. Siła wynikająca z działania ciśnie-

nia (nadciśnienia) $p$ na powierzchnię $A$ membrany, ściskając sprężynę o sztywności $C$, powoduje wysuwanie tłoczyska o wartość $y$ od stanu początkowego. Sile ciśnieniowej, oprócz siły sprężyny $Cy$, przeciwstawia się siła bezwładności zespołu wprawianego w ruch $m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ oraz siła tarcia $B\frac{dy(t)}{dt}$. Równanie równowagi sił ma postać

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+Cy(t)=Ap(t)$$

lub po przekształceniu

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{B}{m}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{C}{m}y(t)=\frac{A}{m}p(t)$$

Jest to równanie ruchu elementu oscylacyjnego o postaci (5.12), w którym

$$\omega_0=\sqrt{\frac{C}{m}},\quad \xi=\frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{mC}},\quad k=\frac{A}{C}$$

Aby przebieg przejściowy był aperiodyczny, musi być spełniony warunek

$$\xi=\frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{mC}}\geq 1$$

Spełnienie tego warunku zapewni mniejsze zużycie części ruchomych siłownika.

**Ćwiczenie 5.9**

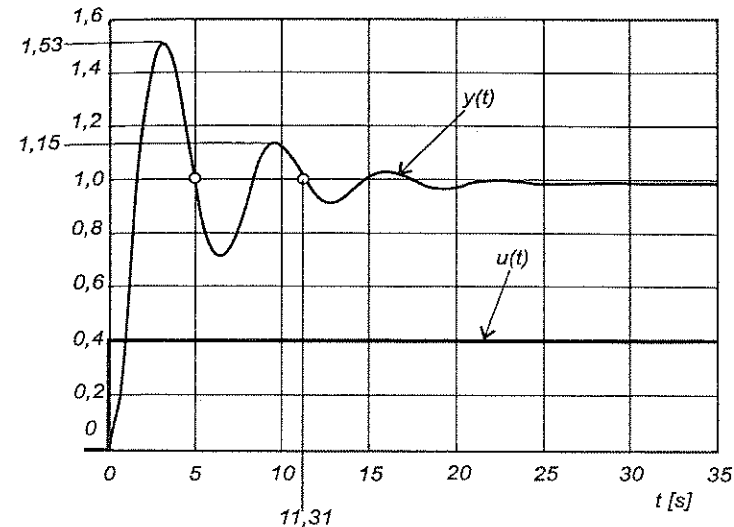
Wyznaczyć równanie dynamiki elementu wg rys. 5.15a, zakładając, że wielkością wejściową jest siła $F$ działająca na tłoczysko, a wyjściową – położenie $y$ zespołu ruchomego.

Odp.: $m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{A^2}{k}\frac{dy(t)}{dt}+Cy(t)=F(t)$.

**Ćwiczenie 5.10**

Na rys. 5.16 przedstawiono wykres odpowiedzi skokowej elementu oscylacyjnego o transmitancji $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$. Wyznaczyć parametry tego elementu.






Rys. 5.16. Odpowiedź skokowa elementu oscylacyjnego (ćwicz. 5.10)

Odp.: $k=2{,}5$, $\omega_0=1$ rad/s, $\xi=0{,}2$.

### 5.1.7. CZŁON OPÓŹNIAJĄCY

Człon opóźniający odtwarza na wyjściu przebieg wielkości wejściowej $u(t)$ ze stałym opóźnieniem $T_0$ (zwanym opóźnieniem transportowym), co wyraża równanie ruchu:

$$y(t)=u(t-T_0) \tag{5.31}$$

Poddając obie strony równania (5.31) przekształceniu Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych i wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie rzeczywistej, otrzymuje się transmitancję operatorową:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=e^{-T_0 s} \tag{5.32}$$

Zestawienie charakterystyk członu opóźniającego zawiera tabl. 5.8.

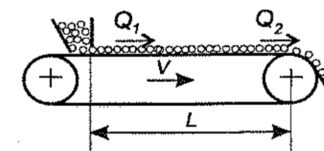
Tablica 5.8

**Charakterystyki członu opóźniającego**

| | |
|---|---|
| Równanie dynamiki $y(t) = u(t - T_0)$ | |
| Charakterystyka statyczna<br>$y = u$ | |
| Transmitancja operatorowa<br>$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-T_0 s}$ | |
| Odpowiedź skokowa<br>$y(t) = L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}e^{-T_0 s}\right] = u_{st} \cdot 1(t - T_0)$ | |
| Transmitancja widmowa<br>$G(j\omega) = e^{-jT_0\omega}$<br>$P(\omega) = \cos(-T_0\omega)$<br>$Q(\omega) = \sin(-T_0\omega)$ | |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br>$M(\omega) = 1$<br>$L(\omega) = 0$ [dB] | |
| Logarytmiczna charakterystyka fazowa<br>$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -T_0\omega$ | |



Elementami opóźniającymi są najczęściej urządzenia do transportu substancji. Przykład takiego urządzenia – przenośnika taśmowego przedstawiono na rys. 5.17.




Rys. 5.17. Schemat przenośnika taśmowego

Jeżeli jako wielkość wejściowa będzie traktowany strumień masy $Q_1$ materiału sypkiego na początku transportera, a jako wielkość wyjściowa – strumień masy $Q_2$ na końcu transportera, to zależność wielkości wyjściowej od wejściowej będzie miała postać

$$Q_2(t) = Q_1\left(t - \frac{L}{V}\right)$$

gdzie: $V$ – prędkość taśmy transportera, $L$ – długość drogi przenoszenia substancji. Jest to więc równanie ruchu elementu opóźniającego z czasem opóźnienia $T_0 = L/V$.

## 5.2. CZŁONY KOREKCYJNE (KOREKTORY)

W celu uzyskania pożądanych właściwości układów regulacji wprowadza się do nich elementy o odpowiednio ukształtowanych właściwościach dynamicznych, zwane korektorami. Są one kombinacjami omówionych w rozdz. 5.1 członów elementarnych. Do najczęściej wykorzystywanych korektorów należą:
- korektory o działaniu proporcjonalnym;
- korektory przyspieszające fazę, tzw. korektory dodatniofazowe;
- korektory opóźniające fazę, tzw. korektory ujemnofazowe.

Korektor o działaniu proporcjonalnym nie wymaga omówienia – jest to element o właściwościach członu proporcjonalnego. Do analizy właściwości korektorów przesuwających fazę przydatny jest model tzw. idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego.

### 5.2.1. IDEALNY CZŁON PROPORCJONALNO-RÓŻNICZKUJĄCY

Tworząc połączenie równoległe idealnego członu różniczkującego i członu proporcjonalnego o wzmocnieniu 1 (rys. 5.18), uzyskuje się układ o transmitancji operatorowej

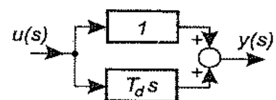
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = T_d s + 1 \tag{5.33}$$

odpowiadającej równaniu ruchu

$$y(t)=T_d\frac{du(t)}{dt}+u(t) \tag{5.34}$$

Człon o takim równaniu nazywa się idealnym członem proporcjonalno-różniczkującym. Idealny człon proporcjonalno-różniczkujący, podobnie jak idealny człon różniczkujący, nie ma realizacji technicznej. Znajomość jego charakterystyk jest jednak przydatna do analizy właściwości elementów złożonych, w których można wydzielić jako jeden ze składników działanie idealne proporcjonalno-różniczkujące.

Charakterystyki idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego zestawiono w tabl. 5.9. Oznaczono numerami: 1 i 2 – rzeczywistą i asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudową, 3 – rzeczywistą logarytmiczną charakterystykę fazową, 4 – asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę fazową wyznaczoną metodą siecznej.




Rys. 5.18. Schemat blokowy idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego

Rzeczywiste charakterystyki logarytmiczne amplitudowa i fazowa idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego są nieliniowe. Są one symetrycznym obrazem, względem osi pulsacji, charakterystyk elementu inercyjnego. Podobnie jak w przypadku członu inercyjnego, wykorzystuje się uproszczone postacie tych charakterystyk – charakterystyki asymptotyczne. Charakterystykę fazową wyznacza się metodą siecznej lub metodą stycznej.

Tablica 5.9

**Charakterystyki idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego**

| | |
|---|---|
| Równanie dynamiki $y(t)=T_d\frac{du(t)}{dt}+u(t)$ | |
| Charakterystyka statyczna<br>$y=u$ | y, 45°, 0, u |
| Transmitancja operatorowa<br>$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=T_d s+1$ | u(s) → $T_d s+1$ → y(s) |





| | |
|---|---|
| Odpowiedź skokowa<br>$y(t)=L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}(T_d s+1)\right]=$<br>$=u_{st}[T_d\delta(t)+1(t)]$ | y(t), u(t), $u_{st}$, 0, t [s] |
| Transmitancja widmowa<br>$G(j\omega)=T_d j\omega+1$<br>$P(\omega)=1$<br>$Q(\omega)=T_d\omega$ | jQ(ω), G(jω), ω = ∞, $\omega=\omega_s=\frac{1}{T_d}$, ω = 0, 45°, 0, 1, P(ω) |
| Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa<br>$M(\omega)=\sqrt{T_d^2\omega^2+1}$<br>$L(\omega)=20\lg\sqrt{T_d^2\omega^2+1}$ [dB]<br>Charakterystyki asymptotyczne:<br>– dla $\omega\le\omega_s=1/T_d$ $L(\omega)=0$ [dB]<br>– dla $\omega>\omega_s$ $L(\omega)=20\lg T_d\omega$ [dB] | L(ω) [dB], $\omega_s=\frac{1}{T_d}$, 20 dB/dek, 3 dB, 1, 2, 0, $\omega_s$, ω [rad/s] |
| Logarytmiczna charakterystyka fazowa<br>$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=\mathrm{arctg}T_d\omega$<br>$\varphi(0)=0$<br>$\varphi(\omega_s=1/T_d)=\pi/4$<br>$\varphi(\infty)=\pi/2$ | φ(ω) [rad], $\omega_s=\frac{1}{T_d}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 3, 4, 0, $0{,}1\omega_s$, $\omega_s$, $10\omega_s$, ω [rad/s] |

## 5.2.2. KOREKTOR DODATNIOFAZOWY

Korektorem dodatniofazowym nazywa się człon o transmitancji

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1} \tag{5.35}$$

jeżeli $T_1 > T_2$. Właściwości tego członu zależą od stosunku stałych czasowych $T_1$ i $T_2$.

Charakterystykę statyczną członu można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie transmitancji, korzystając z zależności (3.8). Jest to równanie

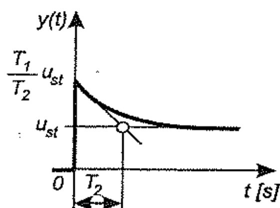
$$y = u \tag{5.36}$$

Odpowiedź skokową członu (rys. 5.19) można wyrazić jako sumę odpowiedzi rzeczywistego członu różniczkującego i członu inercyjnego:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}\right] = L^{-1}\left[u_{st}\frac{1}{s}\left(\frac{T_1 s}{T_2 s+1}+\frac{1}{T_2 s+1}\right)\right] = \\ &= u_{st}\left(1+\frac{T_1-T_2}{T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Granicznymi wartościami odpowiedzi skokowej są:

$$y(0+) = u_{st}\frac{T_1}{T_2}, \quad y(\infty) = u_{st} \tag{5.38}$$




Rys. 5.19. Odpowiedź skokowa korektora dodatniofazowego

Transmitancja widmowa ma postać

$$G(j\omega) = \frac{T_1 j\omega+1}{T_2 j\omega+1} = \frac{T_1T_2\omega^2+1+j\omega(T_1-T_2)}{T_2^2\omega^2+1}$$

oraz (5.39)

$$P(\omega) = \frac{T_1T_2\omega^2+1}{T_2^2\omega^2+1}, \qquad Q(\omega) = \frac{\omega(T_1-T_2)}{T_2^2\omega^2+1}$$

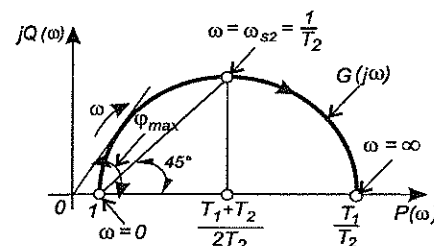
Charakterystyka amplitudowo-fazowa korektora dodatniofazowego jest półokręgiem, rozpoczynającym się przy $\omega = 0$ i kończącym przy $\omega = \infty$ na osi

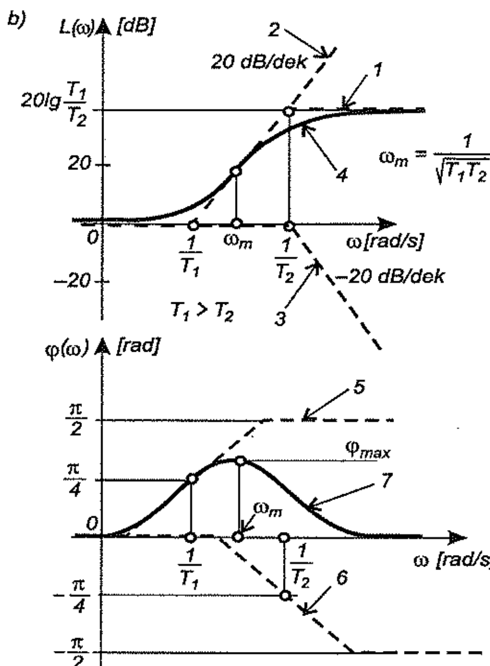


odciętych (rys. 5.20a). Część urojona $Q(\omega)$ osiąga maksimum przy pulsacji $\omega = \omega_{s2} = 1/T_2$.

a)

| $\omega$ | 0 | $\omega_{s2} = \frac{1}{T_2}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 1 | $\frac{T_1+T_2}{2T_2}$ | $\frac{T_1}{T_2}$ |
| $Q(\omega)$ | 0 | $\frac{T_1-T_2}{2T_2}$ | 0 |




Rys. 5.20. Charakterystyki częstotliwościowe korektora dodatniofazowego: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa, b) charakterystyki logarytmiczne

Moduł transmitancji widmowej ma postać

$$M(\omega) = \sqrt{[P(\omega)]^2+[Q(\omega)]^2} = \sqrt{\frac{T_1^2\omega^2+1}{T_2^2\omega^2+1}} \tag{5.40}$$

skąd wynika równanie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega) = \left(20\lg\sqrt{T_1^2\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{T_2^2\omega^2+1}\right) \text{ [dB]} \tag{5.41}$$

Jest to charakterystyka nieliniowa (linia 4 na rys. 5.20b), której przybliżeniem jest łatwa do wyznaczenia charakterystyka asymptotyczna. Korektor dodatniofazo-

wy można traktować jako szeregowe połączenie idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego i członu inercyjnego:

$$G(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = G_1(s)\, G_2(s)$$

gdzie:

$$G_1(s) = 1 + T_1(s), \quad G_2(s) = \frac{1}{1 + T_2 s}$$

Na podstawie zależności (3.36) i (3.37) można charakterystyki logarytmiczne korektora wyznaczyć jako sumę odpowiednich charakterystyk członów składowych.

Asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudową (linia 1 na rys. 5.20b) tworzy suma:

- asymptotycznej charakterystyki idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego (linia 2 na rys. 5.20b) o równaniach

  dla $\omega \leq \omega_{s1} = 1/T_1 \qquad L_1(\omega) = 0$ [dB],

  dla $\omega > \omega_{s1} = 1/T_1 \qquad L_1(\omega) = 20 \lg T_1 \omega$ [dB];

- asymptotycznej charakterystyki członu inercyjnego (linia 3 na rys. 5.20b) o równaniach

  dla $\omega \leq \omega_{s2} = 1/T_2 \qquad L_2(\omega) = 0$ [dB],

  dla $\omega > \omega_{s2} = 1/T_2 \qquad L_2(\omega) = -20 \lg T_2 \omega$ [dB].

Podobnie, logarytmiczna charakterystyka fazowa korektora jest sumą charakterystyk członów składowych

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = \operatorname{arctg} T_1 \omega - \operatorname{arctg} T_2 \omega \qquad (5.42)$$

Jest to również charakterystyka nieliniowa (linia 7 na rys. 5.20b). Charakterystykę asymptotyczną wyznacza się, sumując charakterystyki asymptotyczne idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego (linia 5 na rys. 5.20b) i członu inercyjnego (linia 6 na rys. 5.20b). Rzeczywista logarytmiczna charakterystyka fazowa korektora wg równania (5.42) ma maksimum przy pulsacji $\omega_m$, którą można wyznaczyć z równania

$$\left.\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_m} = \left|\frac{d}{d\omega}(\operatorname{arctg} T_1 \omega - \operatorname{arctg} T_2 \omega)\right|_{\omega_m} = 0$$

skąd

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \qquad (5.43)$$



Korektor dodatniofazowy w całym zakresie pulsacji realizuje dodatnie przesunięcie fazowe, którego maksimum występuje przy pulsacji $\omega = \omega_m$. Wartość tego maksymalnego przesunięcia fazowego wynika z równań (5.42) i (5.43)

$$\varphi_{max} = \varphi(\omega_m) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \qquad (5.44)$$

Zależy ona od stosunku stałych czasowych $T_1$ i $T_2$, np. dla $T_1/T_2 = 10 \quad \varphi_{max} \cong 54{,}9°$.

### 5.2.3. KOREKTOR UJEMNOFAZOWY

Korektorem ujemnofazowym nazywa się człon o transmitancji

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \qquad (5.45)$$

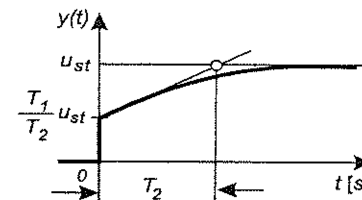
jeżeli $T_1 < T_2$.

Transmitancja operatorowa korektora ujemnofazowego jest taka sama, jak korektora dodatniofazowego; dlatego matematyczne postacie jego charakterystyk są również identyczne. Natomiast ze względu na inną relację między stałymi czasowymi $T_1$ i $T_2$, przebiegi tych charakterystyk, oprócz charakterystyki statycznej, są odmienne.

Odpowiedź skokową korektora ujemnofazowego (rys. 5.21) opisuje równanie (5.37). Ze względu na zależność $T_1 < T_2$ można je przekształcić na postać

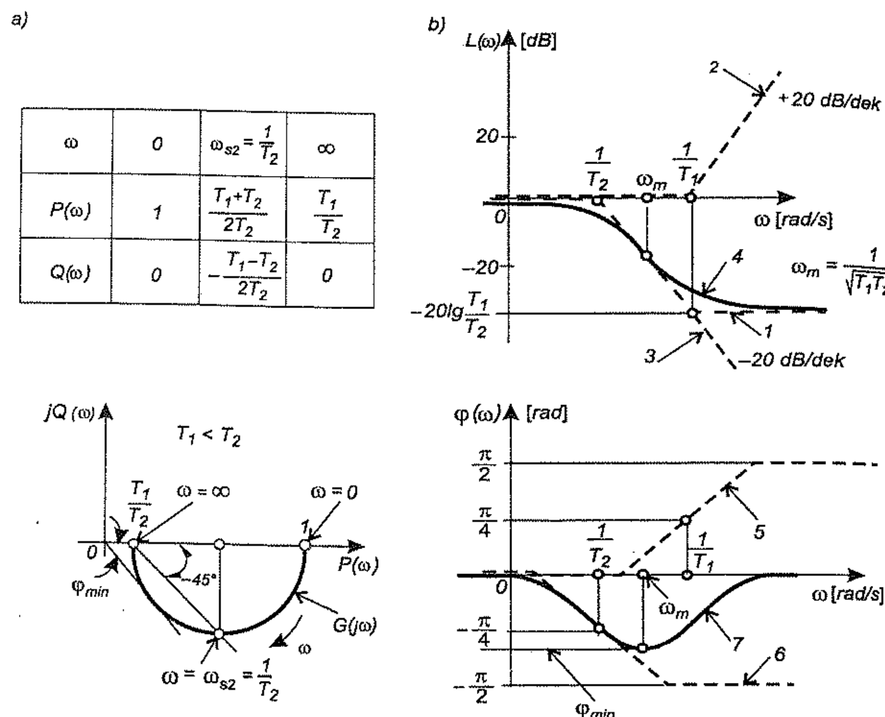
$$y(t) = u_{st}\left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) = u_{st}\left(1 - \frac{T_2 - T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \qquad (5.46)$$

Wyrażenia opisujące wartości graniczne odpowiedzi są identyczne, jak dla korektora dodatniofazowego, jednakże w tym przypadku $y(0+) < y(\infty)$.




Rys. 5.21. Odpowiedź skokowa korektora dodatniofazowego

Charakterystyki częstotliwościowe korektora ujemnofazowego przedstawiono na rys. 5.22.



| $\omega$ | 0 | $\omega_{s2}=\frac{1}{T_2}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 1 | $\frac{T_1+T_2}{2T_2}$ | $\frac{T_1}{T_2}$ |
| $Q(\omega)$ | 0 | $-\frac{T_1-T_2}{2T_2}$ | 0 |



Rys. 5.22. Charakterystyki częstotliwościowe korektora ujemnofazowego: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa; b) charakterystyki logarytmiczne: 2, 5 – asymptotyczne charakterystyki amplitudowa i fazowa członu proporcjonalno-różniczkującego, 3, 6 – asymptotyczne charakterystyki amplitudowa i fazowa członu inercyjnego, 1, 4 – asymptotyczna i rzeczywista charakterystyka amplitudowa korektora, 7 – rzeczywista charakterystyka fazowa korektora

Korektor ujemnofazowy w całym zakresie pulsacji realizuje ujemne przesunięcie fazowe, którego minimum występuje dla pulsacji $\omega=\omega_m$. Wartość tego minimalnego przesunięcia fazowego wynika z równań (5.42) i (5.43)

$$\varphi_{\min}=\varphi(\omega_m)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}=-\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \tag{5.47}$$

Korektor ujemnofazowy może być realizowany w wersji analogowej jako pasywny czwórnik RC albo zaimplementowany w regulatorach mikroprocesorowych lub sterownikach PLC.



## 5.3. CZŁONY NIEMINIMALNOFAZOWE

Dotychczas omawiano człony minimalnofazowe, tzn. takie, których licznik i mianownik transmitancji operatorowej mają miejsca zerowe o ujemnych częściach rzeczywistych. W przypadku takich członów znajomość charakterystyki amplitudowej wystarcza do określenia charakteru przebiegu charakterystyki fazowej. Właściwości tej nie mają człony nieminimalnofazowe, tj. człony, których licznik lub mianownik transmitancji operatorowej ma pierwiastki o dodatniej części rzeczywistej. Podstawowymi członami nieminimalnofazowymi są człony o transmitancjach:

$$G(s)=Ts-1 \tag{5.48}$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts-1} \tag{5.49}$$

$$G(s)=1-Ts \tag{5.50}$$

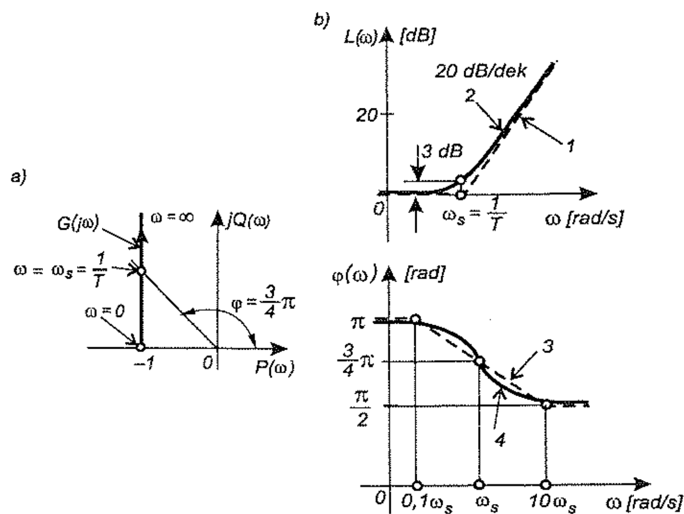
$$G(s)=\frac{1}{1-Ts} \tag{5.51}$$

Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=Ts-1$ (rys. 5.23) są opisane przez zależności:

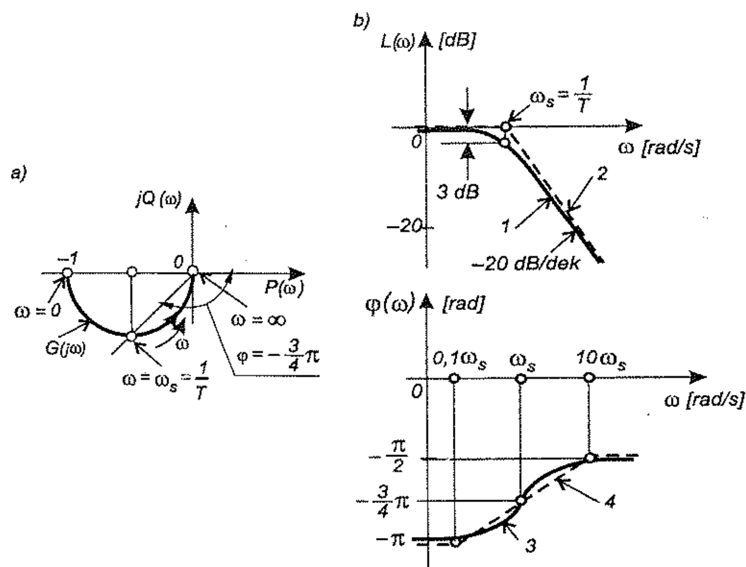
$$\begin{aligned} &P(\omega)=-1, && L(\omega)=20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}\\ &Q(\omega)=T\omega, && \varphi(\omega)=\pi-\operatorname{arctg}T\omega\\ &M(\omega)=\sqrt{T^2\omega^2+1} && \end{aligned} \tag{5.52}$$

Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=\dfrac{1}{Ts-1}$ (rys. 5.24) są opisane przez zależności:

$$\begin{aligned} &P(\omega)=-\frac{1}{T^2\omega^2+1}, && L(\omega)=-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}\\ &Q(\omega)=-\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}, && \varphi(\omega)=-\pi+\operatorname{arctg}T\omega\\ &M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} && \end{aligned} \tag{5.53}$$




Rys. 5.23. Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=Ts-1$ : a) charakterystyka amplitudowo-fazowa; b) charakterystyki logarytmiczne: amplitudowe asymptotyczna (1) i rzeczywista (2), fazowe asymptotyczna (3) i rzeczywista (4)

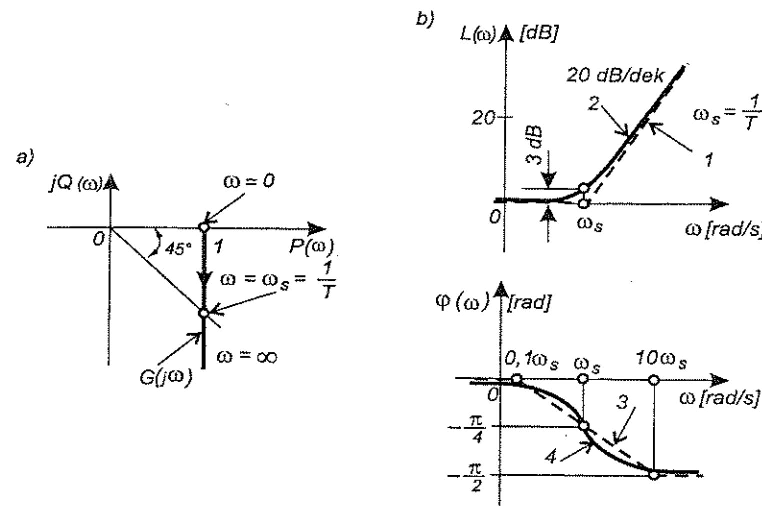



Rys. 5.24. Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=\frac{1}{Ts-1}$ : a) charakterystyka amplitudowo-fazowa; b) charakterystyki logarytmiczne: amplitudowe rzeczywista (1) i asymptotyczna (2), fazowe rzeczywista (3) i asymptotyczna (4)



Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=1-Ts$ (rys. 5.25) są opisane przez zależności:

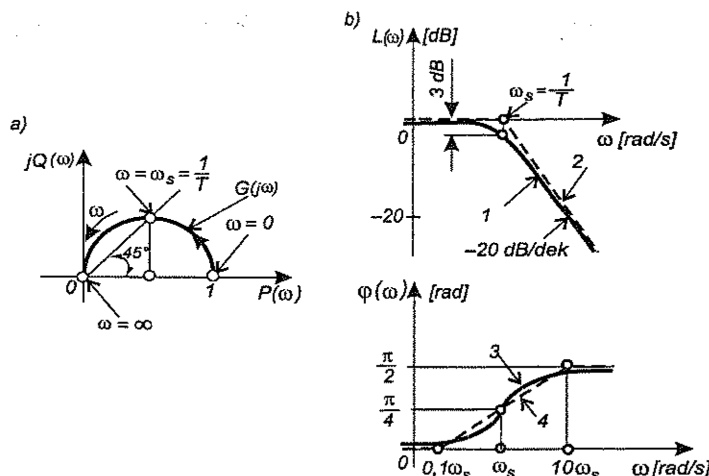
$$\begin{aligned} &P(\omega)=1, && L(\omega)=20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1} \\ &Q(\omega)=-T\omega, && \varphi(\omega)=-\operatorname{arctg} T\omega \\ &M(\omega)=\sqrt{T^2\omega^2+1} && \end{aligned} \tag{5.54}$$




Rys. 5.25. Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=1-Ts$ : a) charakterystyka amplitudowo-fazowa; b) charakterystyki logarytmiczne: amplitudowe asymptotyczna (1) i rzeczywista (2), fazowe asymptotyczna (3) i rzeczywista (4)

Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=\frac{1}{1-Ts}$ (rys. 5.26) są opisane przez zależności:

$$\begin{aligned} &P(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, && L(\omega)=-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1} \\ &Q(\omega)=\frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, && \varphi(\omega)=\operatorname{arctg} T\omega \\ &M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} && \end{aligned} \tag{5.55}$$

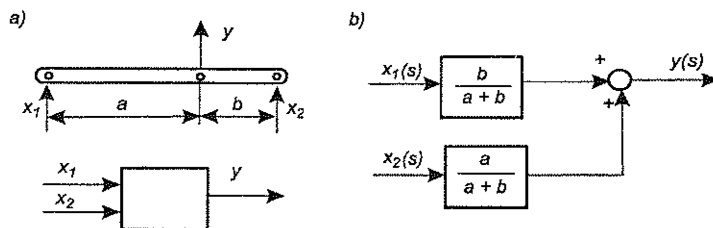



Rys. 5.26. Charakterystyki częstotliwościowe członu o transmitancji $G(s)=\frac{1}{1-Ts}$ : a) charakterystyka amplitudowo-fazowa; b) charakterystyki logarytmiczne: amplitudowe rzeczywista (1) i asymptotyczna (2), fazowe rzeczywista (3) i asymptotyczna (4)

## 5.4. ELEMENTY WIELOWEJŚCIOWE

Dotychczas omawiane elementy o jednym sygnale wejściowym i jednym wyjściowym przedstawiane są na schematach blokowych w postaci jednego bloku. Sposób przedstawiania elementów o kilku sygnałach wejściowych wyjaśniono na przykładach.

Rozpatrzone zostanie działanie dźwigni o dwóch sygnałach wejściowych i jednym sygnale wyjściowym, przedstawionej na rys. 5.27. Wielkościami wejściowymi elementu są przesunięcia $x_1$ i $x_2$ względem określonych pozycji początkowych, a wielkością wyjściową – przesunięcie $y$.




Rys. 5.27. Dźwignia jako element o dwóch sygnałach wejściowych: a) schemat ideowy, b) schemat blokowy



Wykorzystując zasadę superpozycji, można sygnał wyjściowy elementu traktować jako sumę przesunięcia $y_1(t)$ wywołanego sygnałem $x_1(t)$, gdy $x_2=0$

$$y_1(t)=\frac{b}{a+b}x_1(t)$$

i przesunięcia $y_2(t)$ wywołanego sygnałem $x_2(t)$, gdy $x_1=0$

$$y_2(t)=\frac{a}{a+b}x_2(t)$$

Równanie ruchu elementu, wyrażające zależność sygnału wyjściowego od sygnałów wejściowych, ma postać

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=\frac{b}{a+b}x_1(t)+\frac{a}{a+b}x_2(t)$$

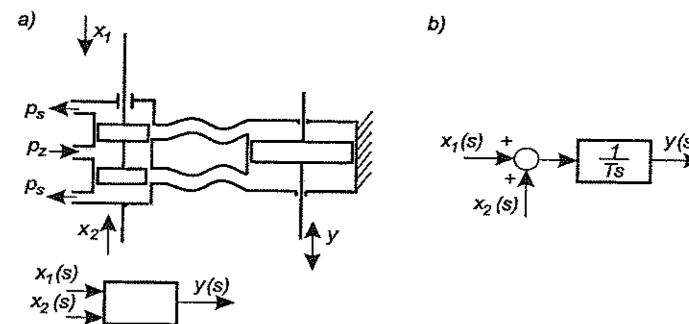
Po wykonaniu przekształcenia Laplace'a otrzymuje się równanie

$$Y(s)=\frac{b}{a+b}X_1(s)+\frac{a}{a+b}X_2(s)$$

któremu odpowiada schemat blokowy przedstawiony rys. 5.27b.

Rozważana dźwignia jest elementem proporcjonalnym o dwóch sygnałach wejściowych.

Innym przykładem elementu wielowejściowego jest serwomotor hydrauliczny (rys. 5.28). Jego wielkościami wejściowymi są przesunięcia $x_1$ i $x_2$ odpowiednio tłoczków i korpusu rozdzielacza względem określonej pozycji początkowej w ustalonym stanie układu, a wielkością wyjściową – przesunięcie $y$ tłoka siłownika.




Rys. 5.28. Serwomotor hydrauliczny o dwu sygnałach wejściowych: a) schemat ideowy, b) schemat blokowy

Zgodnie z ustaleniem w rozdz. 5.1.3 (przykład 5.8), dla rozważanego serwomotoru obowiązuje równanie ruchu

$$T\frac{dy(t)}{dt}=u(t)$$

gdzie $u$ jest odchyleniem suwaka rozdzielacza od pozycji, w której szczeliny doprowadzające olej do siłownika są zamknięte. Jeżeli przyjmie się pokazane na rysunku kierunki przemieszczeń tłoczków i korpusu rozdzielacza jako dodatnie, odchylenie $u$ będzie sumą odchyleń $x_1$ i $x_2$. Równanie ruchu można więc zapisać w postaci

$$T\frac{dy(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)$$

Po wykonaniu przekształcenia Laplace'a z uwzględnieniem zerowych warunków początkowych, otrzymuje się równanie

$$Ts\,Y(s)=X_1(s)+X_2(s)$$

skąd wynika zależność

$$Y(s)=[X_1(s)+X_2(s)]\frac{1}{Ts}$$

którą wyraża schemat blokowy przedstawiony na rys. 5.28b.

Tłumik hydrauliczny (rys. 5.29), omawiany w rozdz. 5.1.2 (przykład 5.4) i 5.1.5 (przykład 5.10), może być także wykorzystany jako element wielowejściowy, którego wielkościami wejściowymi są przemieszczenia $x_1$ cylindra i $x_2$ końca sprężyny względem określonej pozycji początkowej w ustalonym stanie układu, a wielkością wyjściową – przemieszczenie $y$ tłoka. Zgodnie z zasadą superpozycji, wielkość wyjściowa jest sumą wyników oddziaływań na element wielkości $x_1$ i wielkości $x_2$.

Oznaczmy wynik oddziaływania przemieszczenia $x_1$ (gdy $x_2=0$) na element jako $y_1$. Korzystając z ustaleń w przykładzie 5.10, można napisać

$$\frac{A^2}{\alpha C}\frac{dy_1(t)}{dt}+y_1(t)=\frac{A^2}{\alpha C}\frac{dx_1(t)}{dt} \tag{5.56}$$

Oznaczając wynik oddziaływania przemieszczenia $x_2$ (gdy $x_1=0$) na element jako $y_2$ i korzystając z ustaleń z przykładu 5.4, można napisać

$$\frac{A^2}{\alpha C}\frac{dy_2(t)}{dt}+y_2(t)=x_2(t) \tag{5.57}$$



Dla przyjętych jako dodatnie, pokazanych na rysunku, kierunków przemieszczeń $x_1$ i $x_2$:

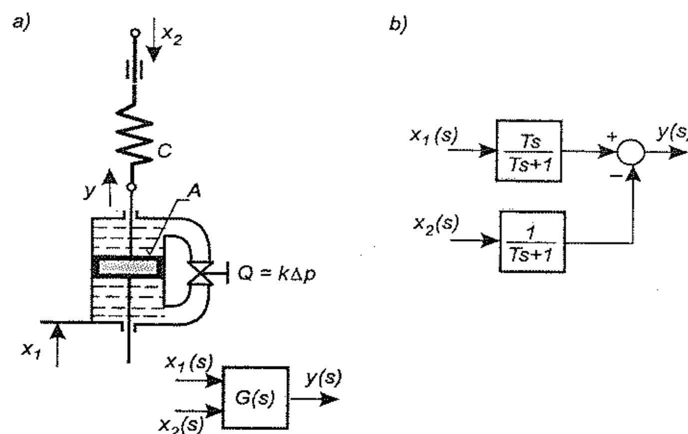
$$\begin{aligned}y(t)&=y_1(t)-y_2(t)\\Y(s)&=Y_1(s)-Y_2(s)\end{aligned} \tag{5.58}$$

Poddając równania (5.56) i (5.57) transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych, można wyznaczyć transformaty $y_1(s)$ i $y_2(s)$:

$$Y_1(s)=\frac{Ts}{Ts+1}X_1(s) \tag{5.59}$$

$$Y_2(s)=\frac{1}{Ts+1}X_2(s) \tag{5.60}$$

gdzie $T=\dfrac{A^2}{\alpha C}$.



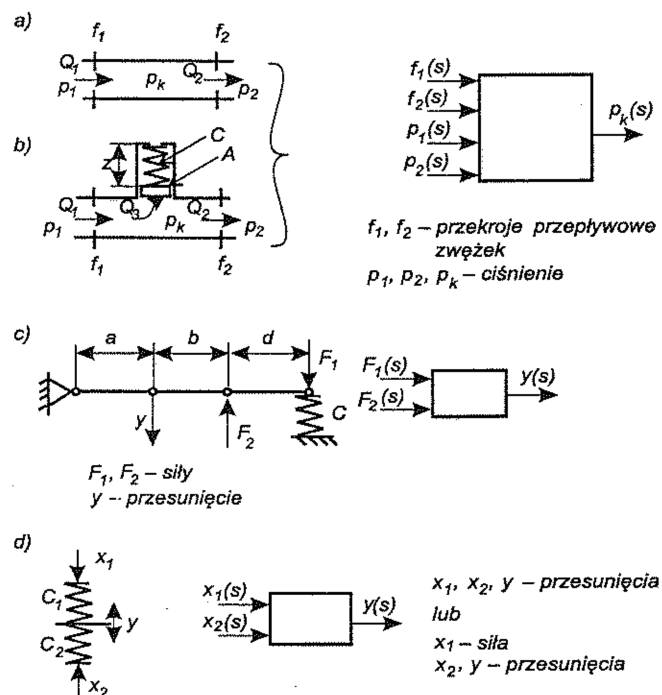

Rys. 5.29. Dwuwejściowy element hydrauliczny: a) schemat ideowo-konstrukcyjny, b) schemat blokowy; $A$ – powierzchnia czynna tłoka, $C$ – sztywność sprężyny, $Q$ – strumień objętości oleju przepływającego przez zwężkę, $k$ – stała zwężki

Ostatecznie na podstawie zależności (5.58–5.60) otrzymuje się równanie

$$Y(s)=\frac{Ts}{Ts+1}X_1(s)-\frac{1}{Ts+1}X_2(s)$$

któremu odpowiada schemat blokowy przedstawiony na rys. 5.29b.

Przykłady kilku innych elementów wielowejściowych przedstawiono na rys. 5.30.




Rys. 5.30. Przykłady elementów wielowejściowych: a) sztywna kaskada pneumatyczna, b) elastyczna kaskada hydrauliczna, c, d) elementy mechaniczne



# 6. ZASTOSOWANIE METODY SCHEMATÓW BLOKOWYCH DO ANALIZY WŁAŚCIWOŚCI UKŁADÓW AUTOMATYKI

Schemat blokowy układu automatyki jest formą zapisu matematycznego modelu danego układu, na podstawie której, wykorzystując zasady przedstawione rozdz. 4, można wyznaczyć transmitancję operatorową układu lub inne formy matematycznego opisu właściwości przyjętego modelu. W przypadku układów złożonych z wielu elementów o znanych lub łatwych do określenia właściwościach (np. wyrażonych w postaci transmitancji operatorowych), opracowanie schematu blokowego jest dogodną metodą formułowania matematycznego opisu całego układu. Schemat blokowy tworzy się na podstawie schematu ideowo-konstrukcyjnego układu, analizując obieg oddziaływań (obieg informacji) między sygnałem wejściowym i sygnałem wyjściowym układu. Schemat blokowy umożliwia ocenę roli i miejsca każdego elementu w występującym w danym układzie obiegu przekazywania i przetwarzania informacji.

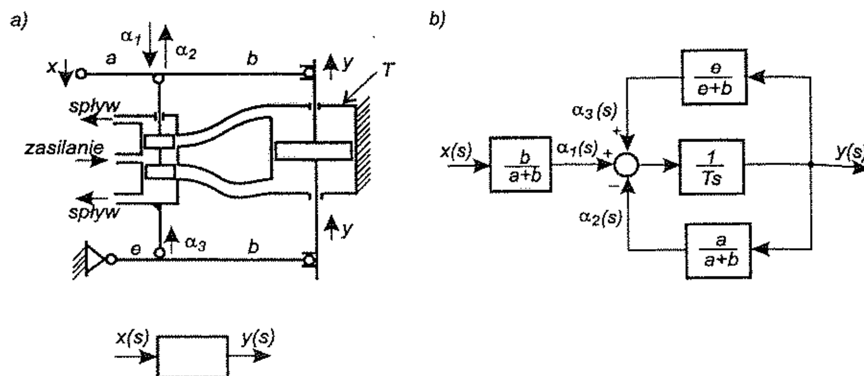
Prawidłowość opisu matematycznego układu, reprezentowanego przez jego schemat blokowy, zależy nie tylko od poprawności tego schematu w sensie jego struktury, lecz także od poprawności określenia funkcji pełnionych w układzie przez jego elementy składowe, czego wyrazem są transmitancje zapisane w blokach reprezentujących poszczególne elementy.

Metodykę tworzenia schematów blokowych układów i badania właściwości tych układów przedstawiono na przykładach.

## Przykład 6.1

W układzie złożonym z serwomotoru hydraulicznego i dwóch dźwigni (rys. 6.1a) sygnałem wejściowym jest przesunięcie $x$ końca dźwigni $a$–$b$, a wyjściowym – przesunięcie $y$ tłoka siłownika hydraulicznego. Wyznaczyć charakterystykę statyczną układu i odpowiedź na wymuszenie skokowe.

Dane: $T$ – stała czasowa serwomotoru, $b = 3a$, $e = 0{,}5a$.




Rys. 6.1. Schemat ideowo-konstrukcyjny (a) oraz schemat blokowy (b) układu do przykładu 6.1

*Rozwiązanie*

W celu zbudowania schematu blokowego danego układu należy:
- zidentyfikować występujące w nim obiegi oddziaływań, wywołane zmianą wartości sygnału wejściowego,
- wykryć elementy przetwarzające te oddziaływania (bloki na schemacie blokowym),
- ustalić transmitancje poszczególnych elementów.

Liczba elementów występujących w schemacie blokowym może być większa niż elementów konstrukcyjnych w schemacie ideowo-konstrukcyjnym, gdyż niektóre elementy konstrukcyjne mogą przetwarzać nie tylko jedno oddziaływanie. Rozważany układ zawiera serwomotor hydrauliczny – element całkujący i dwie dźwignie *a–b* i *b–e* – elementy proporcjonalne. W schemacie blokowym występują cztery elementy.

Obieg oddziaływań w układzie ustala się, zakładając, że na wejście układu, znajdującego się w stanie ustalonym, jest wprowadzany sygnał skokowy (przesunięcie $x$ lewego końca dźwigni *a–b*). Analizując skutki tej zmiany, należy założyć, że w dalszym ciągu położenie lewego końca dźwigni *a–b* się nie zmienia. Zatem, zmiana położenia lewego końca dźwigni *a–b* (zmiana wielkości wejściowej $x$) powoduje obrót tej dźwigni wokół prawego jej końca i powstanie przesunięcia $\alpha_1 = \frac{b}{a+b}x$ (na schemacie blokowym – rys. 6.1b – jest to element o sygnale wejściowym $x$, wyjściowym $\alpha_1$ i transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{b}{a+b}$), będącego jedną ze składowych (konieczność zastosowania w schemacie blokowym węzła sumacyjnego) wielkości wejściowej elementu całkującego. Przesunięcie $\alpha_1$ wywołuje ruch tłoka siłownika – zmianę sygnału wyjściowego $y$ elementu całkującego (na schemacie człon o transmitancji $G(s) = \frac{1}{Ts}$), który z kolei oddziałuje jednocześnie na dwa elementy (co nazywamy rozgałęzieniem sygnału, przedstawianym na schemacie w postaci węzła informacyjnego): dźwignię *a–b* i dźwignię *b–e*. Dźwignia *a–b* pełni rolę elementu proporcjonalnego, wytwarzającego sygnał wyjściowy $\alpha_2$ (punkt obrotu dźwigni znajduje się teraz na lewym jej końcu, a więc $\alpha_2 = \frac{a}{a+b}y$). Dźwignia *b–e* jest elementem proporcjonalnym, wytwarzającym sygnał wyjściowy $\alpha_3 = \frac{e}{e+b}y$. Dalsze zmiany wielkości $y$, powstałe pod wpływem składowych $\alpha_2$ i $\alpha_3$, przekazywane są na wejścia elementu całkującego poprzez omówione już elementy proporcjonalne. Sumowanie sygnałów $\alpha_1$, $\alpha_2$ i $\alpha_3$ z odpowiednimi znakami wyraża na schemacie węzeł sumacyjny.

Stosując reguły przekształcania schematów blokowych, otrzymuje się transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{a+b}\,\frac{\frac{1}{Ts}}{1+\frac{1}{Ts}\left[\frac{a}{a+b}-\frac{e}{e+b}\right]} \tag{6.1}$$

Po przekształceniach otrzymuje się

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T_1 s + 1} \tag{6.2}$$

gdzie:

$$k = \frac{e+b}{a-e}$$

$$T_1 = T\frac{(a+b)(e+b)}{b(a-e)}$$

Dla przyjętych danych otrzymuje się wartości: $k = 7$, $T_1 \cong 9{,}33T$.

Rozważany układ ma właściwości elementu inercyjnego o wzmocnieniu $k = 7$ i stałej czasowej przeszło dziewięciokrotnie większej od stałej czasowej serwomotoru. Z postaci transmitancji wynikają także wskazówki dla konstruktora – poprzez dobór długości ramion dźwigni i wielkości siłownika hydraulicznego, decydującej o jego stałej czasowej, można kształtować właściwości statyczne i dynamiczne układu.

Równanie charakterystyki statycznej układu ma postać

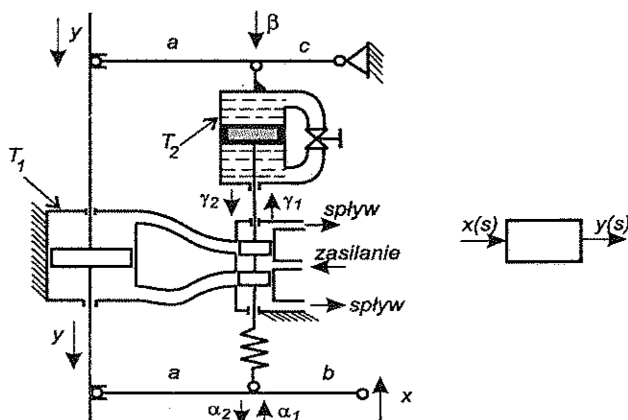
$$y = 7x$$

Skokowa zmiana wielkości wejściowej $x(t) = x_{st} \cdot 1(t)$ wywołuje zmianę przesunięcia $y$ zgodnie z równaniem

$$y(t) = 7\, x_{st}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

**Przykład 6.2**

Narysować schemat blokowy serwomechanizmu hydraulicznego przedstawionego na rys. 6.2. Ocenić jego właściwości statyczne i dynamiczne. Wielkością wejściową jest przesunięcie $x$ końca dźwigni, a wielkością wyjściową – przesunięcie $y$ tłoczyska siłownika hydraulicznego. Dane: $T_1$ – stała czasowa serwomotoru hydraulicznego, $T_2$ – stała czasowa tłumika hydraulicznego, $a$, $b$, $c$ – długość ramion dźwigni.

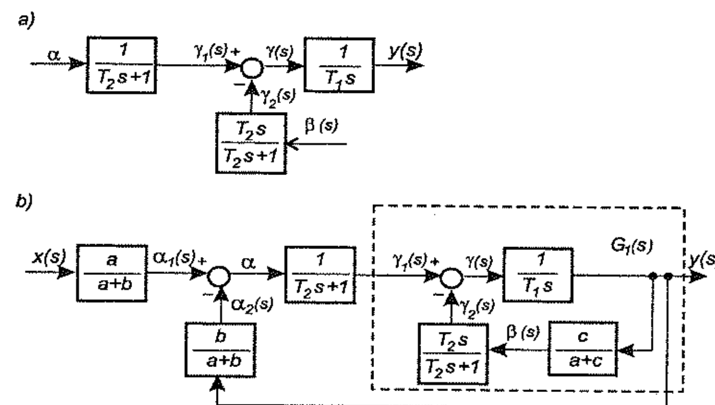



Rys. 6.2. Schemat serwomechanizmu hydraulicznego do przykładu 6.2

*Rozwiązanie*

Wprowadzona w stanie ustalonym układu skokowa zmiana wielkości wejściowej $x$ powoduje obrót dźwigni $a$–$b$ wokół jej lewego, nieruchomego w tym momencie końca, i ugięcie $\alpha_1 = \dfrac{a}{a+b}x$ sprężyny (na schemacie blokowym – rys. 6.3b – jest to element o sygnale wejściowym $x$, wyjściowym $\alpha_1$ i transmitancji operatorowej $G(s) = \dfrac{a}{a+b}$), wywołujące przemieszczenie $\gamma_1$ (działanie inercyjne tłumika hydraulicznego) tłoczków rozdzielacza hydraulicznego i ruch $y$ tłoka siłownika hydraulicznego. Tłoczysko siłownika oddziałuje jednocześnie na dwie dźwignie $a$–$c$ i $a$–$b$ (rozgałęzienie sygnału $y$). Przemieszczając lewy koniec dźwigni $a$–$b$, wywołuje przemieszczenie $\alpha_2 = \dfrac{b}{a+b}y$ (element o transmitancji $G(s) = \dfrac{b}{a+b}$); przemieszczając lewy koniec dźwigni $a$–$c$, wywołuje przemieszczenie $\beta = \dfrac{c}{a+c}y$ (element o transmitancji $G(s) = \dfrac{c}{a+c}$). Przemieszczenie $\alpha_2$ zmniejsza poprzednie przemieszczenie $\alpha_1$ (odejmowanie sygnałów $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$). Przemieszczenie $\beta$ wywołuje ruch $\gamma_2$ tłoka tłumika (działanie różniczkujące tłumika) i tym samym tłoczków rozdzielacza (odejmowanie sygnałów $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$). W rozważanym serwomechanizmie występuje dwuwejściowy element o sygnałach wejściowych $\alpha$ i $\beta$ i sygnale wyjściowym $\gamma$, analogiczny jak na rys. 5.29. Zmieniając w schemacie wg rys. 5.29 odpowiednio oznaczenia, otrzymuje się schemat elementu jak na rys. 6.3a. Sygnał $\gamma$ jest wejściowym sygnałem serwomotoru hydraulicznego – elementu całkującego o transmitancji $G(s) = \dfrac{1}{T_1 s}$, którego sygnał wyjściowy $y$ wywołuje już omówione skutki.

Umieszczając na schemacie blokowym wykryte elementy i niezbędne węzły, otrzymuje się schemat całego układu (rys. 6.3b).




Rys. 6.3. Schematy do przykładu 6.2: a) schemat blokowy tłumika hydraulicznego, b) schemat blokowy serwomechanizmu

W celu wyznaczenia transmitancji układu wyznaczmy najpierw transmitancję jego części objętej na rys. 6.3b linią przerywaną:

$$G_1(s) = \frac{\dfrac{1}{T_1 s}}{1 + \dfrac{1}{T_1 s}\,\dfrac{T_2 s}{T_2 s + 1}\,\dfrac{c}{a+c}}$$

Transmitancja całego układu ma postać

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{a}{a+b}\frac{\frac{1}{T_2 s+1}G_1(s)}{1+\frac{1}{T_2 s+1}G_1(s)\frac{b}{a+b}}=$$

$$=\frac{a}{a+b}\frac{1}{T_1T_2s^2+\left(T_1+T_2\frac{c}{a+c}\right)s+\frac{b}{a+b}}$$

Charakterystykę statyczną układu można wyznaczyć na podstawie transmitancji, korzystając z zależności (3.9):

$$y=x\lim_{s\to 0}G(s)=\frac{a}{b}x$$

Mianownik transmitancji układu jest trójmianem, podobnie jak w przypadku członu oscylacyjnego. W zależności od wartości wyrażenia $\Delta$

$$\Delta=\left(T_1+T_2\frac{c}{a+c}\right)^2-\frac{4bT_1T_2}{a+b}$$

układ może mieć właściwości członu oscylacyjnego, gdy $\Delta<1$, albo szeregowego połączenia dwóch członów inercyjnych o jednakowych stałych czasowych, gdy $\Delta=1$, albo szeregowego połączenia dwóch członów inercyjnych o różnych stałych czasowych, gdy $\Delta>1$. Dla rzeczywistych, a więc dodatnich, wartości parametrów jest $\Delta>1$.

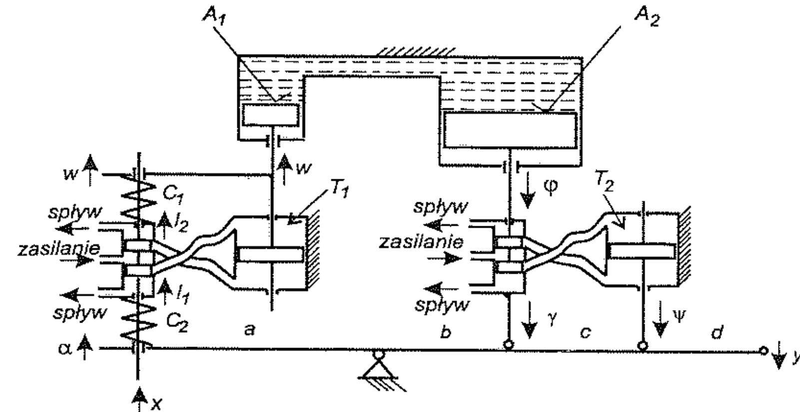
**Przykład 6.3**

Narysować schemat blokowy serwomechanizmu hydraulicznego przedstawionego na rys. 6.4. Wielkością wejściową jest przesunięcie *x*, wielkością wyjściową – przesunięcie *y*.

*Rozwiązanie*

Sygnał wejściowy układu – przesunięcie $x$ jest jedną ze składowych sygnału wejściowego serwomotoru hydraulicznego o stałej czasowej $T_1$ (o transmitancji $G(s) = 1/T_1 s$). Drugą składową sygnału wejściowego tego serwomotoru jest przemieszczenie $l$ korpusu rozdzielacza serwomotoru.

Po wprowadzeniu w stanie ustalonym skokowej zmiany wartości sygnału wejściowego *x*, tłok serwomotoru o stałej czasowej $T_1$ przemieszcza się (przemieszczenie $w$), oddziałując bezpośrednio na sprężynę o sztywności $C_1$ oraz poprzez przekładnię hydrauliczną tworzy składową $\varphi$ sygnału wejściowego serwomotoru o stałej czasowej $T_2$. Przemieszczenie $\psi$ tłoczyska serwomotoru o stałej $T_2$ wywołuje ruch dźwigni *a–b–c–d*, w wyniku czego powstają przemieszczenia $y$ (sygnał wyjściowy układu), $\gamma$ (druga składowa sygnału wejściowego serwomotoru o stałej $T_2$), $\alpha$ (powodujące ruch końca sprężyny o sztywności $C_2$).




Rys. 6.4. Schemat serwomechanizmu hydraulicznego do przykładu 6.3; $T_1$, $T_2$ – stałe czasowe serwomotorów hydraulicznych, $C_1$, $C_2$ – sztywności sprężyn, $A_1$, $A_2$ – powierzchnie czynne tłoków przekładni hydraulicznej, $a$, $b$, $c$, $d$ – długości ramion dźwigni, $\alpha$, $\varphi$, $\gamma$, $\psi$, $l$, $x$, $y$, $w$ – przesunięcia

W zależności od przemieszczeń $w$ i $\alpha$ przesuwa się korpus rozdzielacza (przemieszczenie $l$) serwomotoru o stałej czasowej $T_1$. Istotnym elementem układu jest więc element o sygnałach wejściowych $w$ i $\alpha$ i sygnale wyjściowym $l$.

Do wyznaczenia równania ruchu tego elementu wykorzystajmy zasadę superpozycji. Niech $l_1$ oznacza przesunięcie korpusu spowodowane przemieszczeniem $w$ przy $\alpha=0$, natomiast $l_2$ – przesunięcie korpusu spowodowane przemieszczeniem $\alpha$ przy $w=0$. Z równań równowagi sił otrzymuje się:

– przy $\alpha=0$

$$(w-l_1)C_1=l_1C_2$$

skąd $l_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}w$,

– przy $w=0$

$$(\alpha-l_2)C_2=l_2C_1$$

skąd $l_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}\alpha$.

Przesunięcie korpusu rozdzielacza jest sumą przemieszczeń $l_1$ i $l_2$, zatem

$$l(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} w(t) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \alpha(t)$$

Kolejnymi elementami układu są:
- przekładnia hydrauliczna o równaniu ruchu

$$\varphi(t) = \frac{A_1}{A_2} w(t)$$

- serwomotor hydrauliczny o równaniu ruchu

$$T_2 \frac{d\psi(t)}{dt} = \varphi(t) - \gamma(t)$$

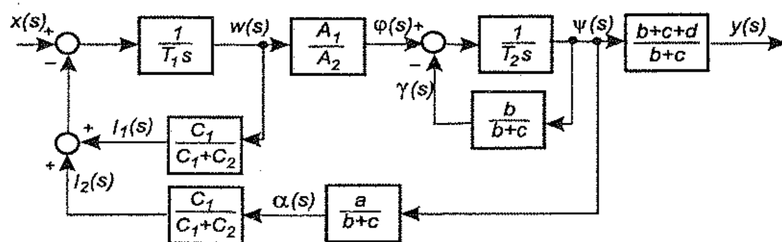
- dźwignia *a-b-c-d*, wprawiana w ruch przez serwomotor o stałej czasowej $T_2$, wykorzystywana do wytwarzania trzech sygnałów: $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ i sygnału wyjściowego układu – $y(t)$; spełnia ona jednocześnie rolę trzech elementów proporcjonalnych o równaniach ruchu:

$$\alpha(t) = \frac{a}{b+c} \psi(t)$$

$$\gamma(t) = \frac{b}{b+c} \psi(t)$$

$$y(t) = \frac{b+c+d}{b+c} \psi(t)$$

Przedstawiając opisane elementy w postaci bloków z wpisanymi transmitancjami i po połączeniu ich liniami sygnałowymi, otrzymuje się schemat przedstawiony na rys. 6.5.

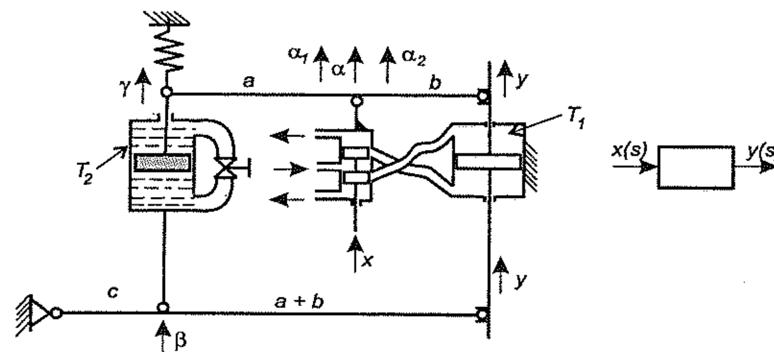



Rys. 6.5. Schemat blokowy do przykładu 6.3



**Przykład 6.4**

Wyznaczyć transmitancję operatorową, charakterystykę statyczną i odpowiedź skokową układu przedstawionego na rys. 6.6. Wielkością wejściową jest przesunięcie $x$ tłoczka rozdzielacza, a wielkością wyjściową – przesunięcie $y$ tłoczyska siłownika hydraulicznego.




Rys. 6.6. Schemat do przykładu 6.4

*Rozwiązanie*

Przedstawiony na rys. 6.6 układ składa się z serwomotoru hydraulicznego jako elementu całkującego o stałej czasowej $T_1$, tłumika hydraulicznego jako elementu różniczkującego rzeczywistego o stałej czasowej $T_2$ oraz dwóch dźwigni.

Sygnał wejściowy $x$ układu jest jedną ze składowych sygnału wejściowego serwomotoru hydraulicznego; drugą składową jest przemieszczenie $\alpha$ korpusu rozdzielacza, przymocowanego do dźwigni *a–b*. Jego transmitancja ma postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s) - \alpha(s)} = \frac{1}{T_1 s}$$

Po wprowadzeniu skokowej zmiany sygnału wejściowego tłoczysko serwomotoru przemieszcza się ku górze, pociągając prawe końce obu dźwigni i wywołując przemieszczenia $\alpha_1$ i $\beta$:

$$\alpha_1(t) = \frac{a}{a+b} y(t), \qquad \beta(t) = \frac{c}{a+b+c} y(t)$$

Przemieszczenie $\beta$ jest sygnałem wejściowym tłumika hydraulicznego (elementu różniczkującego rzeczywistego) o transmitancji

$$G(s) = \frac{\gamma(s)}{\beta(s)} = \frac{T_2 s}{T_2 s + 1}$$

Sygnał wyjściowy tłumika – przesunięcie $\gamma$, wywołuje również ruch dźwigni $a$–$b$, tworząc składową $\alpha_2$. Dźwignia $a$–$b$ pełni w układzie rolę dwuwejściowego elementu proporcjonalnego o równaniu ruchu

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = \frac{a}{a+b}\, y(t) + \frac{b}{a+b}\, \gamma(t)$$

Uwzględniając wymienione związki między elementami układu, otrzymuje się schemat blokowy (rys. 6.7). Na jego podstawie można wyznaczyć transmitancję operatorową układu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{1}{T_1 s}}{1 + \dfrac{1}{T_1 s}\left[\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b}\,\dfrac{T_2 s}{T_2 s+1}\,\dfrac{c}{a+b+c}\right]}$$

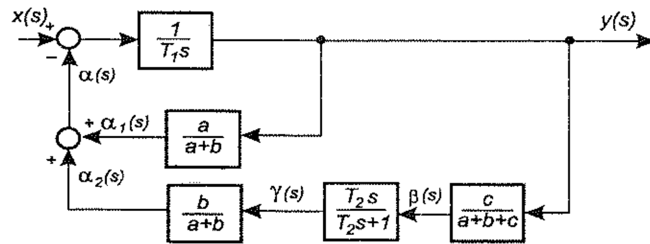
Po przekształceniach otrzymuje się

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(T_2 s+1)(a+b)(a+b+c)}{As^2 + Bs + a(a+b+c)}$$

gdzie:

$$A = T_1 T_2 (a+b)(a+b+c)$$

$$B = T_1(a+b)(a+b+c) + T_2 a(a+b+c) + bc$$




Rys. 6.7. Schemat blokowy układu do przykładu 6.4

Charakterystykę statyczną układu można wyznaczyć na podstawie transmitancji, korzystając z zależności (3.9)

$$y = x \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{a+b}{a}\, x$$

Równanie charakterystyki statycznej można także wyznaczyć na podstawie analizy działania układu. Rozpatrywany układ znajduje się w stanie ustalonym tylko wówczas, gdy sygnał wejściowy elementu całkującego jest równy zeru ( $x - \alpha = 0$ ); wtedy szczeliny rozdzielacza serwomotoru są zamknięte. Ponadto, w stanie ustalonym składowa $\alpha_2$ sygnału $\alpha$ jest równa zeru, gdyż wywołujące ją przesunięcie $\gamma$, jako sygnał wyjściowy elementu różniczkującego, w stanie ustalonym też jest równe zeru. Zatem, stan ustalony wystąpi wtedy, gdy

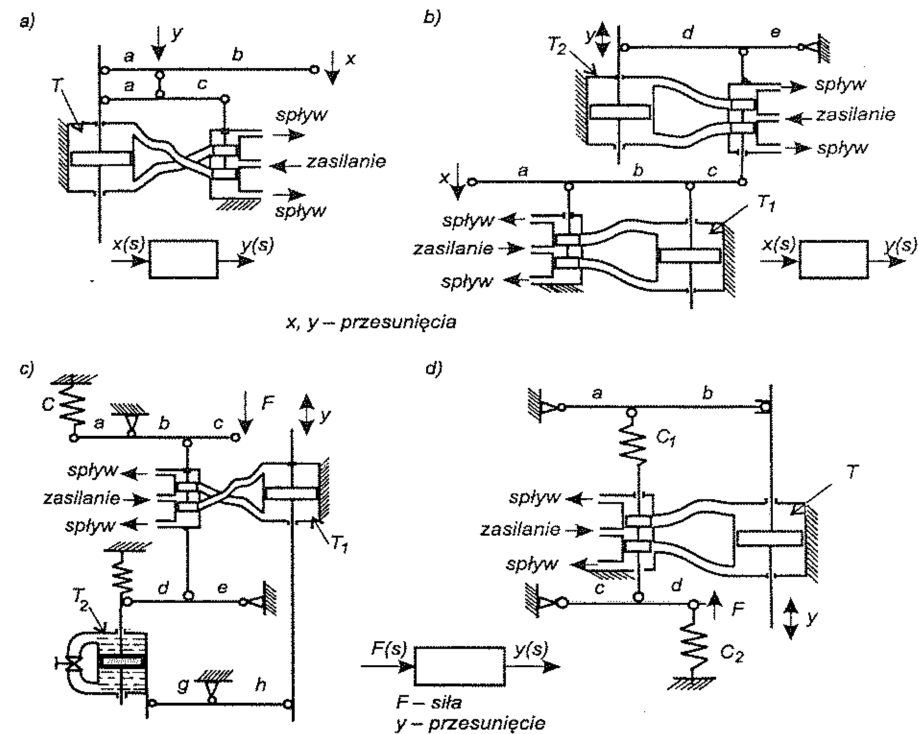
$$x = \alpha_1 = \frac{a}{a+b}\, y$$

skąd

$$y = \frac{a+b}{a}\, x$$

### Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Na rys. 6.8 przedstawiono schematy ideowo-konstrukcyjne mechanicznych urządzeń automatyki do samodzielnej analizy ich właściwości metodą schematów blokowych.




Rys. 6.8. Przykłady mechanicznych urządzeń automatyki

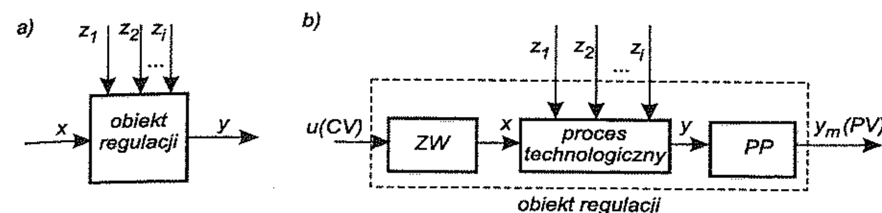
# 7. OBIEKTY REGULACJI

**Obiektem regulacji** nazywany jest proces technologiczny podlegający oddziaływaniu zakłóceń, zachodzący w urządzeniu, w którym poprzez zewnętrzne oddziaływanie sterujące (sterowanie) realizuje się pożądany przebieg tego procesu.

Przebiegi zautomatyzowanych procesów technologicznych są oceniane (kontrolowane) na podstawie pomiarów wielkości charakteryzujących dany proces, a których pożądany przebieg jest określony w zadaniu regulacji. Są to najczęściej wielkości fizyczne, takie jak np. temperatura, ciśnienie, lepkość, zawartość składników. Są one **wielkościami wyjściowymi obiektu regulacji** (procesu) – **wielkościami regulowanymi** oznaczanymi umownie symbolami $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$.

Aby dany proces technologiczny mógł być realizowany, muszą być do niego doprowadzone odpowiednie strumienie materiałów (np. reagujących ze sobą składników) lub strumienie energii (np. paliwa czy energii elektrycznej). Od wielkości tych strumieni i od ich parametrów zależy pożądany przebieg wielkości regulowanych. Zatem ilości dostarczanej energii lub materii są **wielkościami wejściowymi** $x_1$, ..., $x_m$ obiektu regulacji (procesu). Wielkościami wejściowymi wpływającymi niekorzystnie na przebieg wielkości regulowanych są różnego rodzaju **zakłócenia** (umownie oznaczane symbolami $z_1$, ..., $z_i$). Zakłócenia te mogą bezpośrednio oddziaływać na proces (np. w układzie regulacji temperatury takimi zakłóceniami są zmiany temperatury otoczenia) lub zniekształcać doprowadzone do obiektu strumienie energii lub materii (np. w układzie regulacji temperatury takimi zakłóceniami są zmiany wartości opałowej paliwa). Związek między wielkościami regulowanymi a wejściowymi tworzy opis obiektu **w sensie procesowym** (rys. 7.1a).

Urządzenia, w których realizowane są procesy technologiczne wyposażone są w zespoły wykonawcze (ZW), którymi są np. zawory regulacyjne, pompy o zmiennej wydajności, silniki, styczniki itp., umożliwiające dostarczanie strumieni energii lub materiałów do procesu, oraz w przetworniki pomiarowe (PP), dostarczające informacje o przebiegu zmian wielkości regulowanych. Zespoły wykonawcze, w wyniku oddziaływania na nie sygnałów sterujących, oznaczanych w rozważaniach teoretycznych symbolami $u_1$, ..., $u_n$, a przy stosowaniu terminologii technicznej – symbolami $CV_1$, ..., $CV_n$, i wytwarzanych przez regulatory (sterowniki), kształtują natężenie strumieni materiałów lub energii. Sygnały sterujące $u_1$, ..., $u_n$ ($CV_1$, ..., $CV_n$) są sygnałami wejściowymi obiektu regulacji jako elementu składowego układu regulacji. Sygnałami wyjściowymi tak rozumianego obiektu regulacji są sygnały wyjściowe przetworników pomiarowych $y_{m1}$, ..., $y_{mn}$, nazywane zmiennymi procesowymi, oznaczanymi w automatyce przemysłowej symbolami $PV_1$, ..., $PV_n$.




Rys. 7.1. Schemat blokowy obiektu regulacji o jednej wielkości regulowanej $y$: a) obiekt regulacji w sensie procesowym, b) obiekt regulacji w sensie aparaturowym; $x$ – wielkość wejściowa obiektu, $u$ ($CV$) – sygnał sterujący, $y_m$ ($PV$) – sygnał wyjściowy przetwornika pomiarowego (zmienna procesowa), $z_1$, $z_2$, $z_i$ – zakłócenia

Zależność między sygnałami wyjściowymi obiektu (zmiennymi procesowymi) a jego sygnałami wejściowymi (sygnałami sterującymi i zakłóceniami) stanowi opis obiektu **w sensie aparaturowym** (rys. 7.1b).

W najprostszych przypadkach obiekt regulacji ma jeden sygnał wyjściowy $y_m$ (jedną wielkość regulowaną) i jeden sygnał sterujący $u$ (rys. 7.1b). Jego matematycznym opisem jest zależność sygnału wyjściowego od sygnałów wejściowych

$$y_m = f(u, z_1, ..., z_i) \tag{7.1}$$

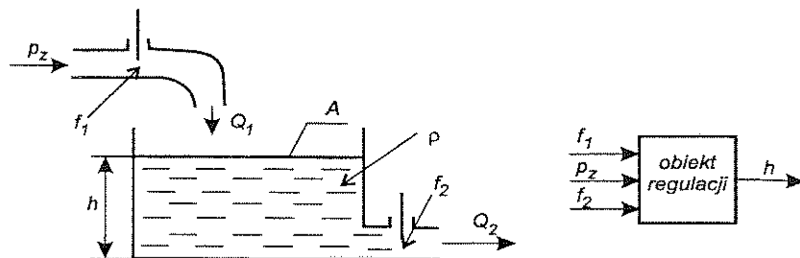
która, w zależności od właściwości obiektu, może być liniowym lub nieliniowym równaniem algebraicznym albo liniowym lub nieliniowym równaniem różniczkowym o stałych lub zmiennych współczynnikach.

## 7.1. ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI PRZYKŁADOWYCH OBIEKTÓW REGULACJI

**Przykład 7.1**

Zbadajmy właściwości obiektu regulacji jako procesu zmiany wysokości słupa cieczy, zachodzącego w zbiorniku otwartym z cieczą z odpływem swobodnym

(pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego) do przestrzeni o ciśnieniu atmosferycznym (rys. 7.2), przy założeniu, że powierzchnia $A$ przekroju zbiornika nie zależy od wysokości słupa cieczy. Wielkością wyjściową obiektu jest wysokość słupa cieczy $h$, wielkościami wejściowymi, kształtującymi zmiany poziomu są: ciśnienie względne cieczy $p_z$ (ciśnienie zasilania) przed zaworem wlotowym i powierzchnie przepływowe $f_1$ i $f_2$ zaworów wlotowego i wylotowego.




Rys. 7.2. Schemat zbiornika otwartego z cieczą z wypływem swobodnym; ρ – gęstość cieczy, $Q_1$, $Q_2$ – strumienie objętości cieczy wpływającej i wypływającej

Ilość cieczy pozostającej w zbiorniku w danej chwili $t$ jest różnicą ilości cieczy doprowadzonej do zbiornika i ilości cieczy odprowadzonej, co wyraża równanie

$$A\,h(t) = \int_0^t Q_1(t)dt - \int_0^t Q_2(t)dt \tag{7.2}$$

skąd po zróżniczkowaniu otrzymuje się zależność

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \tag{7.3}$$

Bieżące wartości strumieni $Q_1(t)$ i $Q_2(t)$ zależą od warunków przepływu, zgodnie z zależnościami:

$$Q_1(t) = \alpha_1\, f_1(t)\sqrt{\frac{2}{\rho}p_z(t)} \tag{7.4}$$

$$Q_2(t) = \alpha_2\, f_2(t)\sqrt{2g\,h(t)} \tag{7.5}$$

gdzie: $\alpha_1$, $\alpha_2$ – współczynniki przepływu odpowiednio zaworu wlotowego i wylotowego.



Równanie dynamiki rozważanego obiektu otrzymuje się, wstawiając zależności (7.4) i (7.5) do równania (7.3):

$$A\frac{dh(t)}{dt} = \alpha_1 f_1(t)\sqrt{\frac{2}{\rho}p_z(t)} - \alpha_2 f_2(t)\sqrt{2g\,h(t)} \tag{7.6}$$

Jest to równanie nieliniowe. Przyrównując w tym równaniu pochodną do zera, otrzymuje się rzeczywistą charakterystykę statyczną obiektu:

$$h = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2\rho g}\frac{f_1^2 p_z}{f_2^2} \tag{7.7}$$

Na podstawie równania (7.7) można wyznaczyć trzy rodziny charakterystyk statycznych:

– dla $p_z = p_{z0}$ i $f_2 = f_{20}$

$$h(f_1) = \frac{\alpha_1^2 p_{z0}}{\alpha_2^2\rho g\, f_{20}^2} f_1^2 \tag{7.8}$$

– dla $p_z = p_{z0}$ i $f_1 = f_{10}$

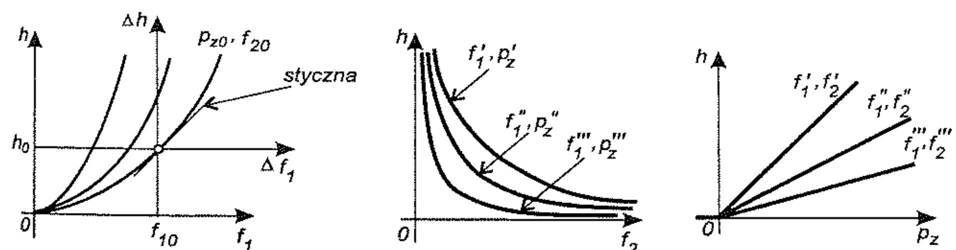
$$h(f_2) = \frac{\alpha_1^2 p_{z0} f_{10}^2}{\alpha_2^2\rho g}\frac{1}{f_2^2} \tag{7.9}$$

– dla $f_1 = f_{10}$ i $f_2 = f_{20}$

$$h(p_z) = \frac{\alpha_1^2 f_{10}^2}{\alpha_2^2\rho g\, f_{20}^2} p_z \tag{7.10}$$

Wartości współczynników proporcjonalności w równaniach (7.8–7.10) zależą od przyjętych wartości $f_{10}$, $f_{20}$ i $p_{z0}$.

Charakterystyki statyczne obiektu pokazano na rys. 7.3.




Rys. 7.3. Charakterystyki statyczne obiektu do przykładu 7.1: $h(f_1)$, $h(f_2)$, $h(p_z)$

Rozważany obiekt można traktować jako element liniowy jedynie w otoczeniu założonego punktu równowagi – punktu pracy. Linearyzując równanie (7.6) w punkcie pracy o współrzędnych $h_0$, $f_{10}$, $f_{20}$, $p_{z0}$, związanych zależnością (7.7), otrzymuje się

$$A\frac{d\Delta h(t)}{dt}=\left(\frac{\partial Q_1}{\partial f_1}\right)_0\Delta f_1(t)+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial p_z}\right)_0\Delta p_z(t)-\left(\frac{\partial Q_2}{\partial f_2}\right)_0\Delta f_2(t)-\left(\frac{\partial Q_2}{\partial h}\right)_0\Delta h(t)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez $(\partial Q_2/\partial h)_0$ i przeniesieniu na lewą stronę $\Delta h(t)$ otrzymuje się

$$T\frac{d\Delta h(t)}{dt}+\Delta h(t)=k_1\Delta f_1(t)+k_2\Delta p_z(t)-k_3\Delta f_2(t) \tag{7.11}$$

gdzie:

$$T=\frac{A}{(\partial Q_2/\partial h)_0}=\frac{A}{\alpha_2 f_{20}}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \tag{7.12}$$

$$k_1=\frac{(\partial Q_1/\partial f_1)_0}{(\partial Q_2/\partial h)_0}=\frac{2\alpha_1}{\alpha_2 f_{20}}\sqrt{\frac{p_{z0}h_0}{g\rho}} \tag{7.13}$$

$$k_2=\frac{(\partial Q_1/\partial p_z)_0}{(\partial Q_2/\partial h)_0}=\frac{\alpha_1 f_{10}}{\alpha_2 f_{20}}\sqrt{\frac{h_0}{g\rho p_{z0}}} \tag{7.14}$$

$$k_3=\frac{(\partial Q_2/\partial f_2)_0}{(\partial Q_2/\partial h)_0}=\frac{2h_0}{f_{20}} \tag{7.15}$$

Postać równania (7.11) wskazuje, że obiekt jest elementem inercyjnym o trzech sygnałach wejściowych. Należy zwrócić uwagę, że ujemna wartość współczynnika proporcjonalności określającego wpływ powierzchni przepływowej $f_2$ na zmianę poziomu oznacza, że zwiększanie tej powierzchni powoduje spadek poziomu.

Rozważany obiekt jako element inercyjny, po wprowadzeniu w stanie ustalonym skokowego wymuszenia na którekolwiek z wejść, po ustaniu procesu przejściowego osiąga nowy stan ustalony.

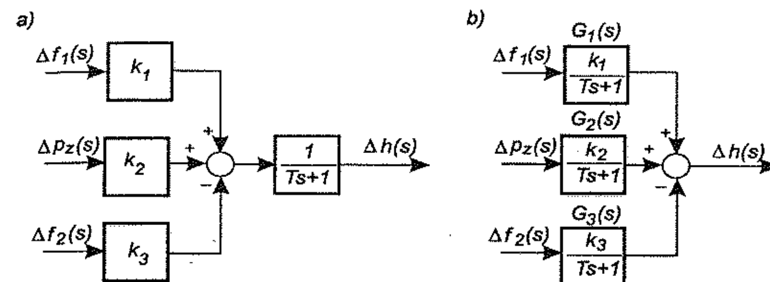
Obiekty, które po wprowadzeniu w stanie ustalonym wymuszenia skokowego osiągają po zaniku procesów przejściowych ponownie stan ustalony, nazywają się **obiektami statycznymi**.

Poddając równanie (7.11) przekształceniu Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych, otrzymuje się równanie

$$\Delta h(s)=[k_1\Delta f_1(s)+k_2\Delta p_z(s)-k_3\Delta f_2(s)]\frac{1}{Ts+1} \tag{7.16}$$



na podstawie którego utworzony jest schemat blokowy obiektu – rys. 7.4a. W rzeczywistości wielkości wejściowe oddziałują na obiekt oddzielnie, kształtując odpowiednie do swojego oddziaływania zmiany poziomu cieczy jako wielkości wyjściowej, co ilustruje schemat blokowy – rys. 7.4b.




Rys. 7.4. Schemat blokowy obiektu do przykładu 7.1: a) na podstawie równania (7.16), b) ilustrujący bezpośrednie oddziaływanie wielkości wejściowych na wielkość wyjściową

W rzeczywistych układach regulacji poziomu jedne wielkości wejściowe mogą być zakłóceniami, inne – dzięki oddziaływaniu na nie sygnału sterującego $u$ regulatora – mogą być wykorzystywane do kompensacji skutków oddziaływania zakłóceń.

W przypadku przedstawionym na rys. 7.5a sygnał sterujący $u$ regulatora oddziałuje na poziom cieczy poprzez zespół wykonawczy ZW (siłownik i zawór regulacyjny) zmieniający powierzchnię przepływową $f_1$ zaworu regulacyjnego na dopływie do zbiornika. W tym przypadku zakłóceniami – czynnikami powodującymi odchylenia poziomu od wartości zadanej mogą być zmiany ciśnienia $p_z$ lub zmiany powierzchni przepływowej $f_2$.

Gdyby wielkością zakłócającą poziom była zmiana wartości strumienia objętości $Q_1$ cieczy dopływającej do zbiornika, wywołana zmianami powierzchni przepływowej $f_1$, zespół wykonawczy sterowany sygnałem wyjściowym regulatora należałoby zainstalować na wypływie ze zbiornika. Informacja o wysokości poziomu do regulatora dociera w postaci sygnału wyjściowego $y_m$ przetwornika pomiarowego PP.

Schemat blokowy obiektu w sensie aparaturowym, utworzony na podstawie opisu liniowego, przedstawiono na rys. 7.5b. Właściwości dynamiczne tego obiektu wyrażają transmitancje:

– względem sterowania $\Delta u$

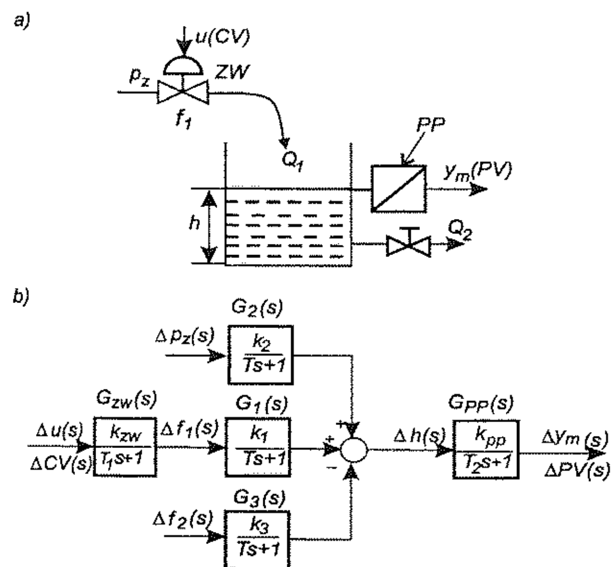
$$G_u(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{\Delta PV(s)}{\Delta CV(s)}=G_{ZW}(s)\,G_1(s)\,G_{PP}(s) \tag{7.17}$$

– względem zakłócenia $\Delta p_z$

$$G_{pz}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta p_z(s)}=\frac{\Delta PV(s)}{\Delta p_z(s)}=G_2(s)\,G_{PP}(s) \tag{7.18}$$

– względem zakłócenia $\Delta f_2$

$$G_{f2}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta f_2(s)}=\frac{\Delta PV(s)}{\Delta f_2(s)}=G_3(s)\,G_{PP}(s) \tag{7.19}$$




Rys. 7.5. Zbiornik otwarty z cieczą z wypływem swobodnym jako obiekt regulacji w sensie aparaturowym: a) schemat ideowy, b) schemat blokowy; ZW – zespół wykonawczy, PP – przetwornik pomiarowy

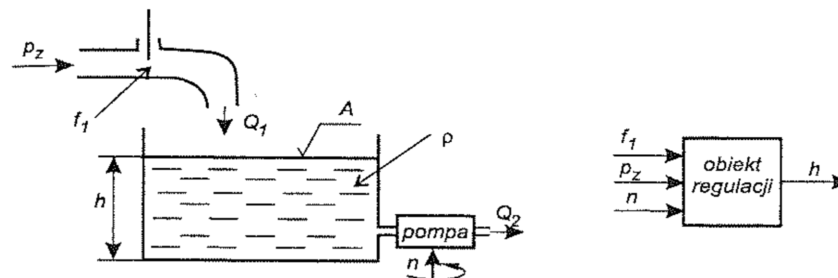
Ponieważ w praktyce na ogół nie są znane transmitancje obiektów w sensie procesowym ani także zespołów wykonawczych i przetworników pomiarowych, więc transmitancje obiektów ustala się metodami eksperymentalnymi.

**Przykład 7.2**

Zbadajmy właściwości obiektu regulacji jako procesu zmiany wysokości słupa cieczy, zachodzącego w zbiorniku otwartym z cieczą z odpływem wymuszonym przez pompę (rys. 7.6), przy założeniu, że przekrój poprzeczny zbiornika jest stały, a strumień objętości $Q_2$ cieczy pobieranej przez pompę jest proporcjonalny do prędkości obrotowej $n$ wirnika silnika napędzającego pompę:

$$Q_2 = kn \tag{7.20}$$

Wielkością wyjściową obiektu jest wysokość słupa cieczy $h$, wielkościami wejściowymi są: ciśnienie względne cieczy $p_z$ przed zaworem wlotowym, powierzchnia przepływowa $f_1$ zaworu wlotowego oraz prędkość obrotowa $n$ silnika pompy.




Rys. 7.6. Schemat zbiornika otwartego z cieczą z wypływem wymuszonym; ρ – gęstość cieczy, $A$ – powierzchnia przekroju zbiornika, $Q_1$, $Q_2$ – strumienie objętości cieczy wpływającej i wypływającej

Na podstawie zależności (7.3), (7.4) i (7.20) otrzymuje się nieliniowe równanie dynamiki obiektu

$$A\frac{dh(t)}{dt}=\alpha_1 f_1(t)\sqrt{\frac{2p_z(t)}{\rho}}-kn(t) \tag{7.21}$$

Przyrównując w równaniu (7.21) pochodną do zera, otrzymuje się zależność między wielkościami wejściowymi obiektu, przy spełnieniu której poziom cieczy w zbiorniku nie zmienia się (określającą warunki uzyskania stanu ustalonego):

$$kn=\alpha_1 f_1\sqrt{\frac{2p_z}{\rho}} \tag{7.22}$$

Przeprowadzając linearyzację nieliniowego równania ruchu (7.21) w punkcie pracy o współrzędnych $f_{10}$, $p_{z0}$, $n_0$, między którymi zachodzi zależność (7.22), otrzymuje się równanie liniowe, opisujące w przybliżeniu właściwości obiektu w otoczeniu założonego punktu pracy:

$$\frac{\Delta dh}{dt}=k_1\Delta f_1+k_2\Delta p_z-k_3\Delta n \tag{7.23}$$

gdzie:

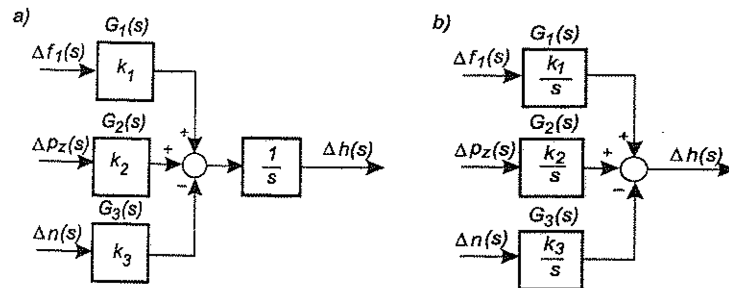
$$k_1 = \frac{\alpha_1}{A}\sqrt{\frac{2p_{z0}}{\rho}}, \quad k_2 = \frac{\alpha_1 f_{10}}{A\sqrt{2\rho p_{z0}}}, \quad k_3 = \frac{k}{A}$$

Postać równania (7.23) wskazuje, że obiekt jest elementem całkującym o trzech sygnałach wejściowych. Jako element całkujący może osiągać stan ustalony, jeżeli wartości sygnałów wejściowych spełniają zależność (7.22). Stan ustalony może być osiągany przy dowolnych wartościach sygnału wyjściowego.

Poddając równanie (7.23) przekształceniu Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych, otrzymuje się równanie

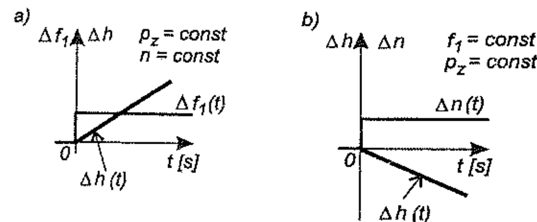
$$\Delta h(s) = [k_1 \Delta f_1(s) + k_2 \Delta p_z(s) - k_3 \Delta n(s)]\frac{1}{s} \tag{7.24}$$

na podstawie którego utworzony jest schemat blokowy obiektu (rys. 7.7).




Rys. 7.7. Schemat blokowy obiektu do przykładu 7.2: a) na podstawie równania (7.24), b) ilustrujący bezpośrednie oddziaływanie wielkości wejściowych na wielkość wyjściową

Jako element całkujący, rozważany obiekt po wprowadzeniu w stanie ustalonym skokowego wymuszenia na którekolwiek z wejść nie osiąga stanu ustalonego; wielkość wyjściowa (poziom) ciągle zmienia się ze stałą prędkością. Na rys. 7.8 pokazano przykładowe odpowiedzi obiektu na skokową zmianę powierzchni przepływowej $f_1$ oraz skokową zmianę prędkości obrotowej $n$ silnika pompy.




Rys. 7.8. Odpowiedzi obiektu do przykładu 7.2: a) na skokową zmianę powierzchni przepływowej $f_1$, b) na skokową zmianę prędkości obrotowej $n$ silnika pompy



Obiekty, które po wprowadzeniu w stanie ustalonym wymuszenia skokowego nie osiągają stanu ustalonego, nazywają się **obiektami astatycznymi.**

Przykład zbiornika z wypływem wymuszonym, jako obiektu regulacji w sensie aparaturowym, przedstawiono na rys. 7.9. W tym układzie, podobnie jak na rys. 7.5, sygnał sterujący $u$ regulatora oddziałuje na poziom cieczy poprzez zespół wykonawczy ZW (siłownik i zawór regulacyjny) zmieniający powierzchnię przepływową $f_1$ zaworu regulacyjnego na dopływie do zbiornika. Zakłóceniami – czynnikami powodującymi odchylenia poziomu cieczy od wartości zadanej – mogą być zmiany ciśnienia $p_z$ i zmiany prędkości obrotowej $n$ wirnika pompy. Informacja o wysokości słupa cieczy do regulatora dociera w postaci sygnału wyjściowego $y_m$ przetwornika pomiarowego PP. Schemat blokowy tego obiektu w sensie aparaturowym przedstawiono na rys. 7.9b. Właściwości dynamiczne tego obiektu wyrażają transmitancje:

– względem sterowania $\Delta u$

$$G_u(s) = \frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)} = \frac{\Delta PV(s)}{\Delta CV(s)} = G_{ZW}(s)\, G_1(s)\, G_{PP}(s) \tag{7.25}$$

– względem zakłócenia $\Delta p_z$

$$G_{pz}(s) = \frac{\Delta y_m(s)}{\Delta p_z(s)} = \frac{\Delta PV(s)}{\Delta p_z(s)} = G_2(s)\, G_{PP}(s) \tag{7.26}$$

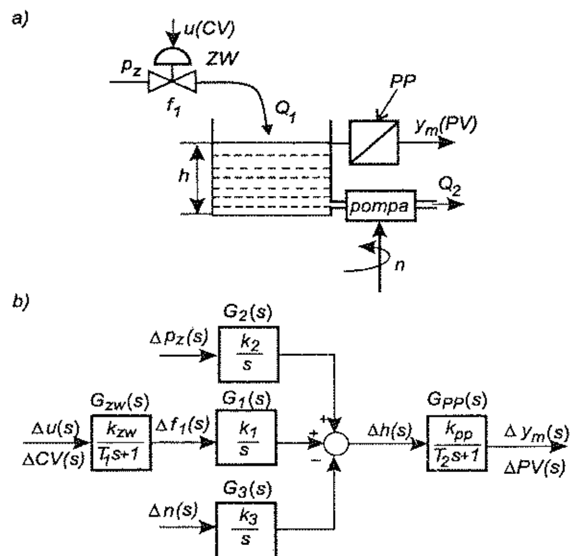
– względem zakłócenia $\Delta n$

$$G_n(s) = \frac{\Delta y_m(s)}{\Delta n(s)} = \frac{\Delta PV(s)}{\Delta n(s)} = G_3(s)\, G_{PP}(s) \tag{7.27}$$

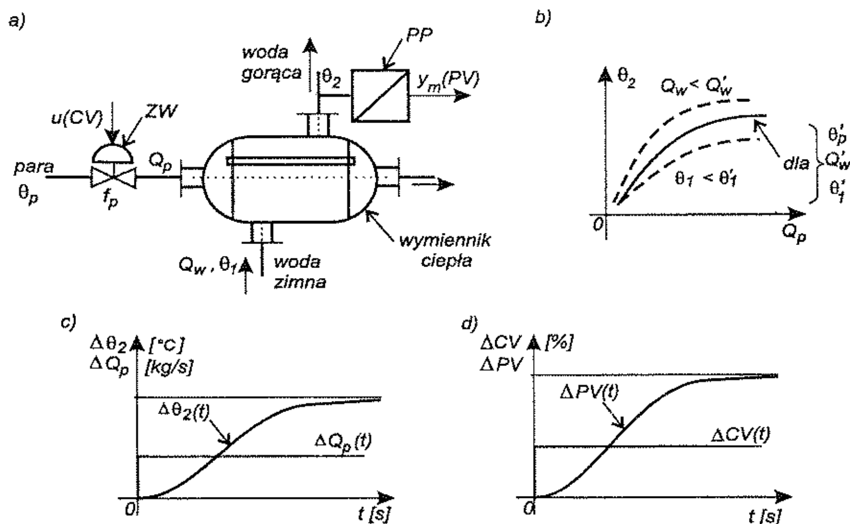
Gdyby wielkością zakłócającą poziom była zmiana wartości strumienia objętości $Q_1$ cieczy dopływającej do zbiornika, wywołana zmianą powierzchni przepływowej $f_1$, wielkością sterującą musiałaby być prędkość obrotowa pompy na wypływie.

Innym przykładem obiektu regulacji jest proces technologiczny realizowany w rurowym wymienniku ciepła (rys. 7.10), polegający na podgrzewaniu zimnej wody o temperaturze $\theta_1$ do pożądanej temperatury $\theta_2$, niezależnie od zużycia wody podgrzanej. Zatem wielkością wyjściową (wielkością regulowaną) obiektu jest temperatura $\theta_2$.

Załóżmy, że obiekt znajduje się w stanie równowagi – w ustalonym punkcie pracy. Odchylenia od tego stanu mogą być powodowane przede wszystkim przez: zmiany zużycia wody podgrzanej, zmiany temperatury $\theta_1$ doprowadzanej wody zimnej oraz zmiany ilości ciepła dostarczanego do wymiennika w postaci pary (na skutek zmian temperatury pary $\theta_p$ lub zmian powierzchni przepływowej $f_p$ zaworu parowego).




Rys. 7.9. Zbiornik otwarty z cieczą z wypływem wymuszonym jako obiekt regulacji w sensie aparaturowym: a) schemat ideowy, b) schemat blokowy; ZW – zespół wykonawczy, PP – przetwornik pomiarowy




Rys. 7.10. Rurowy wymiennik ciepła: a) schemat instalacji (ZW – zespół wykonawczy, PP – przetwornik pomiarowy), b) charakterystyka statyczna obiektu $\theta_2(Q_p)$, c) odpowiedź obiektu na skokową zmianę przepływu pary $Q_p$, d) odpowiedź obiektu na skokową zmianę sterowania $u$ (*CV*)



Właściwości dynamiczne obiektu opisuje więc zależność

$$\theta_2 = f(Q_w, \theta_1, \theta_p, f_p) \tag{7.28}$$

Na postać tej zależności może mieć wpływ stan techniczny rur wymiennika (zmiany przewodności cieplnej).

Jako wielkość, która może być wykorzystana do kompensacji oddziaływań innych wielkości wytrącających obiekt ze stanu równowagi, można wykorzystać jedynie wielkość powierzchni przepływowej $f_p$ zaworu parowego. Na tę wielkość może oddziaływać sygnał sterujący $u$ regulatora za pośrednictwem zespołu wykonawczego (siłownika i zaworu regulacyjnego). Zatem pozostałe wielkości mające wpływ na temperaturę podgrzanej wody ($Q_w$, $\theta_1$, $\theta_p$) należy traktować jako wielkości zakłócające.

Do doboru parametrów zaworu regulacyjnego przydatna jest charakterystyka statyczna obiektu. W tym przypadku jest to, tak jak zależność (7.28), funkcja czterech zmiennych. Na rys. 7.10b pokazano przykładową charakterystykę statyczną $\theta_2(Q_p)$ przy $Q_w, \theta_1, \theta_p = \text{const}$.

Podobnie charakterystyki dynamiczne obiektu mogą być wyznaczane jako odpowiedzi na zmianę jednej wielkości wejściowej, przy niezmiennych wartościach pozostałych wielkości wejściowych (rys. 7.10c, d).

## 7.2. KLASYFIKACJA OBIEKTÓW REGULACJI

Niezależnie od rodzaju procesów technologicznych podlegających regulacji, obiekty regulacji charakteryzują się pewnymi wspólnymi cechami, wg których można je klasyfikować.

Podobnie jak wszystkie inne elementy układów automatyki, obiekty regulacji mogą być:
- liniowe,
- nieliniowe.

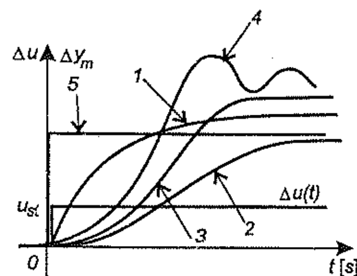
Obiekty liniowe to takie, które podlegają prawu superpozycji.

Ze względu na zachowanie się w stanie ustalonym po wymuszeniu skokowym, rozróżnia się obiekty:
- statyczne, mające zdolność do tzw. samowyrównywania, czyli osiągania nowego stanu równowagi po wprowadzeniu wymuszenia skokowego;
- astatyczne, nieosiągające stanu równowagi po wprowadzeniu wymuszenia skokowego.

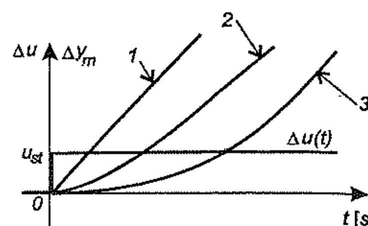
Ze względu na liczbę wielkości regulowanych, rozróżnia się obiekty:
- jednowymiarowe,
- wielowymiarowe.

Ze względu na stałość parametrów w czasie, obiekty dzieli się na:
- stacjonarne,
- niestacjonarne.

Przykładowe przebiegi charakterystyk skokowych (przebiegi zmiennej procesowej $\Delta y_m$ po skokowej zmianie sterowania $\Delta u$ ) obiektów statycznych przedstawiono na rys. 7.11, a obiektów astatycznych – na rys. 7.12.




Rys. 7.11. Odpowiedzi skokowe obiektów statycznych o właściwościach: 1 – członu inercyjnego, 2, 3 – członów inercyjnych wyższych rzędów, 4 – członu oscylacyjnego, 5 – członu proporcjonalnego




Rys. 7.12. Odpowiedzi skokowe obiektów astatycznych o właściwościach: 1 – członu całkującego, 2 – członu całkującego z inercją, 3 – członu całkującego z opóźnieniem i inercją

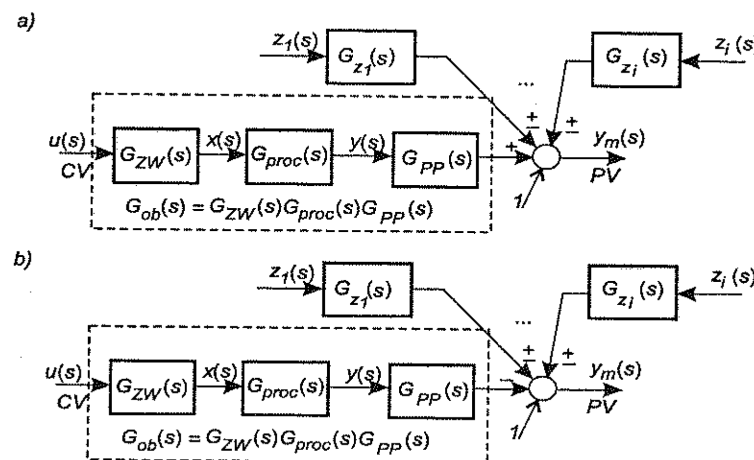
## 7.3. METODY TWORZENIA MATEMATYCZNEGO OPISU WŁAŚCIWOŚCI OBIEKTÓW REGULACJI

Poprawna ocena właściwości obiektów regulacji jest podstawowym warunkiem projektowania układów regulacji. Na ogół analiza właściwości obiektu przebiega dwuetapowo. Pierwszy etap jest analizą procesową. Jej efektem jest ustalenie związków procesowych między wielkościami regulowanymi jako zmiennymi fizycznymi a wielkościami wejściowymi procesu, którymi są najczęściej parametry strumieni energii lub materiałów dostarczanych do procesu. Analizę taką zaprezentowano w przykładach 7.1 i 7.2. Jej wyniki są podstawą właściwego doboru przetwornika pomiarowego oraz zespołu wykonawczego, czyli poprawnego zaprojektowania obiektu regulacji w sensie aparaturowym. Ogólne związki procesowe powinny zostać określone przez technologa, który najlepiej rozumie fizyczną stronę procesu. Często jednak konieczna jest przy tym pomoc automatyka, aby opis właściwości obiektu został podany w formie użytecznej do celów regulacji.



Drugim etapem analizy jest określenie modelu matematycznego obiektu jako związku między zmiennymi procesowymi $y_m$ (*PV*) a sterowaniami $u$ (*CV*) i zakłóceniami. Etap ten zwykle nazywa się **identyfikacją obiektu**.

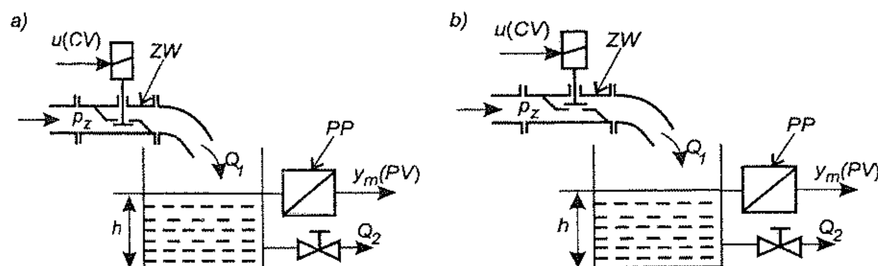
Schemat obiektu regulacji w sensie aparaturowym z jedną wielkością regulowaną, który wyraźnie pokazuje wpływ sterowania i zakłóceń na zmienną procesową, przedstawiono na rys. 7.13. Schemat taki dostarcza informacji o strukturze obiektu, co jest pomocne przy projektowaniu struktury układu regulacji. Jak wcześniej wspomniano, obiekt regulacji w sensie aparaturowym to nie tylko urządzenie, w którym realizowany jest proces technologiczny (transmitancja $G_{proc}(s)$ ), ale także zespół wykonawczy ZW (transmitancja $G_{ZW}(s)$) sterowany sygnałem $u$ (*CV*) oraz przetwornik pomiarowy PP (transmitancja $G_{PP}(s)$) generujący sygnał $y_m$ (*PV*). Iloczyn transmitancji operatorowych zespołu wykonawczego, procesu i przetwornika pomiarowego reprezentuje związek między sterowaniem $u$ (*CV*) a zmienną procesową $y_m$ (*PV*) i jest transmitancją operatorową obiektu $G_{ob}(s)$ w sensie aparaturowym. Transmitancja ta opisuje wypadkowe własności zespołu wykonawczego, procesu i przetwornika pomiarowego. Na jej podstawie dobierane są algorytm i parametry regulatora.




Rys. 7.13. Schematy blokowe obiektów regulacji: a) obiektu, w którym wzrost wartości sygnału sterującego $u$ wywołuje wzrost wartości zmiennej procesowej $y_m$; b) obiektu, w którym wzrost wartości sygnału sterującego wywołuje spadek wartości zmiennej procesowej

Zależnie od konstrukcji zespołu wykonawczego, natury fizycznej i właściwości procesu oraz charakterystyki statycznej przetwornika pomiarowego zastosowanego w układzie regulacji, wzrost wartości sygnału $u$ ($CV$) może wywoływać wzrost wartości wielkości regulowanej, co wyraża znak „+" na schemacie blokowym obiektu (rys. 7.13a) w węźle sumacyjnym 1 przy linii oznaczającej oddziaływanie sterowania na zmienną procesową, albo spadek wartości wielkości regulowanej, co odpowiednio wyraża znak „–" (rys. 7.13b).

Najczęściej o kierunku oddziaływania sygnału sterującego na wielkość regulowaną decyduje rodzaj elementu wykonawczego. Na rys. 7.14a pokazano obiekt regulacji z elementem wykonawczym o tzw. działaniu prostym (P), w którym wzrost wartości sygnału sterującego $u$ powoduje wzrost powierzchni przepływowej w zaworze i jednocześnie wzrost wartości wielkości regulowanej – poziomu cieczy w zbiorniku. Na rys. 7.14b pokazano obiekt regulacji z elementem wykonawczym o działaniu odwrotnym (R) – wzrost wartości sygnału sterującego $u$ powoduje zmniejszanie się powierzchni przepływowej w zaworze i jednocześnie spadek wartości wielkości regulowanej.

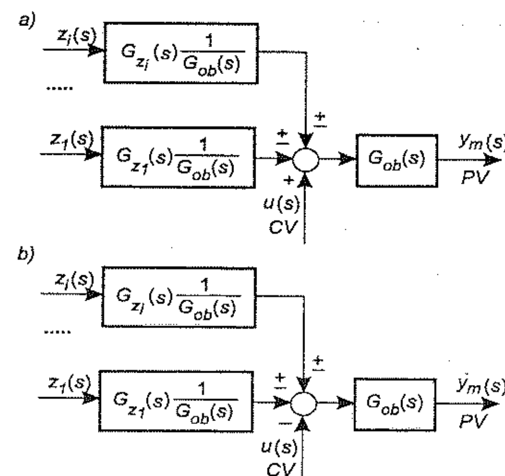



Rys. 7.14. Schematy ideowe obiektów: a) z zespołem wykonawczym (zawór regulacyjny elektromagnetyczny) o działaniu prostym, b) z zespołem wykonawczym o działaniu odwrotnym

Działające na obiekt zakłócenia, których jest najczęściej wiele, są niemierzalne i działają w sposób przypadkowy w różnych miejscach obiektu. W efekcie zawsze zaburzają pożądany przebieg procesu, a ich działanie ujawnia się poprzez zmiany wielkości regulowanej, a zatem i zmiennej procesowej, powodując wzrost lub spadek jej wartości – stąd na schematach blokowych obiektu regulacji (rys. 7.13) w węźle sumacyjnym 1, przy liniach oznaczających oddziaływanie zakłóceń, umieszczone są znaki ±. Transmitancje zakłóceniowe $G_{z1}(s)$, ..., $G_{zi}(s)$ określają zależności zmiennej procesowej od zakłóceń. Transmitancje te, ze względu na niemierzalność zakłóceń, zwykle można określić jedynie w sposób przybliżony, raczej jakościowo niż ilościowo.

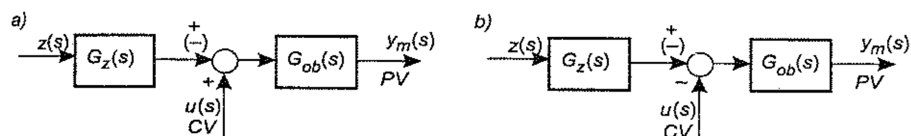
Zgodnie z zasadami algebry schematów blokowych, schematy z rys. 7.13 można przekształcić do postaci jak na rys. 7.15, przesuwając węzeł sumacyjny 1 przed blok reprezentujący transmitancję obiektu $G_{ob}(s)$.






Rys. 7.15. Przekształcone schematy blokowe obiektów regulacji: a) obiektu, w którym wzrost wartości sygnału sterującego $u$ wywołuje wzrost wartości zmiennej procesowej $y_m$; b) obiektu, w którym wzrost wartości sygnału sterującego wywołuje spadek wartości zmiennej procesowej

Uwzględniając oddziaływanie na obiekt regulacji jednego tylko zakłócenia (co można także traktować jako symboliczne zaznaczenie oddziaływania wszystkich zakłóceń), można schematy z rys. 7.15 przedstawić w postaci uproszczonej (rys. 7.16). Taką formę schematów obiektów regulacji wykorzystuje się, tworząc schematy blokowe układów regulacji.




Rys. 7.16. Uproszczone schematy blokowe obiektów regulacji: a) obiektu, w którym wzrost wartości sygnału sterującego $u$ wywołuje wzrost wartości zmiennej procesowej $y_m$; b) obiektu, w którym wzrost wartości sygnału sterującego wywołuje spadek wartości zmiennej procesowej

Transmitancje operatorowe i odpowiadające im równania ruchu reprezentują opis właściwości obiektu jako elementu liniowego. Jeżeli opis ten jest uzyskany w wyniku linearyzacji nieliniowego modelu właściwości obiektu, to jest on słuszny jedynie w przypadku niewielkich zmian wielkości wejściowych wokół założonego statycznego punktu pracy. Wraz ze zmianą punktu pracy opis liniowy się zmienia. W takim opisie zmienne $u$ i $y_m$ należy zastąpić zmiennymi przyrostowymi. Zmienne przyrostowe stosuje się także w przypadku obiektów liniowych o niezerowych punktach pracy.

Brak liniowości i niestacjonarność obiektu utrudnia dopasowanie właściwości regulatora do takiego obiektu. Stąd obecnie cieszą się powodzeniem regulatory wyposażone w procedury samostrojenia.

Matematyczny opis obiektu może być tworzony na podstawie zależności fizykochemicznych między jego wielkościami wyjściowymi i wejściowymi (jak w przykładach 7.1 i 7.2) lub, szczególnie w przypadku obiektów złożonych, na podstawie oceny eksperymentalnie uzyskanych przebiegów sygnałów wyjściowych i wywołujących je sygnałów wejściowych, np. na podstawie odpowiedzi skokowych. Obserwuje się ciągły rozwój eksperymentalnych metod identyfikacji wspomaganych techniką informatyczną.

## 7.3.1. MODELE MATEMATYCZNE WYKORZYSTYWANE DO OPISU STATYCZNYCH OBIEKTÓW REGULACJI

W praktyce najczęściej spotykanymi statycznymi obiektami regulacji są obiekty, których odpowiedzi skokowe mają kształt zbliżony do charakterystyk 1, 2, 3 i 5 na rys. 7.11. Do matematycznego opisu takich obiektów wykorzystuje się transmitancje operatorowe członów: proporcjonalnego, inercyjnego, inercyjnych wyższych rzędów, całkującego, opóźniającego, lub iloczyny tych transmitancji.

**Członami inercyjnymi wyższych rzędów** nazywane są człony o transmitancji

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{(Ts+1)^n} \tag{7.29}$$

Charakterystyki dynamiczne członu inercyjnego $n$-tego rzędu wyrażają funkcje:

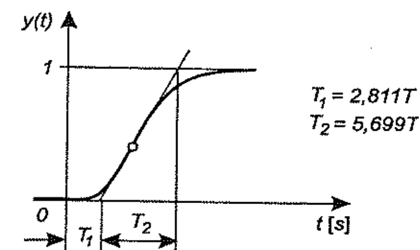
$$y(t)\big|_{u(t)=\delta(t)}=L^{-1}\left[\frac{1}{(Ts+1)^n}\right]=\frac{t^{n-1}}{T^n(n-1)!}\,e^{-\frac{t}{T}} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned} y(t)\big|_{u(t)=1(t)}&=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{1}{(Ts+1)^n}\right]=\\ &=1-e^{-\frac{t}{T}}\left(1+\frac{t}{1!T}+\frac{t^2}{2!T^2}+\frac{t^3}{3!T^3}+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!T^{n-1}}\right)\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} y(t)\big|_{u(t)=u_{st}\cdot 1(t)}&=L^{-1}\left[u_{st}\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{(Ts+1)^n}\right]=\\ &=u_{st}L^{-1}\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\left(1+\frac{t}{1!T}+\frac{t^2}{2!T^2}+\frac{t^3}{3!T^3}+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!T^{n-1}}\right)\right]\end{aligned} \tag{7.32}$$



Na rys. 7.17 pokazano odpowiedź na wymuszenie jednostkowe członu inercyjnego szóstego rzędu o transmitancji $G(s)=1/(Ts+1)^6$. Charakterystycznymi cechami odpowiedzi skokowej członów inercyjnych wyższych rzędów są stałe czasowe $T_1$ i $T_2$, określone przez styczną do krzywej odpowiedzi, wystawioną w punkcie jej przegięcia. Wartości stosunków $T_1/T$ oraz $T_2/T$ są indywidualnymi cechami członów inercyjnych poszczególnych rzędów; wartości tych stosunków podane są w tabl. 7.1.




Rys. 7.17. Odpowiedź na wymuszenie jednostkowe członu inercyjnego szóstego rzędu

Tablica 7.1

**Parametry członów inercyjnych wyższych rzędów**

| $n$ | $T_1/T$ | $T_2/T$ | $T_1/T_2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0,282 | 2,718 | 0,104 |
| 3 | 0,805 | 3,695 | 0,218 |
| 4 | 1,425 | 4,463 | 0,319 |
| 5 | 2,1 | 5,119 | 0,41 |
| 6 | 2,811 | 5,699 | 0,493 |

W praktyce charakterystyki skokowe obiektów statycznych najczęściej mają kształt zbliżony do odpowiedzi skokowych członów inercyjnych wyższego rzędu. Do opisu właściwości takich obiektów wykorzystuje się transmitancje w postaci:

$$G_{ob}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{k_{ob}}{T_z s+1}\,e^{-T_0 s} \tag{7.33}$$

lub

$$G_{ob}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{k_{ob}}{(Ts+1)^n} \tag{7.34}$$

lub

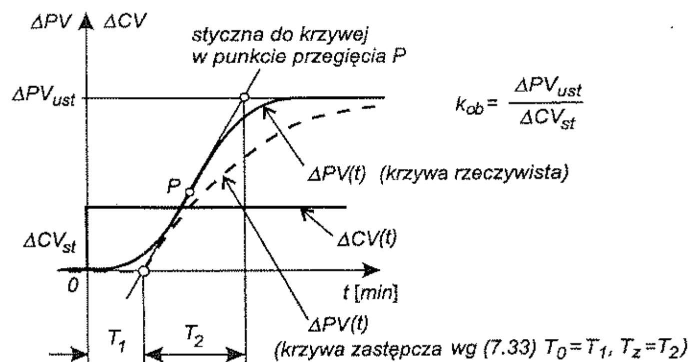
$$G_{ob}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{k_{ob}}{(Ts+1)^n}\,e^{-T_0 s} \tag{7.35}$$

Model matematyczny obiektu w postaci transmitancji (7.34) został zaproponowany przez Strejca w 1959 r., stąd często nazywa się go modelem Strejca; model (7.35) nazywa się modelem Strejca z opóźnieniem.

Niezależnie od przyjętej postaci transmitancji, wzmocnienie $k_{ob}$ obiektu jest stosunkiem ustalonej wartości odpowiedzi $\Delta y_{must}$ ($\Delta PV_{ust}$) do wartości skoku $\Delta u_{st}$ ($\Delta CV_{st}$)

$$k_{ob} = \frac{\Delta y_{must}}{\Delta u_{st}} \quad \text{lub} \quad k_{ob} = \frac{\Delta PV_{ust}}{\Delta CV_{st}} \tag{7.36}$$

W praktyce stosuje się szereg metod ustalania wartości stałych czasowych $T_0$ i $T_z$ transmitancji w postaci (7.33). Najprostszą i jednocześnie najmniej dokładną metodą jest przyjęcie, że stałe czasowe $T_0$ i $T_z$ transmitancji (7.33) są identyczne z wielkościami $T_1$ i $T_2$ odpowiedzi skokowej obiektu; wielkości te wyznacza się, wystawiając do wyznaczonej eksperymentalnie odpowiedzi skokowej obiektu styczną w punkcie przegięcia. Odpowiedź skokowa takiego modelu ma postać krzywej wykreślonej na rys. 7.18 linią przerywaną. Ze względu na prostotę postępowania ta metoda ustalania transmitancji modelu obiektu ma duże znaczenie praktyczne.




Rys. 7.18. Odpowiedź skokowa obiektu statycznego

Dokładniejsze metody doboru stałych czasowych $T_0$ i $T_z$ transmitancji w postaci (7.33) opierają się na założeniu, że odpowiedź skokowa modelu obiektu pokrywa się w dwóch punktach z rzeczywistą odpowiedzią skokową obiektu (tzw. metody siecznej). Na rys. 7.19 przedstawiono odpowiedź skokową obiektu (linia ciągła) i odpowiedź skokową modelu obiektu (linia przerywana), pokrywające się w punktach P1 i P2. Punkt P1 leży na wysokości $0{,}632PV_{ust}$, co odpowiada wartości, jaką uzyskuje odpowiedź członu inercyjnego po upływie czasu równego stałej czasowej, a punkt P2 – na wysokości $0{,}5PV_{ust}$. Z rys. 7.19 wynika zależność

$$t_2 = T_0 + T_z$$

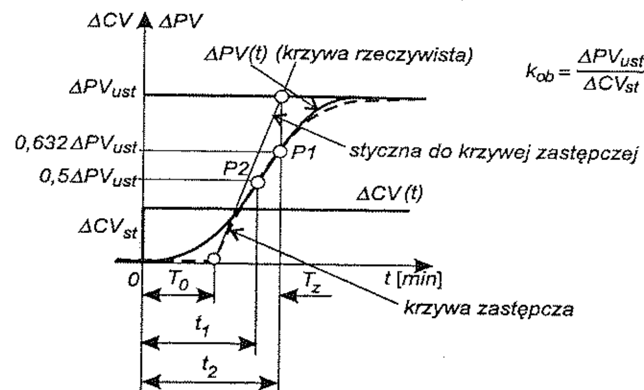
Podstawiając odpowiednio wartości współrzędnych punktów P1 i P2 do równania odpowiedzi skokowej członu inercyjnego, otrzymuje się zależności:

$$T_0 = \frac{t_1 - t_2 \ln 2}{1 - \ln 2} \tag{7.37}$$

oraz

$$T_z = t_2 - T_0 = \frac{t_2 - t_1}{1 - \ln 2} \tag{7.38}$$

Aby określić model obiektu w postaci transmitancji (7.34) należy, na podstawie tabl. 7.1 i wartości stałych czasowych $T_1$ i $T_2$ (rys. 7.18) odpowiedzi skokowej obiektu, ustalić parametry $T$ i $n$ przyjętej transmitancji. Procedurę doboru tych parametrów wyjaśniono na przykładzie (przykład 7.3).

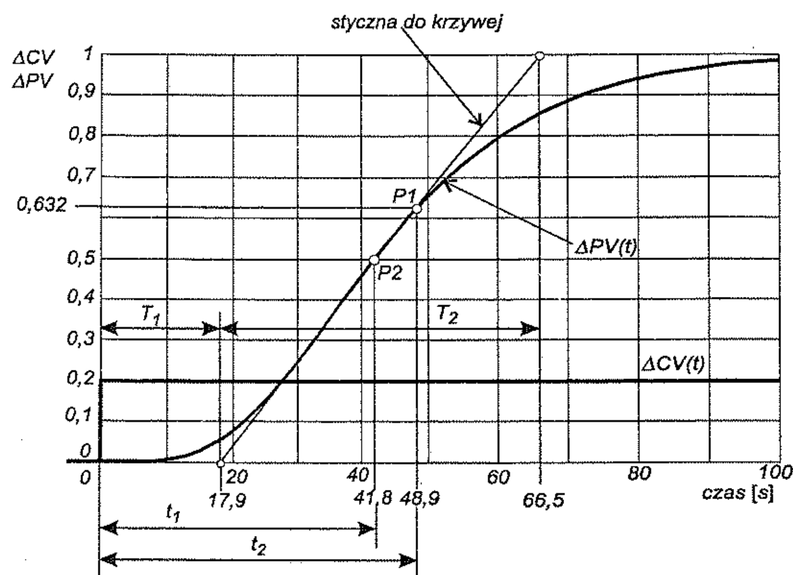



Rys. 7.19. Rysunek ilustrujący metodę siecznej wyznaczania stałych czasowych modelu (7.33) obiektu regulacji

Przeważnie stosunek stałych $T_1/T_2$ czasowych rzeczywistych odpowiedzi odbiega od wartości tego stosunku występujących w tabl. 7.1. Idea modelu Strejca z opóźnieniem polega na tym, że stałą czasową $T_1$ odpowiedzi skokowej obiektu zmniejsza się o czas $T_0$ na tyle, żeby stosunek tej zmniejszonej stałej czasowej $T_1 - T_0$ do stałej $T_2$ obiektu był równy wartości występującej w tabl. 7.1. Czas $T_0$ traktuje się jako opóźnienie wprowadzane przez człon opóźniający. Stąd w modelu (7.35) pojawia się czynnik reprezentujący człon opóźniający o opóźnieniu $T_0$. Procedurę wyznaczania parametrów modelu Strejca przedstawiono w przykładzie 7.3.

**Przykład 7.3**

Na rys. 7.20 przedstawiono otrzymaną doświadczalnie odpowiedź skokową obiektu wraz z wartościami charakterystycznych parametrów. Należy wyznaczyć transmitancje operatorowe poszczególnych postaci modeli tego obiektu.




Rys. 7.20. Odpowiedź skokowa obiektu do przykładu 7.3

*Rozwiązanie*

Z postaci odpowiedzi skokowej obiektu wynika, że jest to obiekt statyczny. Do opisu właściwości takich obiektów wykorzystuje się transmitancje w postaci (7.33), (7.34) lub (7.35).

Wzmocnienie $k_{ob}$, występujące we wszystkich postaciach transmitancji, jest stosunkiem ustalonej wartości przyrostu wielkości wyjściowej obiektu do amplitudy wymuszenia skokowego. Zatem wzmocnienie badanego obiektu wynosi

$$k_{ob} = \frac{\Delta PV_{ust}}{\Delta CV_{st}} = \frac{1}{0,2} = 5$$

Odcinki $T_1$ i $T_2$ określają miejsca przecięcia stycznej do odpowiedzi, wystawionej w punkcie przegięcia, z asymptotami odpowiedzi; odcinki $t_1$ i $t_2$ reprezentują czas, po którym odpowiedź osiąga odpowiednio 0,5 i 0,632 wartości ustalonej. Na podstawie wartości $t_1$, $t_2$, $T_1$, $T_2$ można wyznaczyć parametry poszczególnych transmitancji. Zestawienie wartości tych parametrów zawiera tabl. 7.2.



Tablica 7.2

**Parametry modeli matematycznych**

| Transmitancja modelu obiektu | Parametry modelu |
|---|---|
| $G_{ob}(s) = \frac{k_{ob}}{T_z s + 1} e^{-T_0 s}$ | Stałe czasowe wyznaczone metodą stycznej<br>$k_{ob} = 5$<br>$T_0 = T_1 = 17,9$ s<br>$T_z = T_2 = 66,5 - 17,9 = 48,6$ s |
| $G_{ob}(s) = \frac{k_{ob}}{T_z s + 1} e^{-T_0 s}$ | Stałe czasowe wyznaczone metodą siecznej<br>$k_{ob} = 5$<br>$T_0 = \frac{t_1 - t_2 \ln 2}{1 - \ln 2} = \frac{41,8 - 48,9 \ln 2}{1 - \ln 2} = 25,76$ s<br>$T_z = t_2 - T_0 = 48,9 - 25,76 = 23,14$ s |
| Model Strejca<br>$G_{ob}(s) = \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^n}$ | $n = 5$, $k_{ob} = 5$<br>$T = 9,21$ s |
| Model Strejca z opóźnieniem<br>$G_{ob}(s) = \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^n} e^{-T_0 s}$ | $n = 4$, $k_{ob} = 5$<br>$T = 10,89$ s<br>$T_0 = 2,4$ s |

W przypadku wykorzystania modelu Strejca (7.34), rząd $n$ członu inercyjnego ustala się na podstawie stosunku parametrów $T_1$ i $T_2$ odpowiedzi skokowej danego obiektu, poszukując w tabl. 7.1 najbliższej wartości tego stosunku. Dla rozważanego obiektu $T_1/T_2 = 17,9/48,6 = 0,368$. Najbliższą wartością liczby 0,368 w tabl. 7.1 jest wartość stosunku $T_1/T_2 = 0,41$, odpowiadająca rzędowi $n = 5$.

Następnie dla członu inercyjnego piątego rzędu odczytuje się z tabl. 7.1: $T_1 = 2,1T$ oraz $T_2 = 5,119T$.

Z równania $T_1 + T_2 = 66,5 = 2,1T + 5,119T$ otrzymuje się $T = 9,21$ s. Zatem transmitancja modelu obiektu zgodna z wzorem (7.34) ma postać

$$G_{ob}(s) = \frac{5}{(9,21s + 1)^5}$$

Wykorzystując model Strejca z opóźnieniem, rząd członu inercyjnego ustala się, poszukując w tabl. 7.1 najbliższej wartości stosunku $T_1/T_2$ mniejszej od wartości tego stosunku wyznaczonej dla odpowiedzi skokowej danego obiektu; zatem należy przyjąć $n = 4$.

Stałą czasową $T$ dla $n=4$ wyznacza się z zależności $T_2/T=4,463$, skąd $T=T_2/4,463=48,6/4,463=10,89$ s.

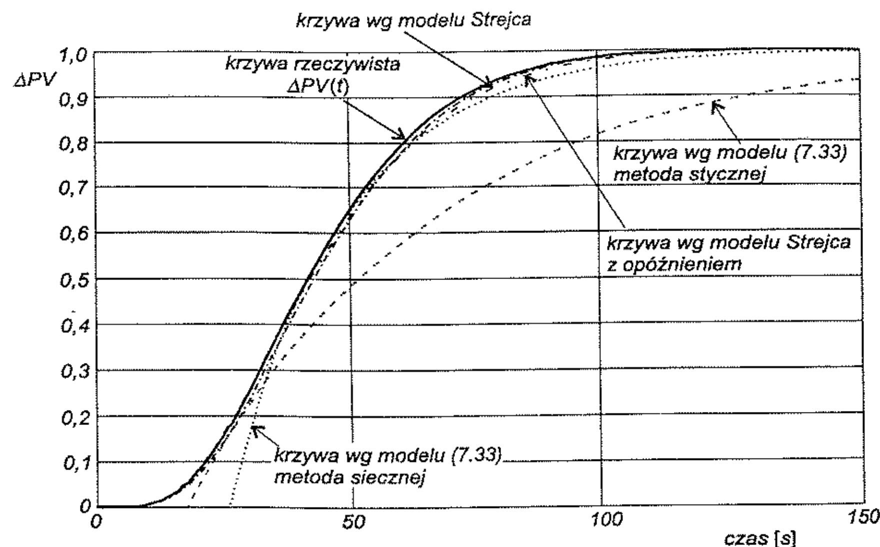
Dla $n=4$ stosunek $T_1/T=1,425$, skąd $T_1=15,5$ s.

Ponieważ zmierzona wartość $T_1$ odpowiedzi obiektu jest większa i wynosi 17,9 s, różnicę 17,9 s – 15,5 s = 2,4 s traktuje się jako czas czystego opóźnienia, a więc $T_0=2,4$ s.

Ostatecznie transmitancja obiektu wg modelu Strejca z opóźnieniem ma postać:

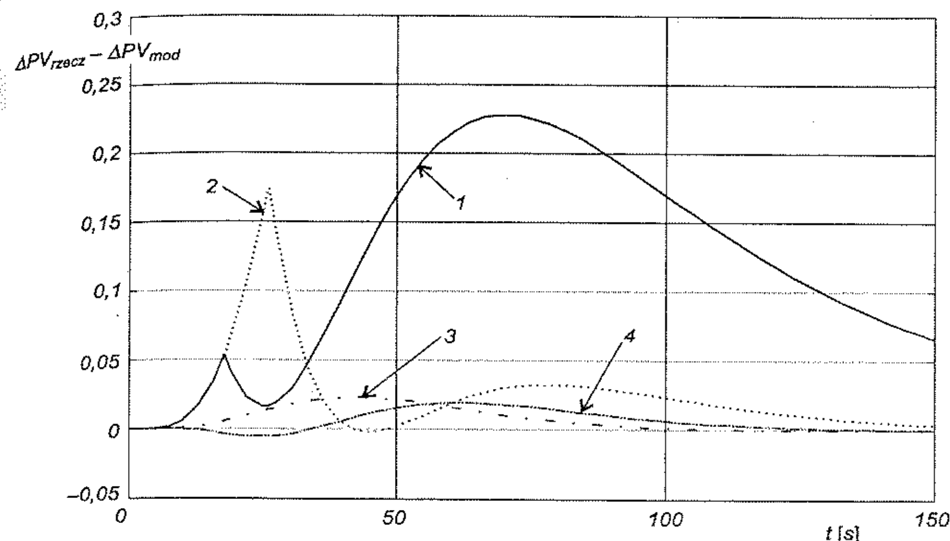
$$G_{\text{ob}}(s)=\frac{5}{(10,89s+1)^4}\,\mathrm{e}^{-2,4s}$$

Na rys. 7.21 przedstawiono porównanie odpowiedzi skokowych wyznaczonych dla poszczególnych modeli obiektu z eksperymentalnie wyznaczoną odpowiedzią tego obiektu. Jak widać, najlepszą zgodność z rzeczywistą odpowiedzią wykazuje model Strejca oraz model Strejca z opóźnieniem. Największe odchylenia od rzeczywistej odpowiedzi obiektu wykazuje model w postaci członu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem, którego parametry wyznaczono metodą stycznej. Wartości odchyleń odpowiedzi skokowych poszczególnych modeli od odpowiedzi rzeczywistej pokazano na rys. 7.22.




Rys. 7.21. Porównanie rzeczywistej odpowiedzi skokowej obiektu z odpowiedziami modeli tego obiektu






Rys. 7.22. Odchyłki odpowiedzi skokowych modeli obiektu od rzeczywistej odpowiedzi obiektu: 1 – model (7.33), stałe czasowe określone metodą stycznej; 2 – model (7.33), stałe czasowe określone metodą siecznej; 3 – model Strejca (7.34); 4 – model Strejca z opóźnieniem (7.35)

## 7.3.2. MODELE MATEMATYCZNE WYKORZYSTYWANE DO OPISU ASTATYCZNYCH OBIEKTÓW REGULACJI

Najczęściej spotykanymi w praktyce astatycznymi obiektami regulacji są obiekty o właściwościach elementu całkującego z inercją (rys. 7.23a) albo całkującego z opóźnieniem i inercją (rys. 7.23b).

Do opisu obiektów o odpowiedzi skokowej jak na rys. 7.23a wykorzystuje się transmitancje w postaci

$$G_{\text{ob}}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{1}{T_z s(T_0 s+1)} \tag{7.39}$$

lub

$$G_{\text{ob}}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{1}{T_z s}\,\mathrm{e}^{-T_0 s} \tag{7.40}$$

Transmitancji w postaci (7.39) odpowiada odpowiedź skokowa wykreślona linią ciągłą, a transmitancji (7.40) – linią przerywaną.

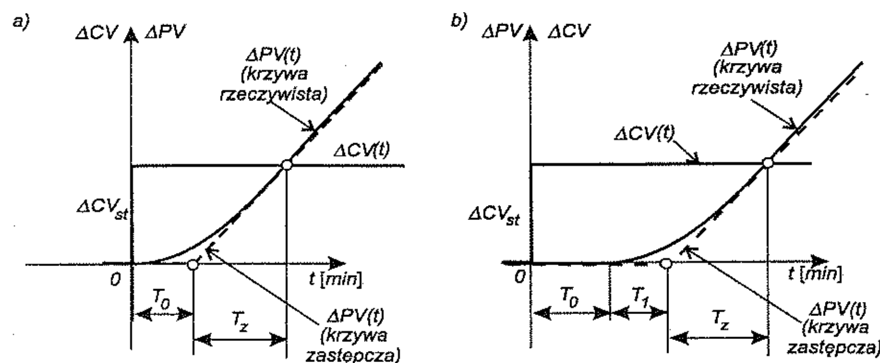
Do opisu obiektów o odpowiedzi skokowej jak na rys. 7.23b wykorzystuje się transmitancje w postaci

$$G_{ob}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{1}{T_z s(T_1 s+1)}e^{-T_0 s} \tag{7.41}$$

lub

$$G_{ob}(s)=\frac{\Delta y_m(s)}{\Delta u(s)}=\frac{1}{T_z s}e^{-(T_0+T_1)s} \tag{7.42}$$

Transmitancji w postaci (7.41) odpowiada odpowiedź skokowa wykreślona linią ciągłą, a transmitancji (7.42) – linią przerywaną.

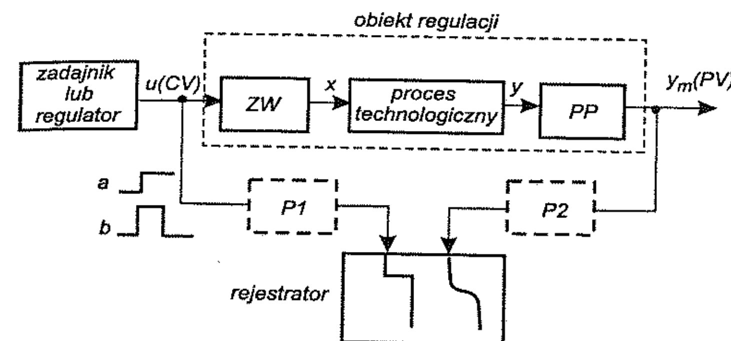



Rys. 7.23. Sposób określania parametrów modeli obiektów astatycznych na podstawie odpowiedzi skokowej obiektu: a) obiekt całkujący z inercją, b) obiekt całkujący z opóźnieniem i inercją

## 7.3.3. EKSPERYMENTALNE WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK CZASOWYCH OBIEKTÓW REGULACJI

Charakterystyki czasowe obiektu regulacji, najczęściej odpowiedzi skokowe (sygnał *a* na rys. 7.24), są najczęściej wykorzystywane do liczbowego ustalania parametrów wybranego modelu matematycznego. Charakterystyki te wyznacza się w niewielkim obszarze wokół wybranego punktu pracy obiektu, w układzie pomiarowym jak na rys. 7.24. Przetworniki sygnałów P1, P2 zainstalowane w układzie pomiarowym służą do przekształcania wyników pomiaru na sygnały wejściowe rejestratora lub na sygnały dopasowane do interfejsu komputera zastosowanego zamiast rejestratora. Przetworniki te powinny mieć stałe czasowe co najmniej o rząd mniejsze od stałej czasowej badanego obiektu, żeby wnoszone przez nie zniekształcenia badanych przebiegów były pomijalne.






Rys. 7.24. Schemat układu pomiarowego do wyznaczania charakterystyk czasowych obiektów regulacji; PP – przetwornik pomiarowy, ZW – zespół wykonawczy, P1, P2 – przetworniki sygnałów

Jeżeli badany obiekt ma już zainstalowaną aparaturę pomiarową i regulacyjną, to sygnał skokowy może być generowany przez regulator pracujący w trybie sterowania ręcznego. Jeżeli badany jest obiekt bez aparatury regulacyjnej, to do generowania sygnału skokowego może być wykorzystywany prosty generator wymuszenia RC lub dwa zadajniki i prosty przełącznik stykowy.

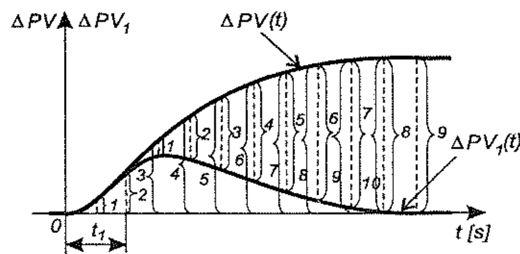
Jeżeli ze względów eksploatacyjnych nie jest wskazane zastosowanie skokowego wymuszenia badanego obiektu (np. w przypadku obiektów astatycznych, ze względu na niebezpieczeństwo wyjścia obiektu poza zakres pracy), to jako sygnał wymuszający (sygnał *b* na rys. 7.24) należy zastosować impuls prostokątny o określonej amplitudzie i czasie trwania. W takim przypadku odpowiedź skokową obiektu potrzebną do wyznaczania parametrów modelu otrzymuje się w sposób pośredni, na podstawie odpowiedzi na impuls prostokątny o czasie trwania $t_1$. Odpowiedź taką otrzymać można metodą graficzną lub analityczną. Metodę graficzną ilustruje rys. 7.25.Odpowiedź $\Delta PV_1(t)$ obiektu na impuls prostokątny i jego odpowiedź $\Delta PV(t)$ skokowa związane są zależnością

$$\Delta PV_1(t)=\Delta PV(t)-\Delta PV(t-t_1) \tag{7.43}$$

Równanie odpowiedzi skokowej wynikające z zależności (7.43) ma postać

$$\Delta PV(t)=\Delta PV_1(t)+\Delta PV(t-t_1) \tag{7.44}$$

Konstrukcja graficzna odpowiadająca wzorowi (7.44) jest pokazana na rys. 7.25. Do chwili $t = t_1$ przebiegi $\Delta PV(t)$ i $\Delta PV_1(t)$ się pokrywają. W chwilach następnych wartości $\Delta PV(t)$ są sumą $\Delta PV_1(t)$ i $\Delta PV(t - t_1)$.




Rys. 7.25. Ilustracja metody wyznaczania odpowiedzi skokowej $\Delta PV(t)$ obiektu statycznego na podstawie jego odpowiedzi $\Delta PV_1(t)$ na impuls prostokątny o czasie trwania $t_1$

Wyznaczając doświadczalnie charakterystyki czasowe obiektów, należy amplitudy wymuszeń i czas ich trwania dobierać indywidualnie do danego obiektu. Ogólne zalecenia są następujące:
- w przypadku sygnału skokowego amplituda powinna wynosić około 5÷15% zakresu zmian wielkości wejściowej,
- w przypadku sygnału impulsowego amplituda powinna wynosić około 15÷25% zakresu zmian wielkości wejściowej.

Pomiary powinny być powtarzane kilkakrotnie zarówno w przypadku zmian dodatnich, jak i ujemnych.

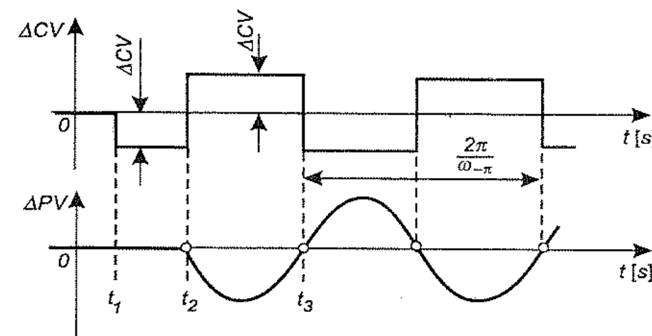
### 7.3.4. WYZNACZANIE PARAMETRÓW MODELI OBIEKTÓW REGULACJI NA PODSTAWIE CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH OBIEKTÓW

Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych jest bardziej dokładną i mniej wrażliwą na zakłócenia metodą określania właściwości obiektu. Metoda ta daje możliwość filtracji działających w trakcie badań zakłóceń. Charakterystyki częstotliwościowe obiektu umożliwiają nie tylko określenie parametrów modelu matematycznego obiektu, lecz także mogą być wykorzystane do projektowania układu regulacji metodami częstotliwościowymi.



W praktyce do ustalenia właściwości badanego obiektu wystarczy wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych, np. charakterystyki amplitudowo-fazowej w ograniczonym paśmie pulsacji. Zaleca się rozpoczynać badania od ustalenia wartości pulsacji $\omega_{-\pi}$, tj. pulsacji przy której przesunięcie fazowe obiektu wyniesie $-180°$ ($-\pi$), a następnie w kilku punktach w zakresie od $0{,}5\omega_{-\pi}$ do $2\omega_{-\pi}$. Na ogół wymagany zakres pulsacji jest niski: od 0,01 Hz do kilkudziesięciu herców.

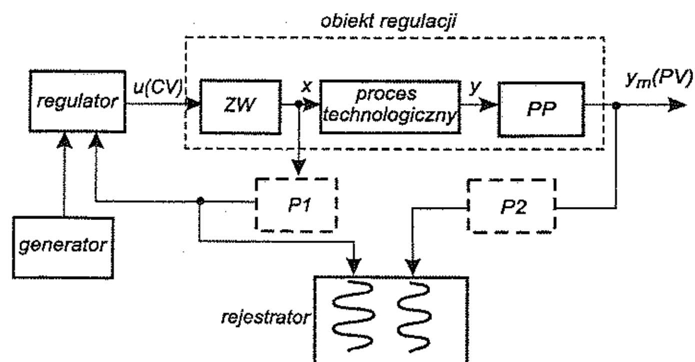
Do wyznaczania pulsacji $\omega_{-\pi}$ nie jest niezbędny generator przebiegów sinusoidalnych. Wystarczy posłużyć się procedurą zmian wielkości wejściowej $CV$, tak jak to przedstawiono na rys. 7.26. W pewnej chwili $t_1$, w stanie ustalonym wielkości regulowanej, należy zmienić sterowanie $CV$ o wartość $\Delta CV$, a następnie w chwili $t_2$, tj. gdy pojawi się pierwsza zmiana (np. spadek jak na rysunku) wielkości regulowanej $PV$ wywołana zmianą sterowania, zmienić sterowanie $CV$ w przeciwnym kierunku, nadając mu amplitudę $\Delta CV$. Wybór chwili $t_3$ i następnych wynika z rysunku.



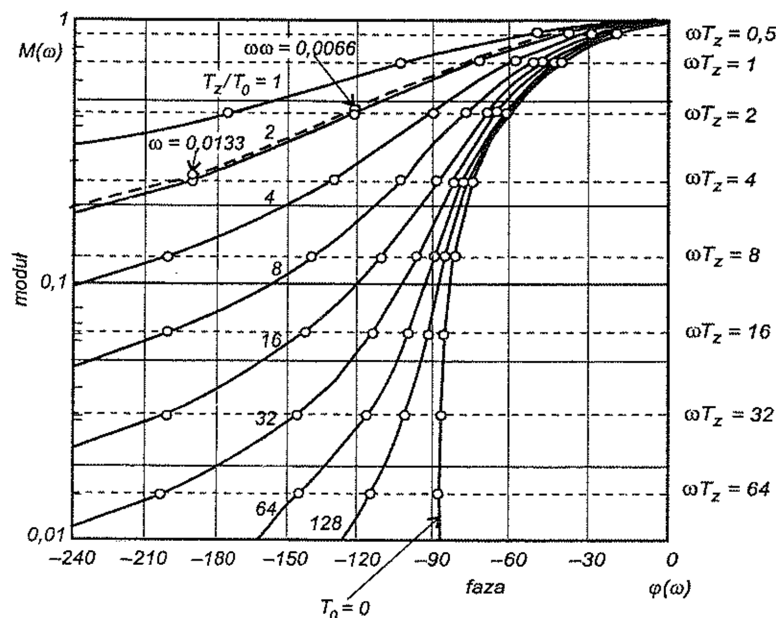

Rys. 7.26. Eksperymentalne określanie pulsacji $\omega_{-\pi}$

Pomiary charakterystyk częstotliwościowych można przeprowadzić w instalacji technologicznej z zainstalowanym regulatorem (rys. 7.27). Regulator oddziałuje na dopływ strumieni energetyczno-materiałowych w sposób sinusoidalnie zmienny, generując sterowanie $CV$ odtwarzające sygnał z generatora. Przetworniki sygnałów P1 i P2 pełnią tę samą rolę, co w układzie przedstawionym na rys. 7.24.

Do wyznaczania parametrów wybranej transmitancji jako modelu badanego obiektu, np. w postaci (7.33), na podstawie doświadczalnie zdjętej charakterystyki częstotliwościowej należy posłużyć się dostępnymi w literaturze nomogramami. Nomogramy te zawierają zbiory charakterystyk częstotliwościowych odpowiadających danej transmitancji, przy różnych jej parametrach [9].




Rys. 7.27. Sposób przyłączenia generatora do obiektu (generator działa za pośrednictwem regulatora sterującego dopływem strumieni energetyczno-materiałowych do obiektu) [9]




Rys. 7.28. Charakterystyki częstotliwościowe obiektów o transmitancji $G(s)=\frac{1}{T_z s+1}e^{-T_0 s}$



Nomogram na rys. 7.28 przedstawia rodzinę charakterystyk częstotliwościowych obiektów o transmitancji $G(s)=\frac{1}{T_z s+1}e^{-T_0 s}$ dla różnych wartości stosunku $T_z/T_0$. Załóżmy, że eksperymentalnie wyznaczono charakterystykę amplitudowo-fazową obiektu w zakresie przesunięć fazowych występujących w nomogramie. Charakterystykę tę należy nanieść na nomogram, dostosowując wartości modułu do skali nomogramu (wartości modułów charakterystyki eksperymentalnej należy podzielić przez wzmocnienie obiektu $k_{ob}$). Naniesioną charakterystykę (linia przerywana) tworzy szereg punktów odpowiadających kolejnym pulsacjom sygnału wejściowego badanego obiektu. Jak widać, charakterystyka eksperymentalna praktycznie pokrywa się z krzywą nomogramu o parametrze $T_z/T_0=2$ i przecina linię poziomą siatki nomogramu odpowiadającą parametrowi $\omega T_z=4$ przy pulsacji $\omega=0{,}0133$ rad/s. Zatem zastępcza stała czasowa wynosi $T_z=4/0{,}0133\cong 300$ s, a czas opóźnienia $T_0=T_z/2=150$ s. Badany obiekt można więc opisać modelem w postaci transmitancji

$$G_{ob}(s)=\frac{k_{ob}}{300s+1}e^{-150s}$$

# 8. REGULATORY

## 8.1. MIEJSCE I ROLA REGULATORA W UKŁADZIE REGULACJI

Jak wspomniano w rozdz. 1, układ automatycznej regulacji, którego głównymi zespołami są obiekt i sterujący nim regulator, stanowi obwód z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, co oznacza, że w układzie regulacji zmiany wielkości regulowanej spowodowane oddziaływaniem zakłóceń są kompensowane przez oddziaływanie regulatora na obiekt regulacji. Na przykład, w przypadku wywołanego przez zakłócenia wzrostu wielkości regulowanej ponad wartość zadaną, regulator powinien wygenerować zmianę swojego sygnału wyjściowego – sygnału sterującego, powodującą zmniejszenie wielkości regulowanej.

Regulator generuje zmiany sygnału sterującego $u$ (*CV*) na podstawie porównania sygnału $y_m$ (*PV*), zwanego zmienną procesową, generowanego przez przetwornik pomiarowy obiektu i reprezentującego wielkość regulowaną, z sygnałem wielkości zadanej $w$ (*SP*). Wynik tego porównania – zwany odchyłką regulacji $e$ – w automatyce przemysłowej definiuje się jako $e = y_m - w$ (lub $e = PV - SP$).

Odchyłka regulacji w układzie może pojawić się nie tylko wskutek wywołanej przez zakłócenia zmiany wielkości regulowanej w stosunku do wartości zadanej, lecz także w wyniku zmiany wartości zadanej. Zadaniem regulatora w układzie regulacji jest takie oddziaływanie na obiekt regulacji, aby zminimalizować odchyłkę regulacji, niezależnie od przyczyny jej powstania. Sposób kształtowania zmian sygnału sterującego $u$ (*CV*) po pojawieniu się odchyłki regulacji zależy od właściwości zastosowanego regulatora. W przypadku regulatorów analogowych o działaniu ciągłym, właściwości regulatora określa jego transmitancja operatorowa

$$G_r(s) = \frac{\Delta u(s)}{e(s)} \quad \text{lub} \quad G_r(s) = \frac{\Delta CV(s)}{e(s)} \tag{8.1}$$

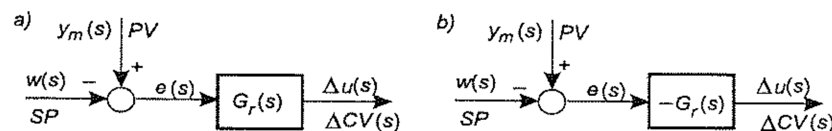


gdzie $\Delta u(s)$ jest transformatą Laplace'a przebiegu zmian $\Delta u(t)$ wartości sygnału wyjściowego regulatora względem wartości początkowej, istniejącej w stanie ustalonym przy $e = 0$, wywołanych pojawieniem się odchyłki regulacji $e(t)$.

Jak wynika z rozważań w rozdz. 7, w praktyce występują obiekty regulacji, w których wzrost wartości sygnału sterującego $u$ powoduje wzrost wartości zmiennej procesowej $y_m$ (rys. 7.16a), oraz obiekty, w których wzrost wartości sygnału sterującego powoduje zmniejszanie wartości zmiennej procesowej (rys. 7.16b). Aby więc wykorzystywane w praktyce regulatory mogły tworzyć układy z ujemnym sprzężeniem zwrotnym z obydwoma rodzajami obiektów, muszą mieć możliwość zmiany kierunku działania.

W przypadku obiektów, w których wzrost wartości sygnału sterującego $u$ powoduje zmniejszanie wartości zmiennej procesowej $y_m$ (rys. 7.16b), regulator powinien na wzrost odchyłki regulacji reagować wzrostem wartości sygnału sterującego; takie zachowanie regulatora nazywa się **działaniem normalnym** (N), rys. 8.1a. Schemat układu regulacji z takim obiektem i regulatorem o działaniu normalnym przedstawiono na rys. 8.2a. Natomiast w przypadku obiektów, w których wzrost wartości sygnału sterującego $u$ powoduje zwiększanie wartości zmiennej procesowej $y_m$ (rys. 7.16a), regulator na wzrost odchyłki regulacji powinien reagować zmniejszaniem wartości sygnału sterującego; takie zachowanie regulatora nazywa się **działaniem odwrotnym** lub rewersyjnym (R), rys. 8.1b. Schemat układu regulacji z takim obiektem i regulatorem o działaniu odwrotnym przedstawiono na rys. 8.2b. Na schematach blokowych (rys. 8.1b i rys. 8.2b) działanie odwrotne regulatora wyraża jego ujemna transmitancja operatorowa.

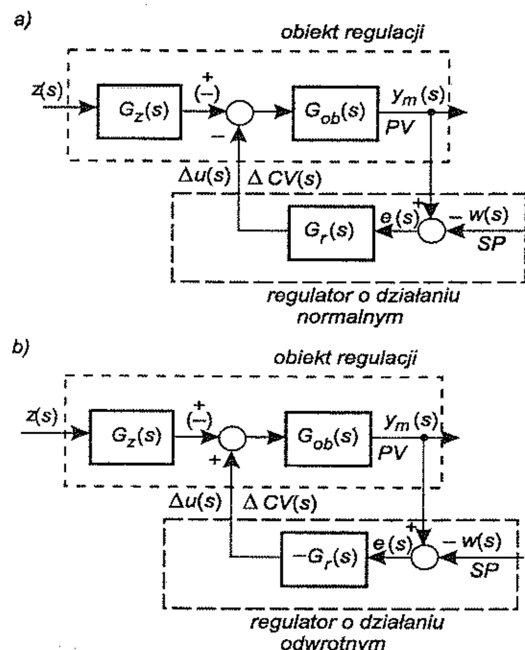
W stosowanych w praktyce regulatorach przemysłowych działanie normalne lub rewersyjne jest nastawiane przez operatora np. przełącznikiem N–R (regulatory analogowe) lub programowo (regulatory mikroprocesorowe, sterowniki PLC).




Rys. 8.1. Schemat blokowy regulatora: a) o działaniu normalnym, b) o działaniu odwrotnym

Łatwo wykazać, że transmitancje operatorowe względem zakłócenia i względem wartości zadanej obu układów z rys. 8.2 są identyczne, a zatem takie same są też ich reakcje (przebiegi sygnałów wyjściowych i odchyłek regulacji) na zakłócenia i zmiany wartości zadanej (wymuszenia). Dlatego do analizy właściwości układu regulacji można wykorzystać zarówno schemat wg rys. 8.2a, jak i schemat wg rys. 8.2b. Natomiast nie są identyczne charakterystyki elementów składowych (obiektu i regulatora) obu układów. Z tych też względów wybra-

ne charakterystyki regulatorów zostały przedstawione w wariantach odpowiadających działaniu normalnemu i działaniu odwrotnemu.




Rys. 8.2. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem o działaniu: a) normalnym, b) odwrotnym

## 8.2. KLASYFIKACJA REGULATORÓW

W praktyce wykorzystuje się wiele rodzajów regulatorów. Są one realizowane w różnych technikach, przeznaczone do różnych zastosowań, działające na różnych zasadach. Wraz z postępem techniki i technologii oraz ekspansją zastosowań automatyki powstają coraz to nowe regulatory o coraz szerszych możliwościach funkcjonalnych, głównie z wykorzystaniem techniki cyfrowej.

Na rys. 8.3 przedstawiono klasyfikację regulatorów ze względu na kilka podstawowych kryteriów ich oceny. Scharakteryzowanie danego regulatora wymaga określenia jego cech odnoszących się do poszczególnych kryteriów oceny.



| *Kryterium oceny* | *Rodzaje regulatorów* |
|---|---|
| *Rodzaj przetwarzanych sygnałów* | *analogowe* |
| | *cyfrowe* |
| *Sposób oddziaływania na obiekt regulacji* | *o działaniu ciągłym* |
| | *o działaniu nieciągłym* |
| *Podlegania prawu superpozycji* | *liniowe* |
| | *nieliniowe* |
| *Energia niezbędna do działania* | *bezpośredniego działania* |
| | *o działaniu pośrednim* |
| *Technika realizacji* | *mechaniczne* |
| | *pneumatyczne* |
| | *hydrauliczne* |
| | *elektryczne* |
| *Przeznaczenie* | *specjalne* |
| | *uniwersalne* |
| *Algorytm działania* | *regulatory PID* |
| | *regulatory inne* |

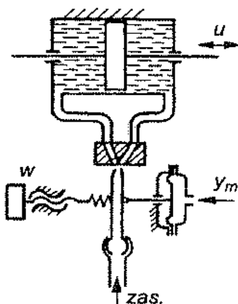
Rys. 8.3. Ogólna klasyfikacja regulatorów

Podział regulatorów na analogowe i cyfrowe wynika z rodzaju przetwarzanych sygnałów. Regulatory analogowe przetwarzają tylko sygnały analogowe, a algorytm ich działania realizuje się, wykorzystując właściwości statyczne i dynamiczne analogowych elementów dynamicznych. Regulatory cyfrowe przetwarzają sygnały cyfrowe; algorytm działania realizują one w technice cyfrowej, tzn. wykorzystywane jest odpowiednie oprogramowanie, w którym algorytm działania zapisany jest w postaci formuły matematycznej. Sygnały wyjściowe zarówno regulatorów analogowych jak i cyfrowych mogą być ciągłe w czasie (regulatory o działaniu ciągłym) i nieciągłe (regulatory o działaniu nieciągłym).

Właściwości dynamiczne regulatorów, determinujące sposób kształtowania sygnału wyjściowego regulatora pod wpływem sygnału odchyłki regulacji, określane są jako algorytm pracy regulatora lub algorytm regulacji. Najczęściej stosowany w praktyce przemysłowej jest tzw. algorytm PID (ang. *Proportional-Integral-Derivative*), tj. algorytm proporcjonalno-całkująco-różniczkujący. Jest on realizowany przez regulatory i sterowniki przemysłowe pracujące z wykorzystaniem zarówno standardowych sygnałów ciągłych, jak i sygnałów nieciągłych. Poprzez odpowiednie ustawienie parametrów, regulator o algorytmie PID może także realizować prostsze algorytmy: P, PI, PD.

Podział na regulatory bezpośredniego działania (tzw. nieautonomiczne) i regulatory o działaniu pośrednim (autonomiczne) związany jest z pochodzeniem energii niezbędnej do ich działania. Regulatory bezpośredniego działania nie mają oddzielnego zasilania; realizują swój algorytm, pobierając energię ze sterowanego procesu. Regulatory o działaniu pośrednim muszą być zasilane energią; w zależności od nośnika tej energii mogą to być regulatory elektryczne, pneumatyczne lub hydrauliczne.

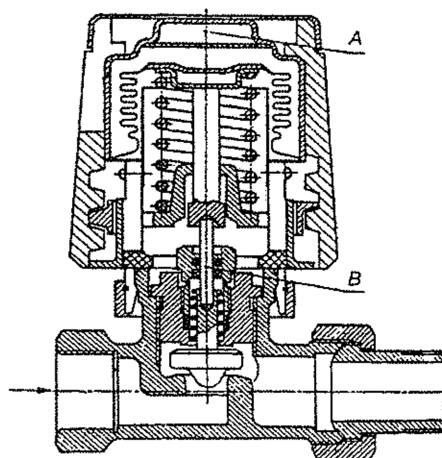
Przykład regulatora analogowego o działaniu pośrednim pokazano na rys. 8.4. Jest to regulator hydrauliczny z tzw. rurką strumieniową. Jego wielkością wyjściową jest położenie tłoczyska siłownika hydraulicznego.




Rys. 8.4. Regulator hydrauliczny o działaniu pośrednim

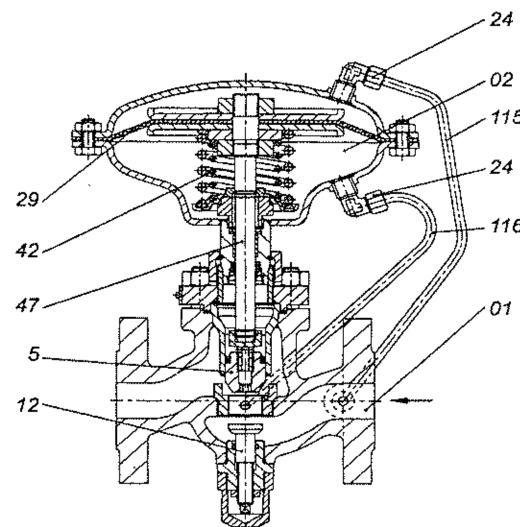
Jako przykłady regulatorów o działaniu bezpośrednim przytoczono tzw. grzejnikowy regulator temperatury (rys. 8.5) oraz regulator przepływu (rys. 8.6).

Przedstawiony na rys. 8.5 regulator temperatury montowany jest bezpośrednio na zaworze dostarczającym czynnik grzewczy do instalacji centralnego ogrzewania i służy do utrzymywania stałej temperatury w pomieszczeniu. Rolę czujnika temperatury pełni zespół A, składający się z metalowej osłony i umieszczonego w niej mieszka sprężystego. Przestrzeń między mieszkiem i osłoną wypełniona jest częściowo ciekłym izobutanem; pozostałą część tej przestrzeni zajmuje para izobutanu. Jeżeli temperatura na zewnątrz regulatora wzrośnie, to nastąpi dodatkowe odparowanie izobutanu i w efekcie nastąpi wzrost ciśnienia wokół mieszka. Wytworzona siła służy do pokonania siły sprężyn, co wywołuje przesunięcie trzpienia B w dół i ograniczenie przepływu czynnika grzewczego do instalacji. Wartość zadaną temperatury ustawia się poprzez zmianę zewnętrznym pokrętłem napięcia wstępnego sprężyny.




Rys. 8.5. Schemat regulatora temperatury firmy Danfoss

Regulator przedstawiony na rys. 8.6 służy do utrzymywania zadanej wartości natężenia przepływu medium w instalacji technologicznej. Stosowany jest w systemach ciepłowniczych przy przepływie zimnej lub gorącej wody, pary wodnej, powietrza i gazów niepalnych. Głównymi zespołami regulatora są zawór (01) i siłownik (02). Regulator utrzymuje stałą wartość natężenia przepływu dzięki regulacji spadku ciśnienia na dławiku (12), będącym nastawnikiem wartości zadanej. Przepływające medium sprzed i zza dławika przekazywane jest do komór siłownika przewodami (115) i (116). Zmiany siły wynikającej z oddziaływania medium na membranę siłownika powoduje odpowiednie zmiany położenia grzyba (5) zaworu. Na przykład, zwiększenie natężenia przepływu w stosunku do stanu ustalonego powoduje zwiększenie spadku ciśnienia na dławiku (12) i zmniejszenie ciśnienia za dławikiem, na skutek czego następuje zbliżenie grzyba (5) do gniazda, a więc w konsekwencji ograniczenie zwiększonego przepływu.




Rys. 8.6. Schemat regulatora przepływu firmy POLNA S.A. (wg Automatyka przemysłowa i ciepłownicza. Katalog POLNA S.A.)

Ze względu na przeznaczenie rozróżnia się regulatory uniwersalne i specjalne.

**Regulatory uniwersalne**, dzięki standardowym sygnałom wejściowym i wyjściowym, mogą współpracować z wieloma rodzajami przetworników pomiarowych i elementów wykonawczych; są to regulatory pośredniego działania.

**Regulatory specjalne** dostosowane są do współpracy z określonego rodzaju obiektami regulacji i urządzeniami pomiarowymi. Nazwa takiego regulatora wskazuje na rodzaj wielkości regulowanej, np. regulator prędkości obrotowej czy regulator temperatury. Regulatory specjalne, stosowane w prostych instalacjach technologicznych, są z reguły regulatorami bezpośredniego działania, ale coraz częściej stosuje się regulatory specjalne o działaniu pośrednim (np. mikroprocesorowe regulatory temperatury w domowych instalacjach CO).

## 8.3. MATEMATYCZNY OPIS REGULATORÓW PID O DZIAŁANIU CIĄGŁYM

Niezależnie od techniki realizacji regulatorów, ich nazwy są związane z realizowanym algorytmem przetwarzania sygnału odchyłki regulacji. W przypadku coraz częściej wykorzystywanych komputerowych systemów sterowania istotny staje się jedynie rodzaj zastosowanego algorytmu przetwarzania sygnałów. Zestawienie matematycznych modeli w postaci transmitancji operatorowych, wykorzystywanych do opisu działania regulatorów PID zamieszczono w tabl. 8.1.

Tablica 8.1

**Algorytmy regulatorów PID**

| Lp. | Nazwa regulatora (nazwa algorytmu) | Transmitancja operatorowa |
|---|---|---|
| 1 | Regulator proporcjonalny, regulator P (Algorytm P) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p$ (8.2) |
| 2 | Regulator całkujący, regulator I (Algorytm I) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=\frac{1}{T_i s}$ (8.3) |
| 3 | Regulator proporcjonalno-całkujący, regulator PI (Algorytm PI) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$ (8.4) |
| 4 | Regulator proporcjonalno-różniczkujący idealny, regulator PD idealny (Algorytm PD idealny) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p(1+T_d s)$ (8.5) |
| 5 | Regulator proporcjonalno-różniczkujący rzeczywisty, regulator PD rzeczywisty (Algorytm PD rzeczywisty) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right)$ (8.6) |
| 6 | Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący idealny, regulator PID idealny (Algorytm PID idealny) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$ (8.7) |
| 7 | Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący rzeczywisty, regulator PID rzeczywisty (Algorytm PID rzeczywisty) | $G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right)$ (8.8) |

$k_p$ – wzmocnienie proporcjonalne (wielkość niemianowana),
$T_i$ – stała czasowa akcji całkującej (w przypadku regulatorów PI i PID nazywana czasem zdwojenia) [s],
$T_d$ – stała czasowa akcji różniczkowania (czas wyprzedzenia) [s],
$k_d$ – wzmocnienie dynamiczne.



### 8.3.1. ALGORYTM P

Zależność sygnału wyjściowego $u(t)$ regulatora P o działaniu normalnym od sygnału odchyłki regulacji $e(t)$ opisuje równanie

$$u(t)=k_p\,e(t)+u_p \tag{8.9}$$

a w przypadku regulatora o działaniu odwrotnym – równanie

$$u(t)=-k_p\,e(t)+u_p \tag{8.9a}$$

gdzie: $k_p$ – wzmocnienie proporcjonalne (wielkość niemianowana); $u_p$ – punkt pracy regulatora P – wartość sygnału wyjściowego regulatora przy odchyłce regulacji $e=0$, podawana w procentach zakresu zmian sygnału wyjściowego regulatora lub w jednostkach wielkości wyjściowej regulatora. Wielkości $k_p$ i $u_p$ są nastawiane w regulatorze i nazywane nastawami regulatora lub jego parametrami statycznymi.

Sygnał wyjściowy regulatora o wartości $u_p$ powinien zapewnić w układzie regulacji, przy braku zakłóceń, takie wysterowanie zespołu wykonawczego, przy którym zespół wykonawczy dostarcza do obiektu strumień energii lub materiału w ilości niezbędnej do osiągnięcia przez wielkość regulowaną wartości zadanej.

Transmitancji regulatora P, podanej w tabl. 8.1, odpowiada przyrostowe równanie dynamiki (w przypadku regulatora o działaniu normalnym)

$$\Delta u(t)=k_p e(t) \tag{8.9b}$$

gdzie $\Delta u(t)=u(t)-u_p$ wyraża zmiany $\Delta u(t)$ sygnału wyjściowego regulatora, generowane przez regulator pod wpływem odchyłki regulacji, względem przyjętego punktu pracy $u_p$.

Wyznaczane na podstawie równania dynamiki (8.9b) odpowiedzi regulatora P na różne przebiegi sygnału odchyłki regulacji oraz charakterystyki częstotliwościowe są analogiczne, jak członu proporcjonalnego (rozdz. 5).

Algorytm P należy do tzw. algorytmów statycznych, czyli istnieje jednoznaczna zależność między wartościami $u$ sygnału wyjściowego regulatora a wartościami $e$ sygnału odchyłki regulacji, osiąganymi w stanach ustalonych. Zależność ta, stanowiąca charakterystykę statyczną regulatora, w przypadku regulatora P o działaniu normalnym ma postać

$$u=k_p\,e+u_p \tag{8.10}$$

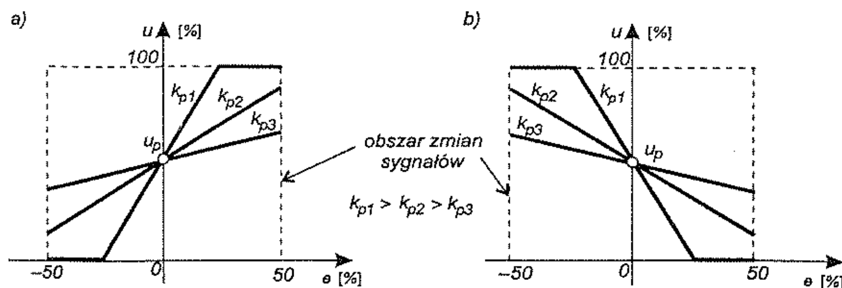
a w przypadku regulatora o działaniu odwrotnym

$$u=u_p-k_p\,e \tag{8.10a}$$

Ze względu na standaryzację sygnałów w układach automatyki, wygodnie jest przedstawiać charakterystyki statyczne elementów w układzie współrzędnych

wyskalowanych w procentach zakresu zmian sygnałów wejściowego i wyjściowego, niezależnie od fizycznej natury tych sygnałów.

Przykłady charakterystyk statycznych regulatora P o działaniu normalnym (rys. 8.7a) oraz odwrotnym (rys. 8.7b) dla trzech różnych wartości $k_p$, przy założeniu $u_p = 50\%$, przedstawiono na rys. 8.7. Na podstawie tego rysunku można stwierdzić, że przy $u_p = 0\%$ regulator o działaniu normalnym reagować może tylko na odchyłki dodatnie, natomiast regulator o działaniu odwrotnym tylko na ujemne, natomiast przy $u_p = 100\%$ sytuacja jest odwrotna.




Rys. 8.7. Przykłady charakterystyk statycznych regulatora P o działaniu: a) normalnym, b) odwrotnym

Stosowaną w praktyce formą wyrażania wartości wzmocnienia $k_p$ jest tzw. zakres proporcjonalności $x_p$ regulatora

$$x_p = \frac{1}{k_p}100\% \tag{8.11}$$

Wyraża on procentową, w stosunku do pełnego zakresu zmian, wartość odchyłki $e$, wywołującą zmianę wielkości wyjściowej $u$ regulatora o pełny zakres. Na przykład, $x_p = 25\%$ oznacza, że odchyłka regulacji $e = 25\%$ przy $u_p = 0\%$ wywołałaby zmianę sygnału wyjściowego regulatora o cały zakres. W takim przypadku sygnał ten osiągnąłby wartość graniczną i dalsze zwiększenie odchyłki regulacji nie powodowałoby jego zmian. Operowanie pojęciem zakresu proporcjonalności jest w praktyce bardzo wygodne.

## 8.3.2. ALGORYTM I

Zależność sygnału wyjściowego $u(t)$ regulatora I o działaniu normalnym od sygnału odchyłki regulacji $e(t)$ opisuje równanie

$$u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + u(0) \tag{8.12}$$



a o działaniu odwrotnym – równanie

$$u(t) = -\frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + u(0) \tag{8.12a}$$

gdzie: $T_i$ – stała czasowa akcji całkowania, $u(0)$ – wartość początkowa – wartość sygnału wyjściowego regulatora w stanie przyjętym jako początkowy, tj. w chwili $t = 0$; wartością początkową $u(0)$ może być każda wartość sygnału wyjściowego regulatora I z zakresu jego zmienności, będąca wynikiem całkowania odchyłki regulacji w okresie poprzedzającym stan początkowy.

Transmitancji regulatora I, podanej w tabl. 8.1, odpowiada przyrostowe równanie dynamiki (dla regulatora o działaniu normalnym)

$$T_i \frac{d\Delta u(t)}{dt} = e(t) \tag{8.13}$$

lub

$$\Delta u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau \tag{8.13a}$$

Równania te wyrażają zmiany $\Delta u(t)$ sygnału wyjściowego regulatora względem wartości początkowej $u(0)$, przy zerowych warunkach początkowych, tj. $\Delta u(0) = 0$ i $e(0) = 0$, generowane przez regulator pod wpływem odchyłki regulacji $e(t)$.

Charakterystykę skokową (odpowiedź na sygnał odchyłki w postaci $e(t) = e_0 \cdot 1(t)$) regulatora I o działaniu normalnym, jako przyrost $\Delta u(t)$ wartości sygnału wyjściowego względem wartości początkowej $u(0)$, otrzymuje się z równania (8.13a):

$$\Delta u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e_0\, d\tau = e_0\frac{t}{T_i} \tag{8.14}$$

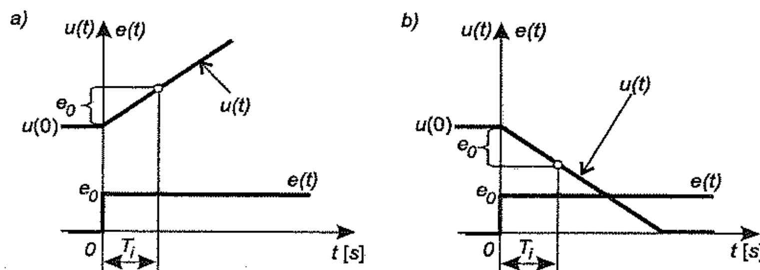
Odpowiedź regulatora I o działaniu normalnym na sygnał odchyłki w postaci $e(t) = e_0 \cdot 1(t)$, jako przebieg wartości sygnału wyjściowego $u(t)$, otrzymuje się z równania (8.12):

$$u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e_0 d\tau + u(0) = u(0) + e_0\frac{t}{T_i} \tag{8.15}$$

a o działaniu odwrotnym – z równania (8.12a)

$$u(t) = -\frac{1}{T_i}\int_0^t e_0 d\tau + u(0) = u(0) - e_0\frac{t}{T_i} \tag{8.15a}$$

Odpowiedzi te przedstawiono na rys. 8.8. W rzeczywistym regulatorze sygnał wyjściowy $u(t)$ może zmieniać się tylko do osiągnięcia wartości maksymalnej lub minimalnej zakresu zmienności.

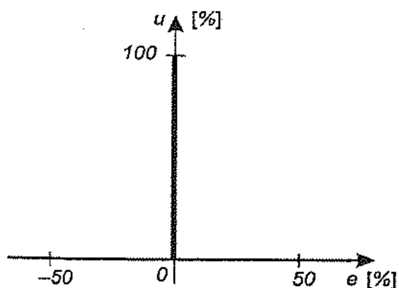



Rys. 8.8. Odpowiedzi skokowe regulatorów I: a) o działaniu normalnym, b) o działaniu odwrotnym

Należy zauważyć, że po czasie $t = T_i$ przyrost (lub spadek) sygnału wyjściowego regulatora jest równy wartości amplitudy $e_0$ skoku sygnału odchyłki regulacji. Właściwość tę wykorzystuje się do wyznaczania stałej czasowej $T_i$ regulatorów I na podstawie odpowiedzi skokowej.

Regulatory o algorytmie I nie mają jednoznacznej zależności między wartościami $u$ sygnału wyjściowego a wartościami $e$ sygnału odchyłki regulacji, osiąganymi w stanach ustalonych (analogicznie jak elementy całkujące). Sygnał wyjściowy może osiągać stan ustalony tylko przy zerowej wartości odchyłki regulacji, co wynika z równania dynamiki (8.13), przy dowolnej wartości w zakresie jego zmienności, będącej wynikiem całkowania odchyłki regulacji w okresie poprzedzającym osiągnięcie stanu ustalonego. Charakterystykę statyczną regulatora I przedstawiono na rys. 8.9. Algorytmy o takiej charakterystyce statycznej nazywane są algorytmami astatycznymi.

Charakterystyki częstotliwościowe regulatora całkującego są takie same, jak członu całkującego o stałej czasowej $T_i$.




Rys. 8.9. Charakterystyka statyczna regulatora I



### 8.3.3. ALGORYTM PI

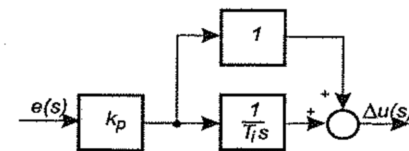
Transmitancja regulatora o algorytmie PI podana w tabl. 8.1 odpowiada transmitancji połączenia członów elementarnych przedstawionego na rys. 8.10. Z rysunku wynika, że przebieg zmian sygnału wyjściowego regulatora $\Delta u(t)$ można traktować jako sumę dwóch składowych: składowej proporcjonalnej do odchyłki regulacji (składowa P) i składowej proporcjonalnej do całki z odchyłki regulacji (składowa I). Zatem przyrostowe równanie dynamiki regulatora PI można sformułować w postaci

$$\Delta u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau \tag{8.16}$$

lub po zróżniczkowaniu, w postaci

$$\frac{d\Delta u(t)}{dt} = k_p \frac{de(t)}{dt} + \frac{k_p}{T_i}e(t) \tag{8.16a}$$

Równania te wyrażają zależność zmian $\Delta u(t)$ wartości sygnału wyjściowego regulatora względem wartości początkowej $u(0)$, przy zerowych warunkach początkowych $\Delta u(0) = 0$ i $e(0) = 0$, generowanych przez regulator pod wpływem sygnału odchyłki regulacji $e(t)$. Wartością początkową $u(0)$, podobnie jak w przypadku regulatora I, może być każda wartość sygnału wyjściowego z zakresu jego zmienności, równa wartości składowej I, będącej wynikiem oddziaływania odchyłki regulacji na regulator w okresie poprzedzającym stan początkowy.




Rys. 8.10. Schemat blokowy algorytmu PI o działaniu normalnym

Z równania (8.16a) wynika, że regulator może osiągać stany ustalone tylko wtedy, gdy odchyłka regulacji ma wartość zero; zatem algorytm PI należy, tak jak algorytm I, do algorytmów astatycznych (charakterystyka statyczna, jak regulatora I – rys. 8.9).

Przebieg $u(t)$ sygnału wyjściowego regulatora PI o działaniu normalnym, jako wynik oddziaływania na regulator odchyłki regulacji $e(t)$, opisuje równanie

$$u(t) = u(0) + k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau \tag{8.17}$$

a o działaniu odwrotnym – równanie

$$u(t) = u(0) - k_p e(t) - \frac{k_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau \tag{8.17a}$$

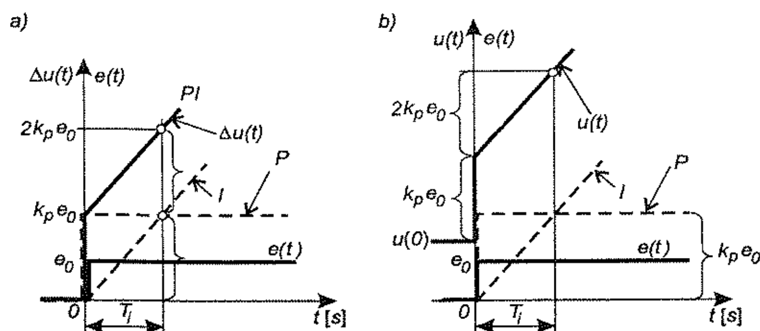
Charakterystykę skokową (odpowiedź na sygnał odchyłki w postaci $e(t) = e_0 \cdot 1(t)$) regulatora PI o działaniu normalnym, jako przyrost $\Delta u(t)$ wartości sygnału wyjściowego względem wartości początkowej $u(0)$, otrzymuje się z równania (8.16):

$$\Delta u(t) = k_p e_0 \cdot 1(t) + \frac{k_p}{T_i} e_0 \, t \tag{8.18}$$

Odpowiedź skokową w przypadku zmiennej absolutnej $u(t)$ otrzymuje się z równania (8.17), zakładając dodatkowo początkową wartość sygnału wyjściowego $u(0)$ lub wykorzystując odpowiedź przyrostową (8.18) i zależność $u(t) = u(0) + \Delta u(t)$:

$$u(t) = k_p e_0 \cdot 1(t) + \frac{k_p}{T_i} e_0 \, t + u(0) \tag{8.18a}$$

Graficzną ilustrację obu form opisu odpowiedzi skokowej regulatora PI przedstawiono na rys. 8.11.




Rys. 8.11. Odpowiedź skokowa regulatora PI o działaniu normalnym: a) przebieg zmiennej przyrostowej $\Delta u(t)$, b) przebieg sygnału wyjściowego $u(t)$ (linią przerywaną zaznaczono składową P oraz składową I sygnału wyjściowego)

Z przebiegiem odpowiedzi skokowej regulatora PI związana jest nazwa stałej czasowej akcji całkowania $T_i$ – czas zdwojenia. Składowa całkowa odpowiedzi z upływem czasu narasta od wartości początkowej równej zeru, osiągając po czasie $t = T_i$ wartość równą składowej proporcjonalnej, co oznacza podwojenie przyrostu wartości sygnału wyjściowego w stosunku do składowej proporcjonalnej.

Czas zdwojenia wyraża intensywność działania całkującego. Definiowany jest jako czas, jaki upływa od momentu wprowadzenia do regulatora wymuszenia skokowego do momentu kiedy składowa całkowa osiągnie wartość składowej proporcjonalnej.



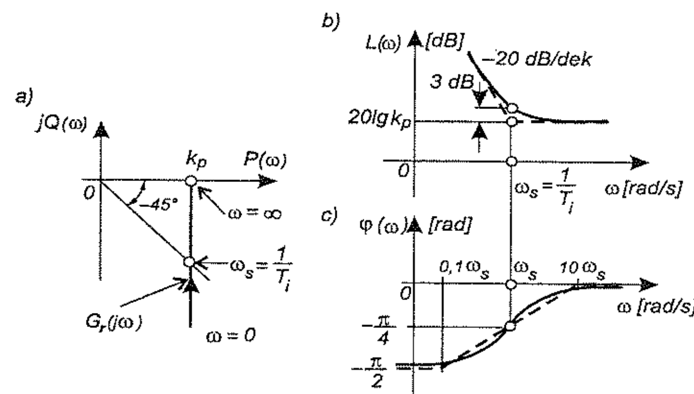
Nastawami regulatorów PI są: wzmocnienie proporcjonalne $k_p$ i czas zdwojenia $T_i$.

W niektórych rozwiązaniach technicznych regulatorów, zarówno analogowych (najczęściej elektrycznych) jak i cyfrowych lub sterowników PLC, zamiast czasu zdwojenia $T_i$ nastawiany jest parametr „liczba powtórzeń na minutę" (ang. *reset rate*) – liczbowo jest on równy odwrotności czasu zdwojenia wyrażonego w minutach. Na przykład, nastawiona w regulatorze wartość tego parametru 0,1 1/min ($T_i = 10$ min) odpowiada takiemu działaniu regulatora, że co minutę składowa całkowa jego odpowiedzi skokowej przyrasta o wartość równą 0,1 składowej proporcjonalnej sygnału wyjściowego regulatora. Błędna interpretacja tego parametru może doprowadzić, wskutek wprowadzenia niewłaściwej nastawy, do awarii rzeczywistego układu regulacji.

Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe regulatora PI wyznacza się na podstawie przekształconej transmitancji operatorowej

$$G_r(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = k_p \frac{1}{T_i s}(1 + T_i s) \tag{8.19}$$

jako sumę charakterystyk logarytmicznych członów podstawowych: proporcjonalnego, całkującego i idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego (rys. 8.12).




Rys. 8.12. Charakterystyki częstotliwościowe regulatora PI: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, c) logarytmiczna charakterystyka fazowa (linią przerywaną zaznaczono charakterystyki asymptotyczne)

### 8.3.4. IDEALNY I RZECZYWISTY ALGORYTM PD

Z porównania transmitancji idealnego i rzeczywistego regulatora PD (tabl. 8.1) wynika, że algorytm rzeczywisty PD staje się algorytmem idealnym, jeżeli wzmocnienie dynamiczne $k_d = \infty$. Oznacza to, że idealny algorytm PD nie ma realizacji technicznej – jest on przybliżeniem rzeczywistego algorytmu PD, ułatwiającym wstępną analizę właściwości układów złożonych. Algorytm ten nie miałby także praktycznych zastosowań ze względu na dynamikę rzeczywistych urządzeń (m.in. zespołów wykonawczych) współpracujących z regulatorem, wymagających określonego czasu trwania sygnału, aby móc na jego zmianę zareagować.

Zależność sygnału wyjściowego regulatorów PD idealnego i rzeczywistego o działaniu normalnym od odchyłki regulacji opisują równania:

$$u(t) = k_p e(t) + k_p T_d \frac{de(t)}{dt} + u_p \tag{8.20}$$

$$\frac{T_d}{k_d}\frac{du(t)}{dt} + u(t) = k_p e(t) + k_p \frac{1+k_d}{k_d} T_d \frac{de(t)}{dt} + u_p \tag{8.21}$$

gdzie $u_p$ – wartość sygnału wyjściowego przy $e = 0$, określana jako punkt pracy regulatora, podawana w procentach zakresu zmian sygnału wyjściowego regulatora lub w jednostkach wielkości wyjściowej regulatora.

W układzie regulacji sygnał wyjściowy regulatora PD o wartości $u_p$, podobnie jak w przypadku regulatora P, powinien przy braku zakłóceń zapewnić takie wysterowanie zespołu wykonawczego, przy którym zespół wykonawczy dostarcza do obiektu strumień energii lub materiału w ilości niezbędnej do osiągnięcia przez wielkość regulowaną wartości zadanej.

Parametrami nastawialnymi, czyli nastawami regulatorów PD, są: wzmocnienie proporcjonalne $k_p$, stała czasowa akcji różniczkowania (czas wyprzedzenia) $T_d$ i punkt pracy $u_p$. Wzmocnienie dynamiczne $k_d$ w regulatorach przemysłowych przyjmuje wartości z przedziału 6÷10 i w większości rozwiązań nie jest parametrem nastawianym.

Algorytmy PD, zarówno rzeczywisty jak i idealny, należą, podobnie jak algorytm P, do algorytmów statycznych, tzn. że istnieje jednoznaczna zależność między wartościami $u$ sygnału wyjściowego regulatora a wartościami $e$ sygnału odchyłki regulacji, osiąganymi w stanach ustalonych. Zależność ta, wynikająca z równania (8.20) oraz z równania (8.21), stanowiąca charakterystykę statyczną regulatora PD zarówno idealnego jak i rzeczywistego o działaniu normalnym, ma postać

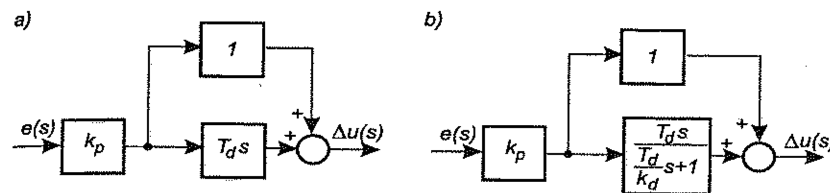
$$u = k_p e + u_p \tag{8.22}$$



Transmitancje operatorowe (8.5) i (8.6) regulatorów PD idealnego i rzeczywistego, podane w tabl. 8.1, odpowiadają schematom blokowym przedstawionym na rys. 8.13 oraz przyrostowym równaniom dynamiki:

$$\Delta u(t) = k_p e(t) + k_p T_d \frac{de(t)}{dt} \tag{8.23}$$

$$\frac{T_d}{k_d}\frac{d\Delta u(t)}{dt} + \Delta u(t) = k_p e(t) + k_p \frac{1+k_d}{k_d} T_d \frac{de(t)}{dt} \tag{8.24}$$




Rys. 8.13. Schematy blokowe algorytmu PD regulatora o działaniu normalnym: a) idealnego, b) rzeczywistego

Przyrostowe odpowiedzi idealnego i rzeczywistego regulatora PD, przy zerowych warunkach początkowych, można wyznaczyć na podstawie transmitancji (8.5) i (8.6) z zależności:

$$\Delta u(t) = L^{-1}[k_p(1+T_d s)\,e(s)] \tag{8.25}$$

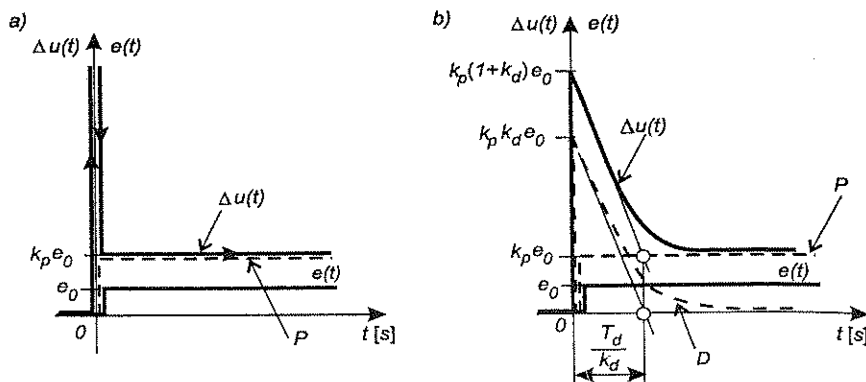
$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right)e(s)\right] \tag{8.26}$$

Dla skokowej zmiany odchyłki regulacji $e(t) = e_0 \cdot 1(t)$, $e(s) = e_0 \frac{1}{s}$ otrzymuje się równania odpowiedzi skokowych odpowiednio:

$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p(1+T_d s)\,e_0\frac{1}{s}\right] = k_p e_0[1+\delta(t)] \tag{8.27}$$

$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right)e_0\frac{1}{s}\right] = k_p e_0\left(1+k_d e^{-\frac{k_d}{T_d}t}\right) \tag{8.28}$$

Odpowiedzi te przedstawiono na rys. 8.14.




Rys. 8.14. Przyrostowe odpowiedzi skokowe regulatora PD o działaniu normalnym: a) idealnego, b) rzeczywistego (linią przerywaną zaznaczono składowe P i D odpowiedzi)

Odpowiedzi jako przebiegi sygnału wyjściowego $u(t)$ regulatora można wyznaczyć z zależności $u(t) = \Delta u(t) + u_p$.

Na podstawie przebiegu odpowiedzi skokowej regulatora PD nie można w sposób bezpośredni odczytać wartości czasu wyprzedzenia $T_d$. Nazwa „czas wyprzedzenia" wynika z przebiegu odpowiedzi regulatora PD na wymuszenie liniowo narastające.

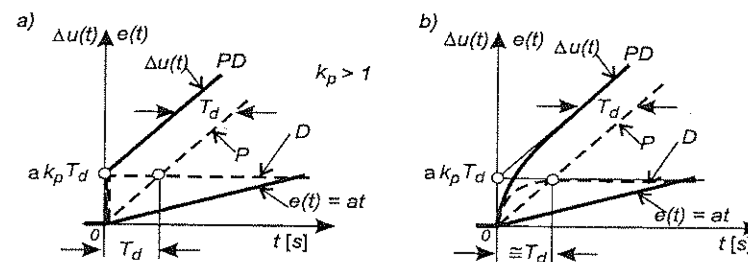
Zakładając, że $e(t) = at$, na podstawie wzorów (8.25) i (8.26) otrzymuje się odpowiednio dla idealnego i rzeczywistego regulatora PD:

$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p(1+T_d s)\frac{a}{s^2}\right] = k_p a(t+T_d) = k_p at + k_p aT_d \tag{8.29}$$

$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right)\frac{a}{s^2}\right] = k_p at + k_p aT_d\left(1-e^{-\frac{k_d}{T_d}t}\right) \tag{8.30}$$

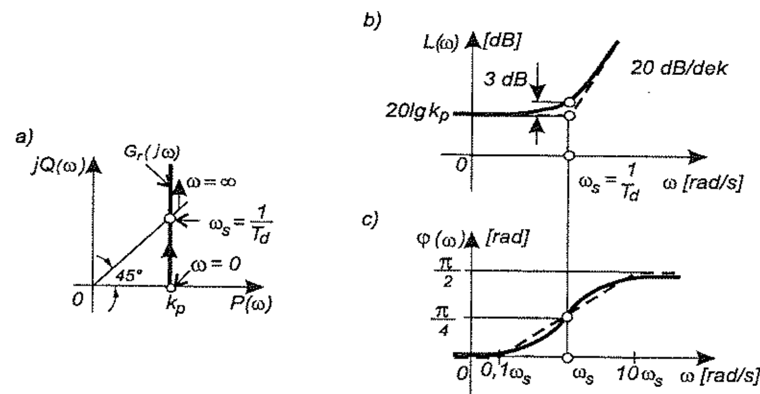
Odpowiedź regulatora PD, zarówno idealnego jak i rzeczywistego, na wymuszenie liniowo narastające (rys. 8.15) jest sumą składowej działania proporcjonalnego (P) i składowej działania różniczkującego (D). Przebieg tych odpowiedzi wyjaśnia nazwę „czas wyprzedzenia" – w przypadku wymuszenia liniowo narastającego wartość sygnału wyjściowego regulatora jako suma składowych P i D jest osiągana o czas $T_d$ wcześniej w stosunku do składowej P. Z rys. 8.15 wynika także, że wartość liczbowa $T_d$ określa czas, jaki upływa od momentu wprowadzenia na wejście regulatora wymuszenia liniowo narastającego do momentu kiedy wartość składowej P zrówna się z ustaloną wartością składowej D. W przypadku regulatora idealnego składowa D osiąga wartość ustaloną $ak_pT_d$ natychmiast po wprowadzeniu wymuszenia liniowo narastającego. Natomiast w przypadku rzeczywistego regulatora PD składowa D zbliża się asymptotycznie do wartości ustalonej. Przy wartości wzmocnienia dynamicznego $k_d = 10$ po czasie równym $T_d$ od momentu wprowadzenia wymuszenia liniowo narastającego, składowa D praktycznie osiąga stan ustalony (osiąga około 99,995% wartości ustalonej).






Rys. 8.15. Przyrostowe odpowiedzi na wymuszenie liniowo narastające regulatora PD: a) idealnego, b) rzeczywistego (linią przerywaną zaznaczono składowe P i D odpowiedzi)

Transmitancję (8.5) idealnego regulatora PD można traktować jako transmitancję szeregowego połączenia członu proporcjonalnego i idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego. Logarytmiczne charakterystyki takiego regulatora wyznacza się, sumując charakterystyki logarytmiczne członów składowych (rys. 8.16).

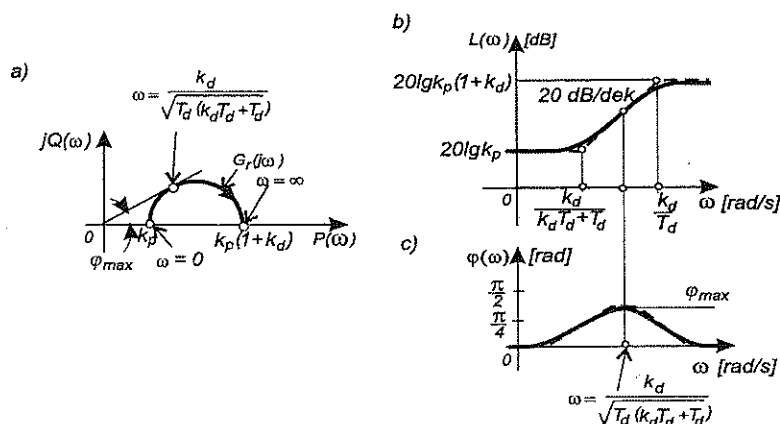



Rys. 8.16. Charakterystyki częstotliwościowe idealnego regulatora PD: a) amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna amplitudowa, c) logarytmiczna fazowa (linią przerywaną zaznaczono charakterystyki asymptotyczne)

Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistego regulatora PD można wyznaczyć po przekształceniu transmitancji operatorowej (8.6) do postaci

$$G_r(s) = k_p\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right) = k_p\frac{1}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\left[1+\left(\frac{k_d T_d + T_d}{k_d}\right)s\right] \tag{8.31}$$

jako sumę charakterystyk logarytmicznych członów podstawowych: proporcjonalnego, inercyjnego i idealnego członu proporcjonalno-różniczkującego (rys. 8.17). Jak widać, występujący w transmitancji (8.31) człon inercyjny ogranicza wartość modułu oraz wartość dodatniego przesunięcia fazowego rzeczywistego regulatora PD w stosunku do regulatora idealnego.




Rys. 8.17. Charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistego regulatora PD: a) amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna amplitudowa, c) logarytmiczna fazowa (linią przerywaną wykreślono charakterystyki asymptotyczne)

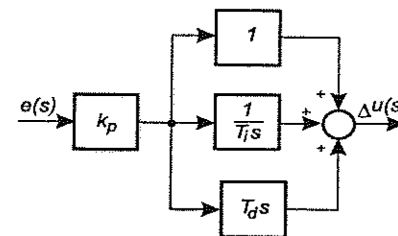
## 8.3.5. IDEALNY ALGORYTM PID

Transmitancji (8.7) idealnego regulatora PID odpowiada schemat blokowy, przedstawiający tzw. równoległą strukturę tego regulatora (rys. 8.18). Charakterystyczną cechą tej struktury jest możliwość nastawiania poszczególnych parametrów regulatora bez wpływu na pozostałe nastawy – nie występuje tzw. interakcja.



Jako nastawy regulatora traktuje się: wzmocnienie proporcjonalne $k_p$, stałą czasową akcji całkowania (czas zdwojenia) $T_i$ i stałą czasową akcji różniczkowania (czas wyprzedzenia) $T_d$.

Idealny algorytm PID, podobnie jak algorytmy I oraz PI, jest algorytmem astatycznym; jego charakterystyka statyczna jest niejednoznaczna (rys. 8.9) oraz, podobnie jak idealny algorytm PD, nie ma realizacji technicznej – jest przybliżeniem rzeczywistego algorytmu PID, ułatwiającym wstępną analizę właściwości układów złożonych.



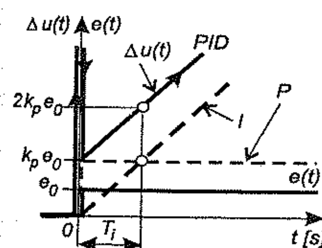

Rys. 8.18. Struktura równoległa idealnego regulatora PID o działaniu normalnym

Odpowiedzi przyrostowe idealnego regulatora PID przy zerowych warunkach początkowych, tj. przy $\Delta u(0)=0$ i $e(0)=0$, można wyznaczać z zależności

$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)e(s)\right] = k_p\left[e(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{8.32}$$

Przyrostowa odpowiedź na skokową zmianę odchyłki regulacji $e(t)=e_0\cdot 1(t)$ ma postać

$$\Delta u(t) = L^{-1}\left[k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)e_0\frac{1}{s}\right] = k_p e_0 + \frac{k_p e_0}{T_i}t + \delta(t) \tag{8.33}$$




Rys. 8.19. Przyrostowa odpowiedź skokowa idealnego regulatora PID o działaniu normalnym

Jak wynika z równania (8.33), przyrostową skokową odpowiedź idealnego regulatora PID tworzą trzy składowe: składowa proporcjonalna (składowa P), składowa całkowa (składowa I) oraz składowa działania różniczkującego w postaci impulsu Diraca (składowa D) – rys. 8.19.

Odpowiedź skokową jako przebieg sygnału wyjściowego $u(t)$ regulatora można wyznaczyć na podstawie ogólnego równania, opisującego sygnał wyjściowy

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + k_p T_d\frac{de(t)}{dt} + u(0) \tag{8.34}$$

uwzględniając początkową wartość sygnału wyjściowego $u(0)$ lub z zależności $u(t) = \Delta u(t) + u(0)$.

Charakterystyki częstotliwościowe idealnego regulatora PID wyznacza się na podstawie transmitancji widmowej

$$G_r(j\omega) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega\right) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{8.35}$$

gdzie:

$$P(\omega) = k_p \tag{8.36}$$

$$Q(\omega) = k_p\left(T_d\omega - \frac{1}{T_i\omega}\right) \tag{8.37}$$

$$M(\omega) = k_p\sqrt{1 + \left(T_d\omega - \frac{1}{T_i\omega}\right)^2} \tag{8.38}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(T_d\omega - \frac{1}{T_i\omega}\right) \tag{8.39}$$

Moduł logarytmiczny opisuje zależność

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega) = 20\lg k_p + 20\lg\sqrt{1 + \left(T_d\omega - \frac{1}{T_i\omega}\right)^2}\ \text{[dB]} \tag{8.40}$$

Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone na podstawie tych równań przedstawiono na rys. 8.20 (wykreślono je linią ciągłą).

Aby wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki asymptotyczne metodą sumowania charakterystyk elementów składowych, należy transmitancję regulatora przedstawić w postaci iloczynu transmitancji członów podstawowych:

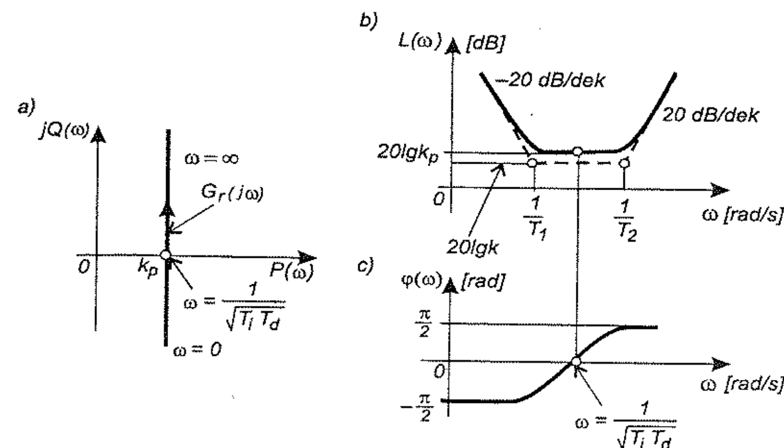
$$G_r(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = k\left(1 + \frac{1}{T_1 s}\right)(1 + T_2 s) \tag{8.41}$$

gdzie stałe $k$, $T_1$ i $T_2$ są związane z nastawami $k_p$, $T_i$ i $T_d$ regulatora zależnościami:

$$k_p = k\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right), \quad T_i = T_1 + T_2, \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \tag{8.42}$$

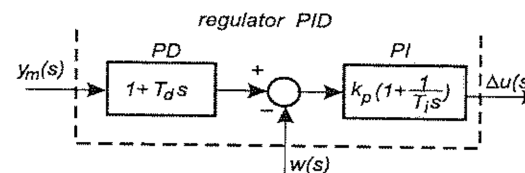
Przy założeniu $T_i >> T_d$, uzyskuje się: $T_1 \approx T_i$, $T_2 \approx T_d$, $k \approx k_p$.






Rys. 8.20. Charakterystyki częstotliwościowe idealnego regulatora PID: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, c) logarytmiczna charakterystyka fazowa (linią przerywaną zaznaczono amplitudową charakterystykę asymptotyczną)

Idealny algorytm PID może być realizowany także w strukturze szeregowej (rys. 8.21). W takim układzie sygnał wielkości regulowanej $y_m$ jest wprowadzany do bloku o idealnym działaniu PD, a sygnał wyjściowy bloku PD, wraz z sygnałem wielkości zadanej $w$ – do bloku o działaniu PI.




Rys. 8.21. Schemat blokowy idealnego regulatora PID o strukturze szeregowej (działanie normalne)

W przypadku kiedy $w = \mathrm{const}$, odchyłka regulacji $e = y_m - w$ może powstać tylko w wyniku pojawienia się odchyleń $\Delta y_m$ wielkości regulowanej od wartości zadanej (jeżeli $\Delta y_m = y_m - w$, to $e = \Delta y_m$). Zatem transmitancja regulatora ma postać

$$\begin{aligned} G_r(s) &= \frac{\Delta u(s)}{e(s)} = \frac{\Delta u(s)}{\Delta y_m(s)} = (1 + T_d s)\, k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \\ &= k_p\left(1 + \frac{T_d}{T_i}\right)\left[1 + \frac{1}{(T_i + T_d)s} + \frac{T_i T_d}{T_i + T_d}s\right] \end{aligned} \tag{8.43}$$

lub

$$G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k'_p\left(1+\frac{1}{T'_i s}+T'_d s\right) \tag{8.44}$$

gdzie:

$$k'_p=k_p\left(1+\frac{T_d}{T_i}\right),\ T'_i=T_i+T_d,\ T'_d=\frac{T_i T_d}{T_i+T_d} \tag{8.45}$$

W tym przypadku wzmocnieniem, stałą czasową akcji całkowania i stałą czasową akcji różniczkowania regulatora PID są odpowiednio wielkości $k'_p$, $T'_i$ i $T'_d$.

Jak wynika z równań (8.45), zmiana nastawy wartości $T_i$ lub $T_d$ w blokach regulatora (rys. 8.21) skutkuje zmianą wszystkich nastaw wynikowych $k'_p$, $T'_i$ i $T'_d$, co nazywane jest współzależnością nastaw lub interakcją.

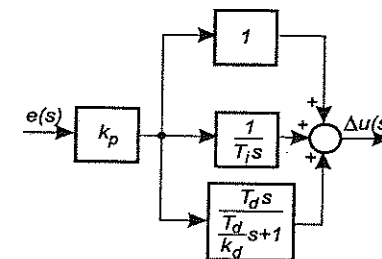
Z analizy równań (8.45) wynika także inna cecha struktury szeregowej – ograniczoność nastaw. W rozważanym regulatorze o strukturze szeregowej możliwe do uzyskania są tylko nastawy spełniające nierówność $T'_i \geq T'_d$. Ograniczenie to z praktycznego punktu widzenia nie jest wadą, gdyż w typowych układach regulacji ustawienie czasu wyprzedzenia $T_d > T_i/4$ prowadziłoby zwykle do niestabilności układu. Zatem szeregowa struktura regulatora stanowi naturalne zabezpieczenie przed utratą stabilności.

Regulatory PID o strukturze szeregowej zapewniają poprawną pracę w układach, w których, ze względu na zmieniające się warunki realizacji procesu, niezbędne są zmiany wartości zadanej. Różniczkowanie tych zmian bardzo niekorzystnie wpływałoby na warunki eksploatacji układu. W sytuacji kiedy powodem powstania odchyłki regulacji jest tylko zmiana wartości zadanej (przy $y_m = \text{const}$), regulator realizuje algorytm PI, o parametrach ustawionych tylko w bloku PI. Transmitancja regulatora względem wartości zadanej ma więc postać

$$G_r(s)=\frac{\Delta u(s)}{\Delta w(s)}=\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) \tag{8.46}$$

## 8.3.6. RZECZYWISTY ALGORYTM PID

Właściwości dynamiczne rzeczywistego regulatora PID wyraża transmitancja operatorowa (8.8), podana w tabl. 8.1. Schemat blokowy rzeczywistego regulatora PID o strukturze równoległej, odpowiadający transmitancji (8.8), przedstawiono na rys. 8.22. W układzie tym, występujące w idealnym regulatorze PID różniczkowanie idealne (rys. 8.18), zastąpione jest różniczkowaniem rzeczywistym. Nastawami rzeczywistych regulatorów PID są: wzmocnienie proporcjonalne $k_p$, stała czasowa akcji całkowania (czas zdwojenia) $T_i$ i stała czasowa akcji różniczkowania (czas wyprzedzenia) $T_d$. Wzmocnienie dynamiczne $k_d$ w regulatorach przemysłowych przybiera wartości $6 \div 10$ i w większości rozwiązań nie jest parametrem nastawianym. Rzeczywisty algorytm PID, podobnie jak algorytmy I, PI oraz idealny algorytm PID, jest algorytmem astatycznym; jego charakterystyka statyczna jest niejednoznaczna (rys. 8.9).




Rys. 8.22. Struktura równoległa rzeczywistego regulatora PID o działaniu normalnym

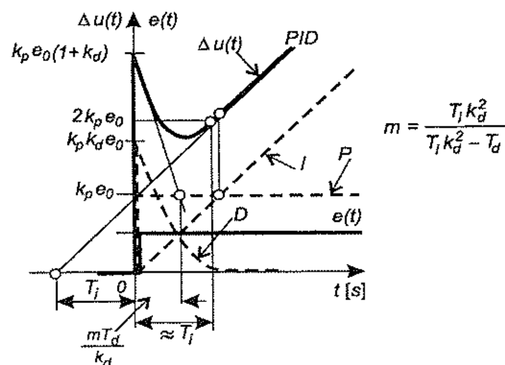
Odpowiedzi przyrostowe rzeczywistego regulatora PID przy zerowych warunkach początkowych, tj. przy $\Delta u(0)=0$ i $e(0)=0$, można wyznaczać z zależności

$$\Delta u(t)=L^{-1}\left[k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right)e(s)\right] \tag{8.47}$$

W przypadku skokowej zmiany odchyłki regulacji $e(t)=e_0\cdot 1(t)$ otrzymuje się odpowiedź

$$\Delta u(t)=k_p e_0+\frac{k_p}{T_i}e_0 t+k_p k_d e_0 \mathrm{e}^{-\frac{k_d}{T_d}t} \tag{8.48}$$

będącą sumą składowych działania proporcjonalnego (P), całkującego (I) i rzeczywistego różniczkowania (D) – rys. 8.23. W chwili $t=T_i$ składowa całkowa osiąga wartość składowej proporcjonalnej, a składowa różniczkowa – już tylko niewielką wartość (zależnie od stałej czasowej inercji $T_d/k_d$). Zatem, w chwili $t=T_i$ przyrost $\Delta u$ sygnału wyjściowego osiąga wartość tylko niewiele większą od $2k_p e_0$ – od podwojonej wartości przyrostu sygnału wyjściowego wynikającego z działania proporcjonalnego. W zasadzie można więc przyjąć, że czas od pojawienia się odchyłki skokowej do chwili, w której przyrost sygnału wyjściowego regulatora osiągnie podwojoną wartość wynikającą z działania proporcjonalnego, jest stałą czasową działania całkującego $T_i$ (czasem zdwojenia).




Rys. 8.23. Odpowiedź skokowa przyrostowa rzeczywistego regulatora PID

Odpowiedź skokową, jako przebieg sygnału wyjściowego $u(t)$ regulatora, można wyznaczyć na podstawie zależności $u(t) = \Delta u(t) + u(0)$ lub na podstawie ogólnego równania, opisującego sygnał wyjściowy

$$\frac{T_d}{k_d}\frac{du(t)}{dt}+u(t)=k_p\frac{T_ik_d+T_d}{T_ik_d}e(t)+\frac{k_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau+k_pT_d\frac{1+k_d}{k_d}\frac{de(t)}{dt}+u(0) \quad (8.49)$$

Transmitancję widmową rzeczywistego regulatora PID można przedstawić jako

$$G_r(j\omega)=k_p\left(1+\frac{1}{T_ij\omega}+\frac{T_dj\omega}{\frac{T_d}{k_d}j\omega+1}\right)=P(\omega)+jQ(\omega)=M(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)} \quad (8.50)$$

gdzie (przy $T_d/k_d = T$):

$$P(\omega)=k_p\left(1+\frac{T_dT\omega^2}{T^2\omega^2+1}\right)$$

$$Q(\omega)=k_p\left(\frac{T_d\omega}{T^2\omega^2+1}-\frac{1}{T_i\omega}\right) \quad (8.51)$$

$$M(\omega)=k_p\sqrt{\left(1+\frac{T_dT\omega^2}{T^2\omega^2+1}\right)^2+\left(\frac{T_d\omega}{T^2\omega^2+1}-\frac{1}{T_i\omega}\right)^2}$$

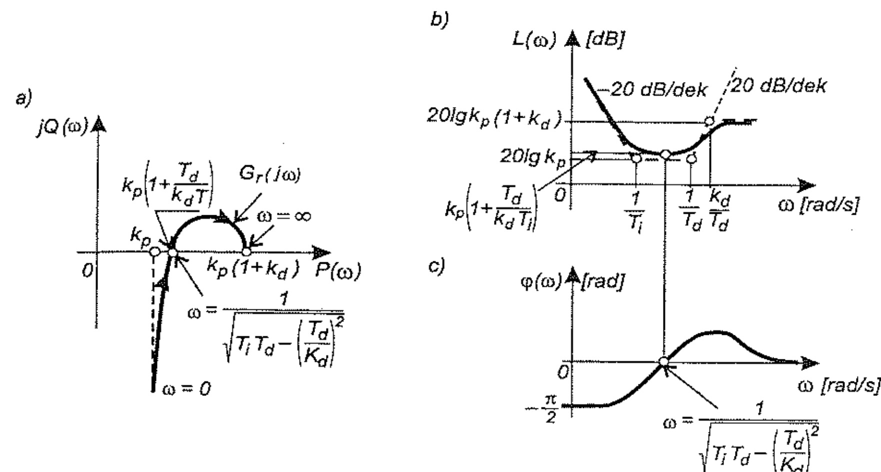
$$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{(T_dT_i-T^2)\omega^2-1}{T_i\omega[T(T_d+T)\omega^2+1]} \quad (8.52)$$



Moduł logarytmiczny opisuje zależność

$$L(\omega)=20\lg k_p+20\lg\sqrt{\left(1+\frac{T_dT\omega^2}{T^2\omega^2+1}\right)^2+\left(\frac{T_d\omega}{T^2\omega^2+1}-\frac{1}{T_i\omega}\right)^2}\ [\mathrm{dB}] \quad (8.53)$$

Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone na podstawie tych równań przedstawiono na rys. 8.24 (linie ciągłe).




Rys. 8.24. Charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistego regulatora PID: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, c) logarytmiczna charakterystyka fazowa (linią przerywaną zaznaczono asymptotyczną amplitudową charakterystykę logarytmiczną)

Wyznaczanie rzeczywistego przebiegu charakterystyk jest pracochłonne. Przy zwykle spełnionym warunku, że $T_i > T_d >> T_d/k_d$, , rzeczywista logarytmiczna charakterystyka amplitudowa może być wpisana w charakterystyki asymptotyczne określone równaniami:

– dla $\omega \le \frac{1}{T_i}$ $\quad L(\omega)=20\lg k_p-20\lg T_i\omega \quad (8.54)$

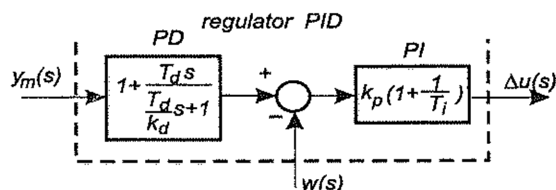
– dla $\frac{1}{T_i}<\omega\le\frac{1}{T_d}$ $\quad L(\omega)=20\lg k_p \quad (8.55)$

– dla $\frac{1}{T_d}<\omega\le\frac{k_d}{T_d}$ $\quad L(\omega)=20\lg k_p+20\lg k_pT_d\omega \quad (8.56)$

– dla $\omega>\frac{k_d}{T_d}$ $\quad L(\omega)=20\lg k_p(1+k_d) \quad (8.57)$

Dla pulsacji $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{T_i T_d - (T_d / k_d)^2}}$ przesunięcie fazowe rzeczywistego regulatora PID wynosi zero, a odpowiadająca tej pulsacji wartość modułu wynosi $k_p\left(1 + \dfrac{T_d}{k_d T_i}\right)$, co zaznaczono na rys. 8.24.

Działanie rzeczywiste PID regulatorów analogowych (regulatory pneumatyczne i elektryczne) uzyskuje się w układzie o strukturze szeregowej (rys. 8.25). Struktura taka umożliwia stosunkowo prostą ich techniczną realizację. Sygnał $y_m$, reprezentujący wielkość regulowaną, jest sygnałem wejściowym bloku o działaniu PD (tzw. przystawka różniczkująca ze wzmocnieniem równym jedności), następnie sygnał wyjściowy tego bloku wraz z sygnałem wielkości zadanej jest podawany do bloku regulatora o działaniu PI.



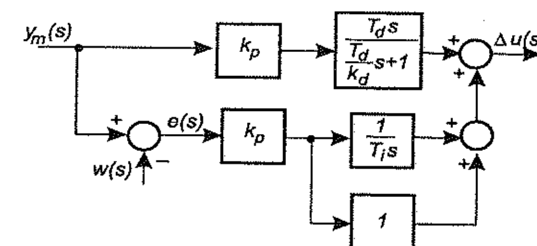

Rys. 8.25. Schemat blokowy rzeczywistego regulatora PID o strukturze szeregowej (działanie normalne)

Analogicznie jak w idealnym regulatorze PID o strukturze szeregowej, w regulatorach rzeczywistych o takiej strukturze występuje ograniczoność i interakcja nastaw, co w praktyce nie jest wadą. Zaletą takich regulatorów jest to, że zapewniają poprawną pracę układów, w których ze względu na zmieniającą się wydajność instalacji technologicznej nieodzowne są zmiany wartości zadanej. Różniczkowanie tych zmian bardzo niekorzystnie wpływałoby na warunki eksploatacji układu.

W wielu publikacjach strukturę szeregową określa się jako szeregową strukturę PI_D (PI/PID), a regulator o takiej strukturze nazywany jest regulatorem o zmiennej strukturze; przy zmianach wartości zadanej realizuje on algorytm PI, a przy zmianach wielkości regulowanej – algorytm PID.

W realizacjach mikrokomputerowych tworzone są regulatory o zmiennej strukturze, w których nie występuje interakcja ani ograniczoność nastaw. Regulatory takie mają strukturę równoległą (rys. 8.26).





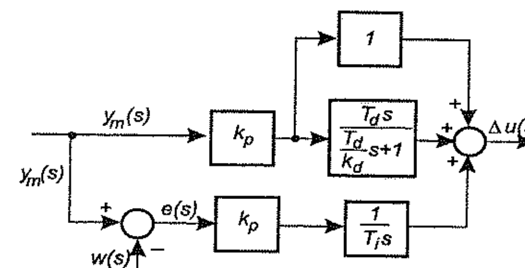

Rys. 8.26. Schemat blokowy regulatora PI_D (PI/PID) o strukturze równoległej (działanie normalne)

Algorytm regulatora PI_D o schemacie jak na rys. 8.26 wyrażają transmitancje:

– dla $w = \text{const}$
$$G_r(s) = \frac{\Delta u(s)}{e(s)} = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s + 1}\right) \tag{8.58}$$

– dla $y_m = \text{const}$
$$G_r(s) = \frac{\Delta u(s)}{e(s)} = k_p\left(\frac{1}{T_i s} + 1\right) \tag{8.59}$$

Innym rozwiązaniem regulatora PID o zmiennej strukturze jest regulator, którego algorytm jest oznaczany symbolem I_PD (I/PID) – rys. 8.27. W tym przypadku, przy stałej wartości zadanej i zmiennej wielkości regulowanej, regulator działa według algorytmu PID. Natomiast przy zmianach wartości zadanej i stałej wartości wielkości regulowanej, regulator działa według algorytmu I.




Rys. 8.27. Schemat blokowy regulatora I_PD (I/PID) o strukturze równoległej (działanie normalne)

Algorytm regulatora I_PD o schemacie jak na rys. 8.27 wyrażają transmitancje:

– dla $w = \text{const}$
$$G_r(s) = \frac{\Delta u(s)}{e(s)} = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d} s + 1} \right) \quad (8.60)$$

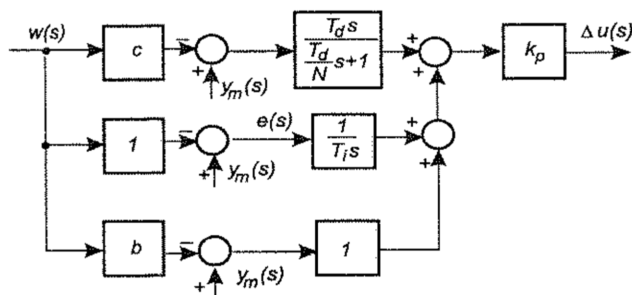
– dla $y_m = \text{const}$
$$G_r(s) = \frac{\Delta u(s)}{e(s)} = k_p \frac{1}{T_i s} \quad (8.61)$$

W większości spotykanych w praktyce przypadków wykorzystanie regulatorów o działaniu typu P, PI, PD lub PID jest wystarczające do spełnienia wymagań stawianych układom regulacji. W przypadku szczególnych wymagań dostępne są także regulatory o innych algorytmach liniowych i nieliniowych.

Algorytmy PID w regulatorach mikroprocesorowych oraz w sterownikach są realizowane najczęściej według struktury równoległej – tzw. struktury ISA (rys. 8.28), aczkolwiek niektóre firmy oferują algorytmy o strukturze szeregowej. Transformatę sygnału ciągłego układu o schemacie jak na rys. 8.28 wyraża zależność

$$\Delta u(s) = k_p \left\{ y_m(s) - bw(s) + \frac{1}{T_i s} e(s) + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} [y_m(s) - cw(s)] \right\} \quad (8.62)$$

Współczynniki $b$ i $c$ są „wagami" odpowiednio działania proporcjonalnego i różniczkującego, o nastawianych wartościach 0 albo 1; wartość $N$ nastawia się z przedziału $1 \le N \le 30$. Łatwo zauważyć, że przy $c = 1$, $b = 1$ oraz $N = 6 \div 10$ otrzymuje się konwencjonalny algorytm PID o strukturze równoległej.




Rys. 8.28. Schemat blokowy regulatora PID o strukturze ISA



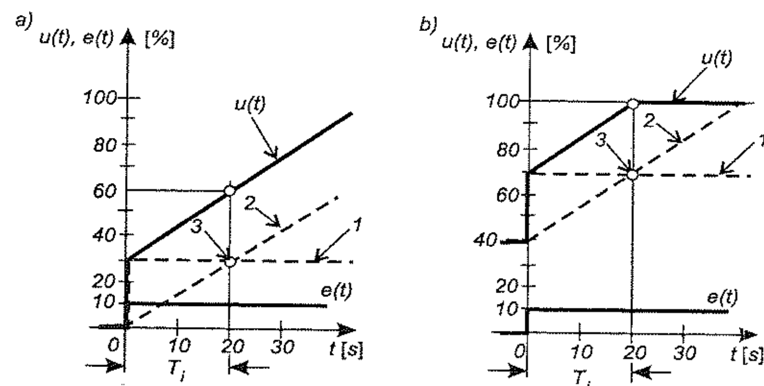
**Przykład 8.1**

Narysować odpowiedź regulatora PI o nastawach $k_p = 3$, $T_i = 20$ s na skokową zmianę odchyłki regulacji o amplitudzie $e_0 = 10\%$, przy warunkach początkowych: a) $u(0) = 0\%$, b) $u(0) = 40\%$. Jaką wartość osiągnie sygnał wyjściowy regulatora po upływie 30 s od momentu zmiany wartości odchyłki?

*Rozwiązanie*

Odpowiedź skokową regulatora PI przy warunku początkowym $u(0) = 0\%$, przedstawioną na rys. 8.29a, sporządzono wg następującej procedury:

a) Wykreślamy układ współrzędnych z podziałkę sekundową na osi czasu i procentową na osi pionowej.
b) Wykreślamy skokowa zmianę odchyłki regulacji o amplitudzie 10%.
c) Wyznaczamy wartość skokowej zmiany sygnału wyjściowego w chwili $t = 0$, odpowiadającą składowej proporcjonalnej. Wartość ta wynosi $k_p e_0 = 30\%$. Zatem skokowa zmiana odchyłki regulacji o wartości 10% wywoła skokową zmianę sygnału wyjściowego regulatora od wartości 0% do 30%.
d) Rysujemy linię pomocniczą 1 jako składową P odpowiedzi.
e) Rysujemy linię pomocniczą pionową przy $t = T_i = 20$ s, która wyznacza punkt 3, określający nachylenie składowej całkowej I.
f) Wyznaczamy składową I – linia 2 przechodząca przez punkt 3.
g) Wykreślamy odpowiedź $u(t)$ regulatora jako sumę składowych P i I.




Rys. 8.29. Odpowiedzi skokowe regulatora PI do przykładu 8.1: a) dla $u(0) = 0\%$, b) dla $u(0) = 40\%$

Po upływie 30 s od momentu wprowadzenia skokowej zmiany odchyłki regulacji sygnał wyjściowy osiągnie wartość 75% zakresu.

Analogicznie wyznacza się przebieg odpowiedzi regulatora przy warunku początkowym $u(0) = 40\%$ (rys. 8.28b). W tym przypadku sygnał wyjściowy osiągnie wartość maksymalną już po upływie 20 s.

**Przykład 8.2**

Wyznaczyć odpowiedź rzeczywistego regulatora PD o nastawach $k_p = 1$, $T_d = 10$ s, $k_d = 5$, $u_p = 20\%$ na skokową zmianę odchyłki regulacji o amplitudzie $e_0 = 10\%$. Jaką wartość osiągnie sygnał wyjściowy regulatora po upływie 6 s od momentu zmiany wartości odchyłki?

*Rozwiązanie*

Algorytm regulatora PD jest algorytmem statycznym; sygnał wyjściowy regulatora w stanie ustalonym przy zerowej wartości odchyłki regulacji przybiera wartość równą nastawionemu punktowi pracy, tj. $u_p = 20\%$.

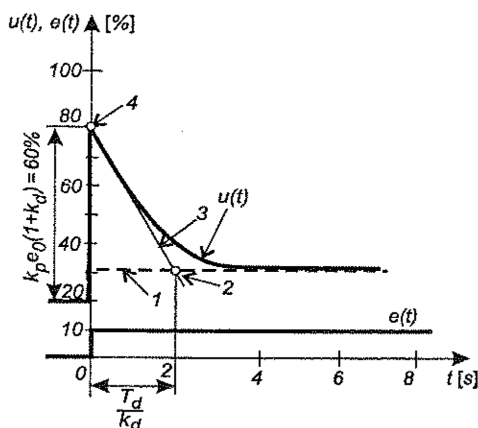
Odpowiedź regulatora można opisać równaniem (na podstawie zależności $u(t) = \Delta u(t) + u_p$ i (8.28))

$$u(t) = u_p + k_p e_0 + k_p k_d e_0 \, e^{-\frac{k_d}{T_d}t}$$

Po podstawieniu danych:

- $k_p e_0 = 10\%$ – przyrost wartości sygnału wyjściowego regulatora wynikający z akcji P,
- $k_p k_d e_0 = 50\%$ – początkowy przyrost wartości sygnału wyjściowego regulatora wynikający z działania różniczkującego (akcji D),
- stosunek $T_d / k_d = 2$ s – stała czasowa inercji działania różniczkującego.

Przebieg sygnału wyjściowego jest sumą sygnału wynikającego z nastawionego punktu pracy regulatora (wartości $u_p$) i przyrostów wynikających z akcji P i D (rys. 8.30).




Rys. 8.30. Odpowiedź skokowa rzeczywistego regulatora PD do przykładu 8.2



W stanie ustalonym sygnał wyjściowy regulatora osiąga wartość 30%. Po czasie $t = 6$ s od pojawienia się odchyłki, tj. po upływie trzech stałych czasowych inercji działania różniczkowego, wartość akcji D wynosi już tylko 5% wartości początkowej $k_p k_d e_0$, zatem sygnał wyjściowy osiągnie wartość 32,5%.

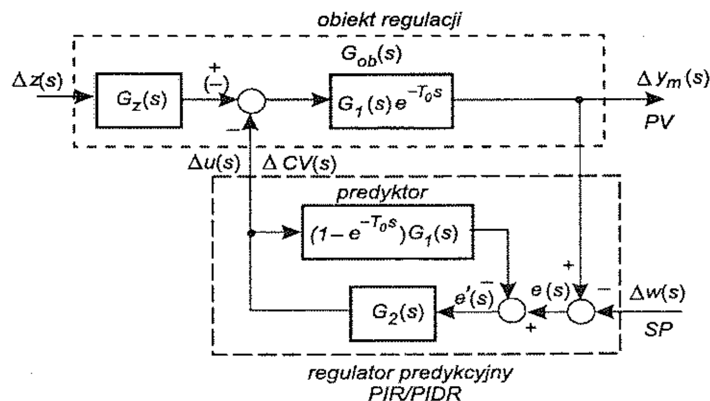
## 8.4. REGULATORY O NIEKONWENCJONALNYCH ALGORYTMACH REGULACJI

Możliwości osiągania korzystnych wskaźników jakości regulacji w układach z regulatorami o ciągłym algorytmie PID są ograniczone. Badania naukowe ukierunkowane na poszukiwanie nowych algorytmów regulatorów są prowadzone od wielu lat w wielu placówkach badawczych na całym świecie. Opracowano szereg nowych algorytmów, których wdrożenie było ograniczone możliwościami techniki analogowej. Dopiero dzięki rozwojowi techniki mikroprocesorowej opracowane w latach poprzednich algorytmy doczekały się praktycznej realizacji. W tym rozdziale zostaną omówione, dostępne w literaturze technicznej, opracowane i zaimplementowane w uniwersalnych mikroprocesorowych regulatorach, niekonwencjonalne algorytmy regulacji. Nie oznacza to, że innych algorytmów nie ma. Jest ich wiele, ale są najczęściej niedostępne dla niepowołanego użytkownika, gdyż stanowią kapitał intelektualny zarówno twórców, jak i producentów implementujących je w wytwarzanym sprzęcie.

### 8.4.1. REGULATOR PREDYKCYJNY (PIR)

W wielu nowoczesnych regulatorach mikroprocesorowych stosowana jest predykcja (przewidywanie) oczekiwanego przebiegu sygnału wielkości regulowanej [16]. W przypadku, kiedy obiekt zawiera opóźnienie (procesy transportu mas, regulacja parametrów fizykochemicznych, np. pH), stosowanie klasycznych algorytmów PID nie zapewnia pożądanej jakości regulacji. Wraz z rozwojem możliwości obliczeniowych układów mikroprocesorowych realny stał się powrót do pomysłu Smitha z lat pięćdziesiątych XX w. użycia układu kompensującego skutki opóźnienia w obiekcie, zwanego predyktorem Smitha (rys. 8.31). W literaturze spotyka się w odniesieniu do tego typu regulatora nazwę PIR, co oznacza strukturę PI z opóźnieniem (R – ang. *retard* – opóźnienie). Algorytm regulatora PIR zo-

stał zaimplementowany m.in. w regulatorze LB-600, krajowym produkcie firmy LAB-EL Elektronika Laboratoryjna.




Rys. 8.31. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem predykcyjnym PIR PID; $G_2(s)$ – transmitancja członu PI lub PID regulatora

Regulator zawiera człon $G_1(s)$, będący modelem obiektu, jednak niezawierającym członu opóźniającego. Można powiedzieć, że model ten dostarcza regulatorowi informacji o reakcji obiektu na wielkość sterującą z wyprzedzeniem o czas $T_0$ w stosunku do chwili pomiaru wielkości regulowanej.

Realizacja techniczna regulatora predykcyjnego o działaniu ciągłym jak dotąd nie była możliwa ze względu m.in. na jednoczesne występowanie pętli ujemnego i dodatniego sprzężenia wokół członu dynamicznego PI lub PID regulatora oraz na wymaganie użycia dokładnego modelu obiektu z opóźnieniem. Obecnie w technice cyfrowej odtworzenie modelu obiektu nie jest skomplikowane (uwarunkowane jednak dokładną identyfikacją) – zamiast czystego opóźnienia można zrealizować jego aproksymację cyfrową.

Zastosowanie algorytmu predykcyjnego pozwala, dzięki kompensacji opóźnienia obiektu i zwiększeniu zapasu stabilności, na zwiększenie wzmocnienia $k_p$ regulatora, co może wpłynąć na polepszenie jakości regulacji.

## 8.4.2. NIELINIOWE ALGORYTMY PID NL Z PROGRESJĄ NASTAW

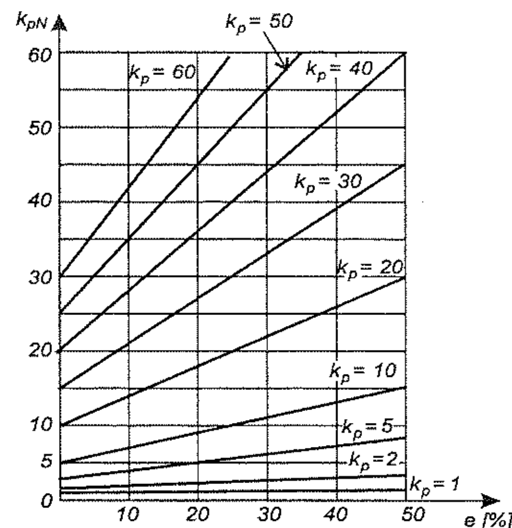
Progresja nastaw regulatorów o algorytmach ciągłych PID polega na uzmiennianiu nastaw (wartości $k_p$, $T_i$, $T_d$) regulatora w trakcie trwania przebiegu przejściowego, w funkcji odchyłki regulacji $e$. W bibliotekach algorytmów regulacyjnych regulatora EFTRONIK X znajdują się dwa nieliniowe algorytmy: PID NL1 i PID NL2, stosowane w układach regulacji stałowartościowej i układach regulacji stosunku. Schemat strukturalny regulatora nieliniowego jest analogiczny, jak liniowego.

Cechą charakterystyczną algorytmu PID NL1 jest zależność rzeczywistego wzmocnienia $k_{pN}$ regulatora od aktualnej wartości odchyłki regulacji, $e = PV - SP$, jak to przedstawiono na rys. 8.32 oraz w równaniu

$$k_{pN} = k_p \left( \left| \frac{PV - SP}{50} \right| + 0,5 \right) \tag{8.63}$$

Wielkości $PV$ i $SP$ we wzorze (8.63) podaje się w procentach; $k_p$ jest nastawą regulatora.

Wynikająca z zasad doboru nastaw regulatora wartość wzmocnienia regulatora jest wartością obowiązującą w otoczeniu punktu pracy układu, a więc przy $e = PV - SP = 0$. Na przykład, jeżeli regulator PID NL1 przy odchyłce $e = 0$ powinien mieć wzmocnienie $k_{pN} = 10$, to wzmocnienie takie zapewni nastawa $k_p = 20$; natomiast przy tej nastawie i odchyłce $e = 50\%$, wzmocnienie regulatora osiągnie wartość $k_{pN} = 30$.



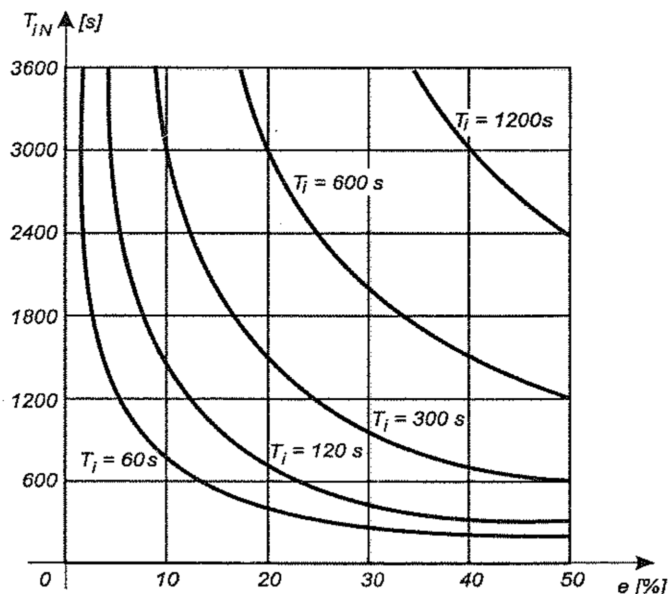

Rys. 8.32. Wykres zmian wzmocnienia $k_{pN}$ regulatora PID NL1 w funkcji odchyłki regulacji $e$ dla różnych nastaw parametru $k_p$

Regulatory o algorytmie PID NL1 zostały wykonane w latach dziewięćdziesiątych XX wieku w wersji pneumatycznej w Instytucie Automatyki i Robotyki Politechniki Warszawskiej i zastosowane w instalacji produkcji butadienu w Zakładach Rafineryjnych i Petrochemicznych Płock. Wyniki tej aplikacji potwierdziły skuteczność algorytmu, jednak ze względu na ograniczenia konstrukcyjne zawieszono dalsze prace nad jego realizacją.

Cechą charakterystyczną algorytmu PID NL2 jest uzależnienie czasu zdwojenia $T_{iN}$ od aktualnej wartości odchyłki regulacji $e = PV - SP$, zgodnie z wykresem na rys. 8.33 lub wzorem

$$T_{iN} = \frac{T_i}{\left|\frac{PV - SP}{100}\right|} \qquad (8.64)$$

gdzie $T_i$ jest nastawą regulatora.



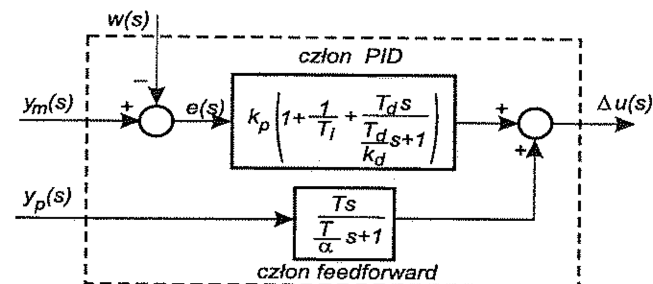

Rys. 8.33. Wykres zależności rzeczywistego czasu zdwojenia $T_{iN}$ regulatora PID NL2 od odchyłki regulacji $e$ przy różnych wartościach parametru $T_i$

W przypadku odchyłek bliskich zera, całkowanie jest w zasadzie wyłączone, gdyż dla jakiejkolwiek nastawy $T_i$; $T_{iN} \to \infty$; natomiast wraz ze wzrostem odchyłki wartość czasu zdwojenia $T_{iN}$ maleje, a więc rośnie intensywność całkowania. Jeżeli ocenimy, że np. dla odchyłki $e = 10\%$ całkowanie powinno odbywać się z czasem zdwojenia $T_{iN} = 60$ s, to należy zastosować nastawę regulatora $T_i = 6$ s.



### 8.4.3. REGULATOR Z ALGORYTMEM *FEEDFORWARD*

Regulatory z dodatkową funkcją, tzw. *feedforward*, stosowane są do sterowania procesami, w których konwencjonalny regulator o algorytmie PID nie zapewnia pożądanej jakości regulacji, a istnieje możliwość pomiaru w obiekcie dodatkowej wielkości pomocniczej $y_p$, która szybciej niż wielkość regulowana reaguje na działające na proces zakłócenie. Sygnał wielkości pomocniczej wprowadzany jest do regulatora z algorytmem *feedforward*, do członu realizującego rzeczywiste działanie różniczkujące. Sygnał wyjściowy członu różniczkującego dodaje się do sygnału z członu PID regulatora (rys. 8.34). Zatem sygnał wyjściowy $u$ regulatora zawiera dwie składowe: składową będącą funkcją wielkości pomocniczej $y_p$ i składową będącą funkcją odchyłki regulacji $e = y_m - w$. Składowa pochodząca od wielkości pomocniczej przybiera wartość zerową w stanie ustalonym działającego zakłócenia.




Rys. 8.34. Schemat blokowy regulatora PID z dodatkową funkcją sterowania *feedforward*

Działanie regulatora w układzie regulacji jest następujące. W przypadku wystąpienia zakłócenia działającego na obiekt, regulator dzięki szybkiej (działanie różniczkujące) reakcji wielkości pomocniczej, nie „czekając" na zmianę wielkości regulowanej, zacznie zmieniać swój sygnał wyjściowy i oddziaływać na obiekt w celu skompensowania wpływu zakłócenia, uprzedzając w ten sposób zmianę wielkości regulowanej. W stanie ustalonym działanie regulacyjne pochodzące od wielkości pomocniczej zanika i pozostaje jedynie działanie regulacyjne pochodzące od odchyłki regulacji. Ze względu na istotę działania układu, opisane sterowanie nazywane jest sterowaniem wyprzedzającym (stąd nazwa algorytmu *feedforward*) lub sterowaniem z pomiarem zakłóceń. Odpowiedni dobór parametrów członu różniczkującego i parametrów członu PID zapewnia lepszą jakość regulacji niż w układzie z regulatorem konwencjonalnym.

### 8.4.4. REGULATOR PID *FUZZY LOGIC*

Wiele procesów przemysłowych wykazuje nieliniowe właściwości statyczne i dynamiczne, a specyfika ich eksploatacji narzuca konieczność zmian punktu pracy w szerokim zakresie. Konwencjonalne regulatory z zestawem nastaw dobranym dla jednego punktu pracy mogą nie zapewnić odpowiedniej jakości regulacji przy zmianie punktu pracy układu. Przy zmianach punktu pracy w szerokim zakresie, nastawy poprawne w przypadku jednego punktu pracy, w innym punkcie mogą nawet powodować niestabilność układu. Pierwsze rozwiązania układowe spełniające wymagania praktyczne w przypadku procesów wymagających zmian punktu pracy polegały na zastosowaniu regulatorów z przełączanymi w trakcie pracy zestawami nastaw.

Nieliniowości obiektu regulacji dotyczą najczęściej właściwości statycznych, co się objawia zmianami wzmocnienia obiektu. W przypadku, gdy można określić aktualny punkt pracy obiektu na podstawie średniej wartości wielkości regulowanej, wtedy zastosowanie znajdują algorytmy PID *Fuzzy Logic*, polegające na odpowiednim wykorzystaniu tablicy $n$ kompletów nastaw regulatora. Liczba $n$ nie musi być duża; zależy od konstrukcji instalacji i zwykle nie przekracza kilkunastu. Każdy z kompletów nastaw odpowiada innemu punktowi pracy. Sposób rozmieszczenia wybranych $n$ punktów na charakterystyce statycznej obiektu zależy od użytkownika; powinien pokrywać cały zakres zmian wartości $y_m$, z uwzględnieniem charakteru nieliniowości obiektu, tzn. punkty powinny się zagęszczać w obszarach większych zmian wzmocnienia obiektu.

Wykorzystanie w regulatorze przygotowanych zestawów nastaw nie polega na prostym przełączeniu na kolejne zestawy wraz ze zmianą wartości wielkości wyjściowej obiektu, lecz na wyznaczeniu obowiązującego w danej chwili nowego kompletu nastaw, na podstawie nastaw właściwych dla sąsiednich punktów pracy. Do obliczeń wykorzystuje się techniki opracowane w teorii zbiorów rozmytych (*Fuzzy Logic*). Więcej informacji na ten temat znajduje się w publikacjach [4, 5].

## 8.5. TECHNICZNA REALIZACJA REGULATORÓW PID. REGULATORY MIKROPROCESOROWE

Przemysłowe regulatory PID są regulatorami pośredniego działania. Dzięki standaryzacji sygnałów wejściowych i wyjściowych mogą współpracować z wieloma rodzajami przetworników pomiarowych i elementów wykonawczych.

Ze względu na technikę realizacji, rozróżnia się regulatory analogowe i regulatory mikroprocesorowe. W praktyce przemysłowej wykorzystuje się regulatory



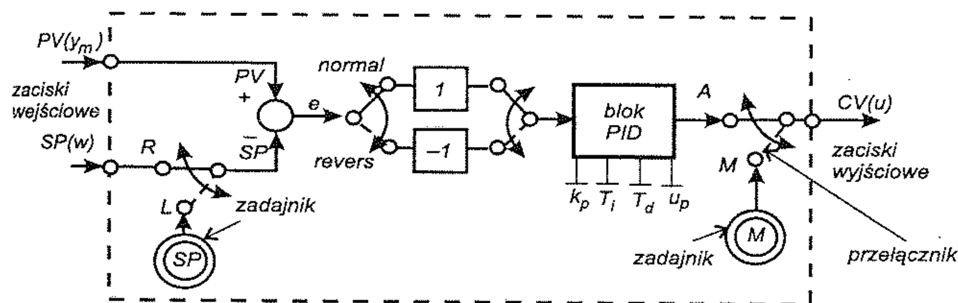
analogowe elektryczne, pneumatyczne i hydrauliczne. Rzeczywiste realizacje regulatorów analogowych mają strukturę szeregową, charakteryzującą się interakcją i ograniczonością nastaw. Cyfrowa technika realizacji algorytmów przetwarzania sygnałów w regulatorach mikroprocesorowych umożliwia tworzenie regulatorów zarówno o strukturze szeregowej, jak i równoległej o algorytmach konwencjonalnych (rozdz. 8.3) i niekonwencjonalnych (rozdz. 8.4).

Regulatory pneumatyczne wymagają zasilania odpowiednio przygotowanym powietrzem o ciśnieniu 140 kPa. Sygnały wejściowe i wyjściowy są standardowe – mają postać zmian ciśnienia w zakresie $20 \div 100$ kPa.

Regulatory elektryczne są zasilane prądem przemiennym o napięciu 230 V. Mają sygnały wejściowe i wyjściowy standardowe niezerowe napięciowe o zakresie $1 \div 5$ V prądu stałego lub prądowe o zakresie $4 \div 20$ mA.

W przemysłowych układach regulacji regulacja jest jednym z kilku zadań realizowanych za pomocą aparatury automatyki. Inne zadania to automatyczna sygnalizacja, blokady, zabezpieczenia, a także zbieranie i przetwarzanie danych do wykorzystania lokalnego lub przesłania do innych urządzeń. W układach z aparaturą analogową zadania te są realizowane przez urządzenia specjalne. Stosowane obecnie w większości procesów technologicznych regulatory mikroprocesorowe oraz sterowniki PLC, oprócz sterowania, mają możliwość realizacji także zadań dodatkowych.

Wszystkie regulatory przemysłowe mają szereg wspólnych cech funkcjonalnych, które zostaną wyjaśnione za pomocą schematu przedstawionego na rys. 8.35.




Rys. 8.35. Schemat ilustrujący cechy funkcjonalne przemysłowego regulatora PID

Sygnałami wejściowymi regulatora są: zmienna procesowa $PV$ ($y_m$) i wartość zadana $SP$ ($w$), sygnałem wyjściowym jest sygnał sterujący $CV$ ($u$).

W zależności od położenia przełącznika $R$–$L$ ($R$ – ang. *remote*, $L$ – ang. *local*) sygnał wartości zadanej $SP$ może być sygnałem zdalnym (pozycja $R$ przełącznika), podawanym z innych zewnętrznych urządzeń do regulatora, lub sygnałem za-

dawanym ręcznie (pozycja *L* przełącznika) przez operatora za pomocą zadajnika znajdującego się w regulatorze. Sygnały *PV* i *SP* są ze sobą porównywane, w wyniku czego powstaje sygnał odchyłki regulacji *e*.

W pozycji *normal* (działanie normalne) przełącznika kierunku działania regulatora, sygnałem wejściowym bloku PID jest różnica $y_m - w$; w pozycji *revers* (działanie odwrotne) sygnałem wejściowym bloku PID jest różnica $w - y_m$. W pozycji *normal* wzrost wielkości mierzonej powoduje wzrost sygnału wyjściowego regulatora, w pozycji *revers* – spadek. Przełącznik kierunku działania umożliwia współpracę regulatora z obiektami, w których wzrost sygnału sterującego wywołuje zarówno wzrost jak i spadek wielkości regulowanej, a zatem umożliwia współpracę zarówno z zespołami wykonawczymi o działaniu prostym, jak i o działaniu odwrotnym.

Blok działań dynamicznych PID na podstawie odchyłki regulacji wytwarza sygnał wyjściowy zgodnie z ustawionym algorytmem (P, I, PI, PD lub PID).

W zależności od położenia przełącznika *A–M* (*M* – ang. *manual*), zwanego także przełącznikiem automatyka – ręka, na wyjście *CV* regulatora podawany jest: w położeniu *A* – sygnał wyjściowy bloku PID, w położeniu *M* – sygnał z zadajnika sterowania ręcznego, umożliwiający sterowanie obiektem przez operatora. Sterowanie ręczne podejmowane jest przez operatora w trakcie uruchamiania instalacji – podczas tzw. rozruchu oraz w przypadku awarii sprzętu automatyki. Przełączanie z trybu pracy z *A* na *M* oraz z *M* na *A* jest w nowoczesnych regulatorach w pełni bezuderzeniowe (ang. *balanceless*); dawne konstrukcje regulatorów wymagały pewnych świadomych działań operatora.

Realizację działania P uzyskuje się w regulatorze PID poprzez ustawienie parametrów $T_i = \infty$ i $T_d = 0$ oraz wprowadzenie pożądanych wartości wzmocnienia $k_p$ i punktu pracy regulatora $u_p$. Realizacja działania PI wymaga wyłączenia akcji różniczkującej przez ustawienie $T_d = 0$ i wprowadzenia odpowiednich nastaw $k_p$ i $T_i$. Natomiast działanie PD wymaga ustawienia parametru $T_i = \infty$ i wprowadzenia nastaw $k_p$ i $T_d$ oraz wartości punktu pracy $u_p$.

Najczęściej spotykanymi zakresami nastaw regulatorów są: $k_p = 0{,}1 \div 100$, $T_i = 0{,}1 \div 3600$ s, $T_d = 0 \div 3600$ s, $k_d = 6 \div 10$ (wielkość najczęściej nie nastawiana, stanowiąca stałą przyrządu).

Produkowane obecnie regulatory mikroprocesorowe są wykonywane jako:
- autonomiczne regulatory tablicowe (aparatowe) do określonych zastosowań, w zasadzie bez możliwości ich konfiguracji;
- uniwersalne regulatory inteligentne z możliwością konfigurowania odpowiednio do zastosowania;
- regulatory projektowane samodzielnie przez użytkownika przez wykonanie modelu regulatora w języku programowania wysokiego poziomu (np. Matlab), a następnie, po transformacji kodu źródłowego na język wewnętrzny maszyny, jego implementację w lokalnym komputerze. Taka procedura nazywa się szybkim prototypowaniem.



Uniwersalne regulatory inteligentne mają strukturę tworzoną z dostępnych modułów programowych, za pośrednictwem których można regulator konfigurować zależnie od wymagań użytkownika, przy czym dostęp do konfiguracji jest zabezpieczony hasłem. W skład regulatora wchodzą: mikroprocesor, pamięć, przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe, układy wejść i wyjść cyfrowych oraz analogowych, filtry sygnałów wejściowych, układy dodatkowe, np. komunikacji pionowej (komputer nadrzędny–regulator) czy linearyzacji charakterystyk czujników, zasilacze itp. Możliwości konfiguracji regulatora dotyczą głównie definiowania rodzaju czujnika (np. termopara, termorezystor), wyboru rodzaju sygnału wyjściowego (ciągły, dwustawny, trójstawny), wyboru struktury i algorytmu regulacji. Regulatory te mają kilka (do ośmiu) pętli regulacyjnych. Komunikacja operatora z regulatorem odbywa się za pośrednictwem pulpitu operatorskiego, który na płycie czołowej zawiera wyświetlacz parametrów procesu, np. wartości wielkości regulowanej, zadanej, sygnału wyjściowego, numeru pętli regulacyjnej, danych o ewentualnym alarmie, przyciski zmniejszania–zwiększania, przełącznik trybu pracy ręczna–automatyczna, wskaźniki analogowe w postaci linijek diodowych. Sygnały wejściowe i wyjściowe są uaktualniane z okresem próbkowania zawartym w przedziale $0{,}05 \div 0{,}2$ s ($5 \div 20$ Hz).

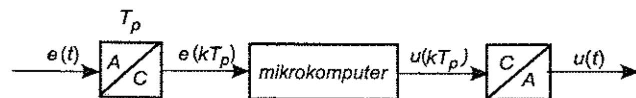
W regulatorach tych wyróżnia się następujące moduły:
- wejścia i wyjścia do konfiguracji: rodzaju, zakresów i jednostek sygnałów, parametrów wejściowego filtru dolnoprzepustowego (stałej czasowej *T*; zwykle $0 \le T \le 100$ s), wyboru źródła wielkości zadanej (wewnętrzne, zewnętrzne), wyboru trybu pracy regulatora (normalny, rewersyjny);
- matematyczne bloki: sumowania, dzielenia, potęgowania, mnożenia, pierwiastkowania, odwracania sygnału, wybieraka wartości maksymalnej, średniej i minimalnej sygnału wejściowego, komparatora sygnałów analogowych, przełącznika sygnałów, ogranicznika szybkości zmian sygnałów, integratora;
- logiczne bloki realizujące funkcje: NOT, AND, OR, XOR;
- sterujące, umożliwiające realizację algorytmu regulacji PID ciągłego lub przekaźnikowego.

Nowoczesne regulatory mikroprocesorowe (nie tylko inteligentne) mają dodatkowo blok samonastrajania (*selftuning*) lub autonastrajania (*autotuning*), pozwalający na samoczynny lub z udziałem operatora dobór nastaw regulatora do danego procesu.

W regulatorach mikroprocesorowych, pomimo ich olbrzymich możliwości, podstawowym algorytmem działania jest klasyczny algorytm PID. Wynika to z faktu, że algorytm PID został wszechstronnie zbadany, jego operatorska obsługa jest prosta, a skuteczność została przez lata sprawdzona dzięki powszechnemu stosowaniu w automatyzacji procesów przemysłowych.

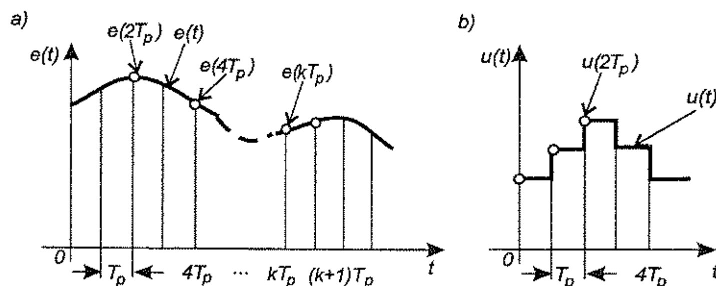
Ciągły sygnał wyjściowy mikroprocesorowego regulatora PID wyliczany jest numerycznie, wg algorytmu będącego przełożeniem postaci ciągłej algorytmu

PID na równoważną postać cyfrową. Schemat ideowy realizacji algorytmu regulacji w regulatorze mikroprocesorowym przedstawiono na rys. 8.36.




Rys. 8.36. Schemat ideowy realizacji algorytmu regulacji w regulatorze mikroprocesorowym; A/C, C/A – przetworniki analogowo-cyfrowy i cyfrowo-analogowy, $T_p$ – okres próbkowania (impulsowania)

W przetworniku A/C następuje próbkowanie sygnału odchyłki regulacji, w wyniku czego sygnał $e(t)$ jest zamieniany w sygnał dyskretny $e(kT_p)$ (rys. 8.37a). Wartości tego sygnału w dyskretnych chwilach czasu $kT_p$ są zapisywane w postaci liczb o długości słowa cyfrowego określonej przez liczbę bitów mikroprocesora. Mikrokomputer realizuje określony algorytm sterowania, który jest opisany za pomocą równania różnicowego, wyrażającego zależność sygnału $u(kT_p)$ od sygnału $e(kT_p)$. Zadaniem przetwornika C/A jest kształtowanie sygnału $u(t)$, określonego w dowolnej chwili $t$, na podstawie wartości $u(kT_p)$ wyznaczonych w dyskretnych chwilach czasu. Wartości sygnału $u(t)$ w przedziale $kT_p < t < (k+1)T_p$ określa się na podstawie wartości $u(nT_p)$, gdzie $n \le k$, w wyniku ekstrapolacji. Najczęściej stosuje się ekstrapolator zerowego rzędu, którego działanie polega na utrzymaniu w okresach $kT_p < t < (k+1)T_p$ wartości $u(t) = u(kT_p)$, jak pokazano na rys. 8.37b.




Rys. 8.37. Próbkowanie sygnału odchyłki regulacji (a) oraz przebieg sygnału $u(t)$ przy stosowaniu ekstrapolatora zerowego rzędu (b)

Cyfrową postać algorytmu regulatora PID otrzymuje się, poddając dyskretyzacji równanie analogowego idealnego regulatora PID (8.34), przy przyjęciu zerowych warunków początkowych

$$u(t) = k_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \qquad (8.65)$$



Polega to na wprowadzeniu dyskretnych wartości wielkości $u$ i $e$ oraz zastąpieniu całki sumą, a pochodnej – różnicą pierwszego rzędu:

$$\int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow \sum_{i=0}^{k-1} e(i)\,T_p\,, \qquad \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow \frac{e(k)-e(k-1)}{T_p} \qquad (8.66)$$

Po podstawieniu (8.66) do (8.65) otrzymuje się

$$\begin{aligned} u(k) &= k_p\left[e(k) + \frac{1}{T_i}\sum_{i=0}^{k-1} e(i)T_p + T_d\frac{e(k)-e(k-1)}{T_p}\right] = \\ &= k_p\left\{e(k) + \frac{T_p}{T_i}\sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T_p}\left[e(k)-e(k-1)\right]\right\} \end{aligned} \qquad (8.67)$$

Równanie (8.67) przedstawia pozycyjny algorytm regulatora cyfrowego o strukturze równoległej, przydatny do zastosowania w układach, w których zespół wykonawczy sterowany przez regulator ma właściwości członu proporcjonalnego. Algorytm ten jest niechętnie stosowany w praktyce, gdyż wymaga sumowania odchyłek regulacji od początku działania regulatora, a także dodania do sygnału $u(k)$ początkowej wartości sygnału wyjściowego regulatora.

Inną, częściej stosowaną, postać algorytmu cyfrowego regulatora otrzymuje się z algorytmu ciągłego, powstałego w wyniku zróżniczkowania równania (8.65):

$$T_i\frac{du(t)}{dt} = k_p\left[T_i\frac{de(t)}{dt} + e(t) + T_iT_d\frac{d^2e(t)}{dt^2}\right] \qquad (8.68)$$

Po dyskretyzacji równania (8.68) w dziedzinie czasu, z zastosowaniem aproksymacji pierwszej i drugiej pochodnej metodą różnic wstecznych, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &\Rightarrow \dot{u}(k) = \frac{u(k)-u(k-1)}{T_p} \\ \frac{de(t)}{dt} &\Rightarrow \dot{e}(k) = \frac{e(k)-e(k-1)}{T_p} \end{aligned} \qquad (8.69)$$

oraz

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{d\dot{e}(t)}{dt} \Rightarrow \ddot{e}(k) = \frac{\dot{e}(k)-\dot{e}(k-1)}{T_p} \qquad (8.70)$$

gdzie

$$\dot{e}(k-1)=\frac{e(k-1)-e(k-2)}{T_p} \tag{8.71}$$

otrzymuje się równanie różnicowe regulatora

$$T_i\frac{u(k)-u(k-1)}{T_p}=$$
$$=k_p\left[T_i\frac{e(k)-e(k-1)}{T_p}+e(k)+T_iT_d\frac{e(k)-2e(k-1)+e(k-2)}{T_p^2}\right] \tag{8.72}$$

Po przekształceniu otrzymuje się

$$u(k)-u(k-1)=$$
$$=k_p\left\{e(k)-e(k-1)+\frac{T_p}{T_i}e(k)+\frac{T_d}{T_p}[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)]\right\}= \tag{8.73}$$
$$=k_p\left[\left(1+\frac{T_d}{T_p}+\frac{T_p}{T_i}\right)e(k)+\left(-1-2\frac{T_d}{T_p}\right)e(k-1)+\frac{T_d}{T_p}e(k-2)\right]$$

Algorytm ten jest wykorzystywany w formie

$$\Delta u(k)=k_0e(k)+k_1e(k-1)+k_2e(k-2) \tag{8.74}$$

gdzie:

$$k_0=k_p\left(1+\frac{T_d}{T_p}+\frac{T_p}{T_i}\right),\quad k_1=k_p\left(-1-\frac{2T_d}{T_p}\right),\quad k_2=k_p\frac{T_d}{T_p}$$

oraz $\Delta u(k)=u(k)-u(k-1)$ jest przyrostem sygnału wyjściowego regulatora przypadającym na $k$-ty okres próbkowania.

Algorytm przyrostowy pozwala:
- łatwo przełączać regulator cyfrowy PID z trybu pracy automatycznej na ręczną i odwrotnie,
- na współpracę z elementem wykonawczym o działaniu całkującym.



Sygnał wyjściowy cyfrowego regulatora firmy LAB-EL, o działaniu odpowiadającym rzeczywistemu algorytmowi PID, jest kształtowany zgodnie z równaniem

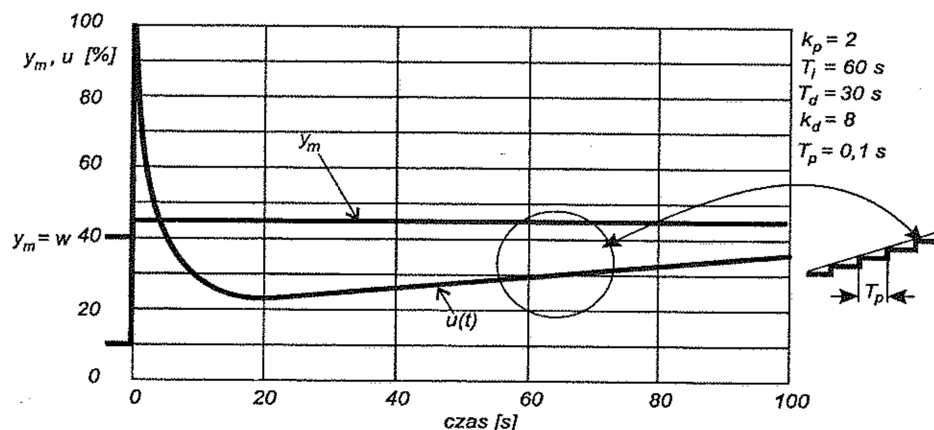
$$\Delta u(k)=k_pR\left[e(k)-e(k-1)+\frac{T_p}{T_i}e(k)+D(k)\right] \tag{8.75}$$

gdzie: $R$ – współczynnik rewersyjności regulatora (działanie normalne – $R=1$, działanie odwrotne – $R=-1$), $T_p$ – okres próbkowania (zwykle $T_p=0{,}05\div0{,}2$ s), $D(k)$ – składnik uwzględniający różniczkowanie rzeczywiste:

$$D(k)=\frac{T_d}{T_p+\frac{T_d}{k_d}}\left[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)+\frac{1}{k_d}D(k-1)\right] \tag{8.76}$$

przy czym: $T_d$, $k_d$ – czas wyprzedzenia i wzmocnienie dynamiczne rzeczywistego różniczkowania regulatora.

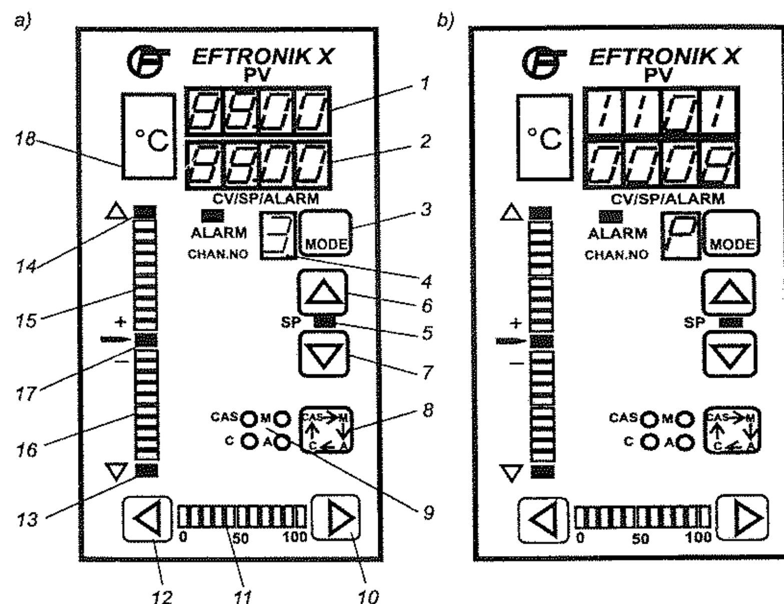
Przykład odpowiedzi skokowej cyfrowego regulatora o działaniu odpowiadającym rzeczywistemu algorytmowi PID przedstawiono na rys. 8.38. Jak widać, uaktualnianie wartości sygnału wyjściowego odbywa się z opóźnieniem wynikającym z okresu próbkowania, co ze względu na duże stałe czasowe obiektów regulacji praktycznie nie ma znaczenia.




Rys. 8.38. Odpowiedź skokowa mikroprocesorowego regulatora PID

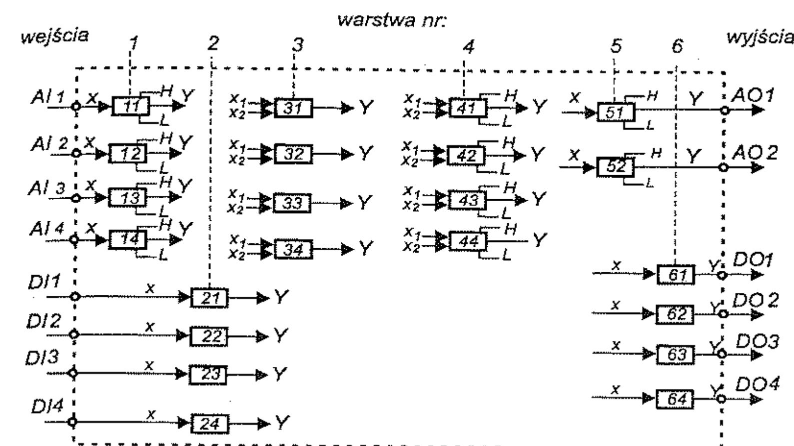
Obecnie regulatory cyfrowe są stosowane zarówno w sprzęcie powszechnego użytku, jak również w aparaturze przemysłowej. Do znanych światowych produ-

centów regulatorów należą m.in.: Honeywell, Yokogawa, ABB, Pleiger, Siemens, Woodward. Wśród polskich firm można wymienić takie, jak: Lumel, Controlmatica S.A., LAB-EL, S.J. Przykładowym uniwersalnym regulatorem mikroprocesorowym jest EFTRONIK X, którego pulpit operatorski przedstawiono na rys. 8.39. Regulator ten nie ma ustalonego algorytmu działania. Wynikowy algorytm powstaje w procesie programowania (ustalania konfiguracji), zgodnie ze strukturą funkcjonalną regulatora. Dla uproszczenia programowania algorytmy zostały podzielone na grupy, tzw. warstwy, o numerach 1–6. Zbiór 22 bloków ułożonych w warstwach stanowi strukturę funkcjonalną regulatora (rys. 8.40). Bloki zostały uporządkowane wg indeksów: nr warstwy, nr kanału, np. indeks 31 oznacza: blok w warstwie 3, kanał 1. Każdy blok ma określoną liczbę wejść i wyjść analogowych lub dyskretnych. Każdy blok w trakcie programowania może realizować jeden z algorytmów wybranych z biblioteki algorytmów dla danej warstwy.




Rys. 8.39. Widok pulpitu operatorskiego regulatora EFTRONIK X: a) w trybie „praca", b) w trybie „programowanie"; 1 – wyświetlacz wielkości mierzonej *PV*, 2 – wyświetlacz wielkości zadanej *SP*, wyjściowej *CV* oraz kodu alarmów, 3 – przełącznik kanałów, 4 – wyświetlacz numeru kanału, 5 – wskaźnik dostępności na wyświetlaczu 2 wielkości *SP*, 6, 7 – przyciski zwiększania i zmniejszania, 8, 9 – przycisk zmiany i sygnalizacji trybu pracy: A – sterowanie automatyczne, M – sterowanie ręczne, C – wartość zadana *SP* z komputera, *CAS* – wartość zadana *SP* zdalna, 10, 12 – przyciski zwiększania i zmniejszania, 11 – linijka diodowa jako wskaźnik sygnału *CV*, 13, 14, 17 – diody alarmu odchyłki dodatniej, ujemnej i zerowej, 15, 16 – linijki diodowe odchyłki dodatniej i ujemnej, 18 – tabliczka wielkości fizycznej






Rys. 8.40. Struktura funkcjonalna regulatora EFTRONIK X; AI – wejścia analogowe (ang. *analog input*), DI – wejścia dyskretne (ang. *digital input*), AO – wyjścia analogowe (ang. *analog output*), DO – wyjścia dyskretne (ang. *digital output*), H – wartość górna alarmu (ang. *high*), L – wartość dolna alarmu (ang. *low*)

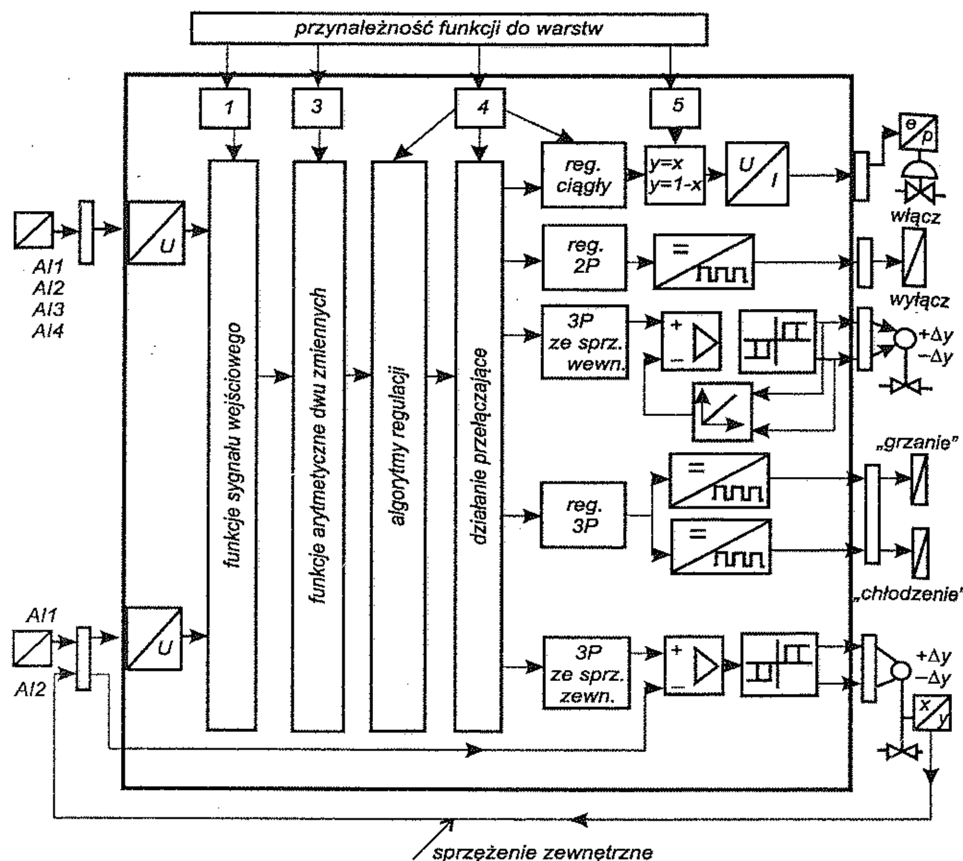
Algorytmy warstwy 1 są przeznaczone do wstępnego przetwarzania wejściowych sygnałów analogowych, pochodzących zarówno z przetworników pomiarowych z obiektu regulacji jak i nadajników sygnału sprzężenia zwrotnego od przemieszczenia liniowego lub kątowego trzpienia zaworu regulacyjnego, a także z innych źródeł prądowych lub napięciowych. W blokach tej warstwy dostępne są: funkcja odwracania sygnału, zestaw funkcji arytmetycznych jednej zmiennej, np. funkcja pierwiastkowania, podnoszenie do kwadratu, filtracja szumów pomiarowych zawartych w sygnale wejściowym, linearyzacja charakterystyki termometru rezystancyjnego Pt100. Można także zaprogramować sygnalizację przekroczenia dolnej lub górnej wartości wielkości wejściowej.

Algorytmy warstwy 2 służą do obróbki sygnałów dyskretnych. Dostępna jest w tych blokach funkcja filtracji oraz powtórzenia lub negacji sygnału wejściowego.

Algorytmy warstwy 3 służą do realizacji funkcji algebraicznych i arytmetycznych dwóch zmiennych, kluczy (przełączników) sterowanych sygnałem analogowym, dyskretnym lub sygnałem alarmu od awarii toru pomiarowego oraz funkcji integratora impulsowego, wykorzystywanego w układzie do pomiaru natężenia przepływu płynu metodą licznika. Klucze mają różne zastosowanie w strukturach układów regulacji. Umożliwiają np. zdalne przełączanie automatyczne trybu pracy M ⇔ A bez udziału operatora.

Warstwa 4 zawiera podprogramy algorytmów regulacji. Wykorzystując podstawowy algorytm PID, realizuje się konfiguracje pozwalające na realizację algorytmów regulacji stosunku w różnych wariantach i regulację kaskadową. Po-

nadto, co pokazano na rys. 8.41, regulator może być konfigurowany jako regulator o wyjściu ciągłym, regulator dwustawny 2P, trójstawny 3P, trójstawny 3P ze sprzężeniem zewnętrznym lub wewnętrznym (rozdz. 15).




Rys. 8.41. Schemat prezentujący sposób tworzenia sygnałów wyjściowych regulatora: ciągłego, 2P, 3P, 3P ze sprzężeniem wewnętrznym, 3P ze sprzężeniem zewnętrznym

W warstwie 5 realizowana jest końcowa obróbka sygnału. Wyjścia z bloków warstwy 5 są na stałe związane z wejściami przetworników C/A, co pozwala uzyskać (na zaciskach AO1 i AO2) quasi-analogowe sygnały wyjściowe *CV* regulatora, uaktualniane co 0,25 s. Istnieje możliwość zaprogramowania ograniczenia wartości minimalnej *L* oraz maksymalnej *H* sygnału wyjściowego regulatora. Podobnie jak w warstwie 4, dostępna jest funkcja odwracania sygnału wyjściowego.



W warstwie 6 realizowana jest końcowa obróbka dyskretnego sygnału wyjściowego. Dostępna jest funkcja negacji sygnału oraz ustawienia stanu logicznego wyjścia po zaniku zasilania regulatora.

Użytkownik przygotowuje własną strukturę funkcjonalną regulatora za pomocą **tablic konfiguracyjnych**, które wchodzą w skład dokumentacji dostarczanej wraz z regulatorem. Tablice te zawierają listę wszystkich adresów, pod którymi należy wpisywać, za pomocą przycisków i wyświetlaczy znajdujących się na pulpicie regulatora, wartości parametrów.

Obecnie większość sterowników PLC, oprócz możliwości realizacji sterowania sekwencyjnego, ma także algorytmy PID, co pozwala tworzyć układy automatyki o zróżnicowanych zadaniach sterowania, zawierających m.in. klasyczne obwody regulacji.

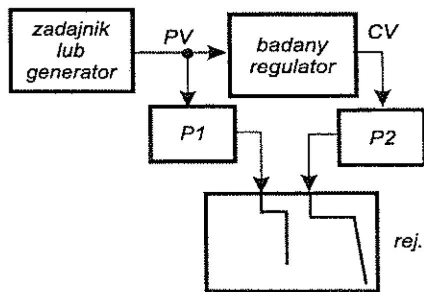
Niektóre firmy proponują też technikę sterowania „soft-control", polegającą na realizacji wszystkich funkcji regulatora lub sterownika przez komputer. Technika ta ma ograniczony zasięg, gdyż w rozwiązaniach przemysłowych najistotniejsza jest niezawodność działania i trzeba dysponować urządzeniami mogącymi przejąć sterowanie w przypadku awarii komputera.

## 8.6. DOŚWIADCZALNA IDENTYFIKACJA NASTAW REGULATORÓW PID

Wytyczne dotyczące badań regulatorów określone są w krajowej normie EN 60546-2:1993, która jest zgodna z normami międzynarodowymi IEC 381 i IEC 382. Badania dotyczą sprawdzania działania proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego regulatorów. Przykładowy schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 8.42. Sygnały *PV* i *CV*, zależnie od technicznej realizacji regulatora, mogą być elektryczne lub pneumatyczne o standardowym zakresie zmian i aby je dopasować do rodzaju rejestratora i jego zakresu pomiarowego, należy zastosować odpowiednie przetworniki sprzęgające P1, P2 oraz wykorzystać zadajnik lub generator dostosowany do rodzaju badanego regulatora.

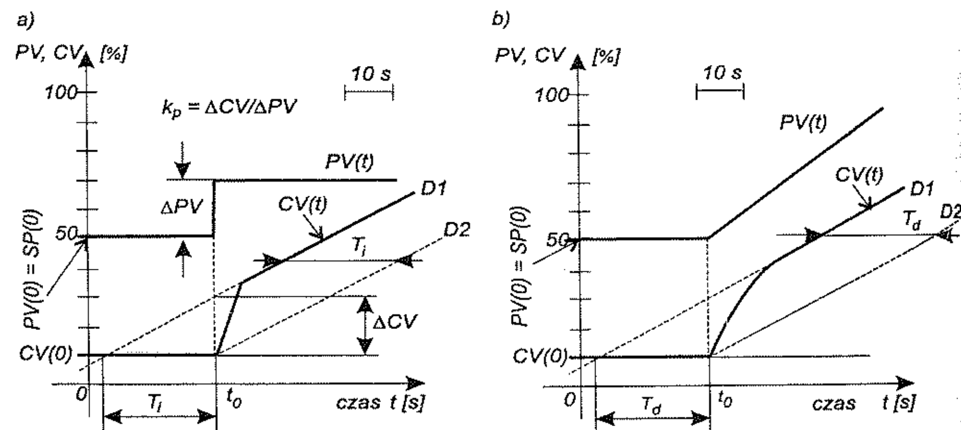
Identyfikacja nastaw regulatora dokonywana jest na podstawie zarejestrowanych zmian sygnału wyjściowego, wywołanych skokową lub liniowo narastającą zmianą wielkości *PV*. Z otrzymanych na taśmie rejestratora lub na innym nośniku wykresów odczytuje się, w sposób podany na rys. 8.43, parametry regulatora $k_p$, $T_i$, $T_d$ i porównuje je z parametrami nastawionymi, oceniając w ten sposób dokładność realizacji algorytmu przez dany regulator. Pomiary przeprowadza się, ustalając wartość zadaną $SP = 50\%$. Zalecane są zmiany wielkości *PV* w zakresie

±20% od punktu równowagi $PV(0) = SP(0) = 50\%$. Przed wprowadzeniem wymuszenia skokowego lub liniowo narastającego, należy odczekać do chwili umownie oznaczonej jako $t_0$, aż nastąpi stabilizacja sygnału wyjściowego regulatora dla odchyłki regulacji równej zeru, tzn. gdy $PV(0) = SP(0)$.




Rys. 8.42. Schemat ideowy układu pomiarowego do sprawdzania działania regulatorów PID; P1, P2 – przetworniki pomiarowe

Jeżeli do rejestracji przebiegów użyto rejestratora z taśmą papierową, to z zarejestrowanych przebiegów można odczytać wartości $T_i$ i $T_d$, nanosząc na wykres linie pomocnicze $D1$ i $D2$, które muszą być względem siebie równoległe. Wyznaczają one na osi poziomej, reprezentującej czas, odcinki odpowiadające szukanym wartościom $T_i$ lub $T_d$. Znając prędkość posuwu taśmy rejestratora, przyporządkowuje się długość tych odcinków określonym wartościom czasu. Jak wynika z wykresu, do określenia wartości $T_i$ i $T_d$ nie jest wymagana rejestracja zmian wielkości wejściowej. Na podstawie wykresów jak na rys. 8.43 można także wyznaczyć wartość wzmocnienia $k_p$ regulatora. Jest to jednak metoda niezalecana, ze względu na małą dokładność. Bardziej dokładną wartość wzmocnienia $k_p$ uzyskuje się na podstawie charakterystyki statycznej regulatora.




Rys. 8.43. Sposób doświadczalnego określania parametrów regulatora: a) wyznaczanie czasu zdwojenia $T_i$ regulatora PI na podstawie odpowiedzi na wymuszenie skokowe, b) wyznaczanie czasu wyprzedzenia $T_d$ regulatora PD na podstawie odpowiedzi na wymuszenie liniowo narastające



# 9. STABILNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW REGULACJI

Pojęcie stabilności związane jest z oceną zachowania układu dynamicznego wytrąconego ze stanu równowagi, po zaniku oddziaływania (wymuszenia), które ten układ ze stanu równowagi wytrąciło.

Możliwe są trzy rodzaje zachowań układów liniowych:
- układ powraca do stanu równowagi w punkcie pracy zajmowanym przed wytrąceniem go ze stanu równowagi,
- układ osiąga stan równowagi w innym punkcie pracy niż początkowy,
- układ nie osiąga stanu równowagi; szczególnym przypadkiem takiego zachowania jest wykonywanie przez układ oscylacji o stałej amplitudzie.

Układ powracający po zaniku wymuszenia do stanu równowagi, w którym znajdował się przed wytrąceniem go ze stanu równowagi, nazywany jest **układem stabilnym asymptotycznie**.

Układ osiągający po zaniku wymuszenia stan równowagi w innym punkcie niż początkowy nazywany jest **układem stabilnym nieasymptotycznie**.

O układzie, który po zaniku wymuszenia generuje drgania niegasnące o stałej amplitudzie, mówi się, że znajduje się on na granicy stabilności; w pozostałych przypadkach nieosiągania stanu równowagi układ jest określany jako **niestabilny**. Powodem niestabilności układu może być niewłaściwy dobór parametrów elementów składowych – wówczas układ jest **niestabilny parametrycznie**, lub niewłaściwa struktura (np. zamiast ujemnego sprzężenia zwrotnego jest sprzężenie dodatnie) – wówczas układ jest **niestabilny strukturalnie**.

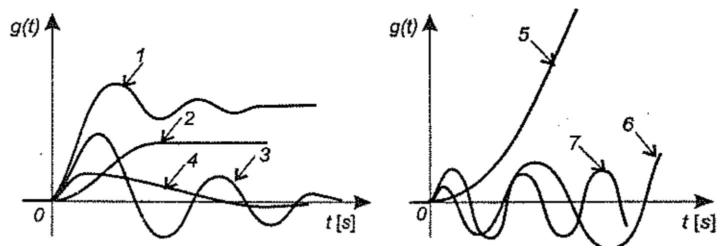
Ze względu na podstawowe zadanie układu regulacji, jakim jest dążenie do osiągnięcia przez wielkość regulowaną wartości zadanej, układ regulacji musi być **układem stabilnym asymptotycznie**.

Procesy osiągania stanów równowagi przez układy stabilne mogą przybierać różne formy. Do charakteryzacji i oceny tych procesów odnosi się pojęcie „jakość układów regulacji" (rozdz. 10). Oprócz wymogu stabilności, układ regulacji musi spełniać określone wymagania dotyczące jakości.

W przypadku układów nieliniowych, ich zachowanie pod wpływem wymuszeń i po ich zaniku może zależeć od punktu pracy układu oraz od rodzaju i wielkości wymuszeń. Dlatego ocena układów nieliniowych pod względem stabilności jest sprawą znacznie bardziej złożoną niż w przypadku układów liniowych.

Z podanego określenia stabilności w odniesieniu do układów liniowych wynika, że stabilność jest cechą samego układu – nie zależy od charakteru wymuszeń wytrącających go ze stanu równowagi. Zatem, stabilność układu liniowego można ocenić na podstawie przebiegu sygnału wyjściowego po zaniku jakiegokolwiek wymuszenia, najprościej – na podstawie odpowiedzi na impuls Diraca.

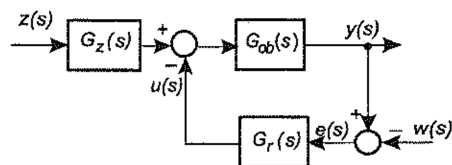
Przykłady odpowiedzi impulsowych układów stabilnych i niestabilnych przedstawiono na rys. 9.1.




Rys. 9.1. Przykładowe odpowiedzi impulsowe układów: 1, 2 – stabilnych nieasymptotycznie, 3, 4 – stabilnych asymptotycznie, 5, 6 – niestabilnych, 7 – układu będącego na granicy stabilności (układ generuje drgania niegasnące)

## 9.1. OGÓLNE WARUNKI STABILNOŚCI LINIOWYCH UKŁADÓW REGULACJI

Przedyskutowane zostaną warunki stabilności układu regulacji (rys. 9.2) na podstawie jego odpowiedzi impulsowych.




Rys. 9.2. Schemat blokowy układu automatycznej regulacji



Transmitancja operatorowa układu względem zakłócenia ma postać

$$G_1(s)=\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{G_z(s)G_{ob}(s)}{1+G_{ob}(s)G_r(s)}=\frac{L_1(s)}{M(s)}=\frac{L_1(s)}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0} \qquad (9.1)$$

a względem wartości zadanej

$$G_2(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{G_r(s)G_{ob}(s)}{1+G_{ob}(s)G_r(s)}=\frac{L_2(s)}{M(s)}=\frac{L_2(s)}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0} \qquad (9.2)$$

Przebieg odpowiedzi impulsowej układu można wyznaczyć, wykonując odwrotne przekształcenie Laplace'a jego transmitancji operatorowej (wzór (3.13)); odpowiedź impulsowa jako funkcja jest oryginałem transmitancji operatorowej układu. Jak przedstawiono w rozdz. 2.2, poszukiwanie oryginału transformaty, będącej ilorazem wielomianów, wymaga rozłożenia jej na sumę ułamków prostych. W przypadku wyznaczania odpowiedzi impulsowej, o postaci tych ułamków, i w efekcie – o postaci odpowiedzi, decydują pierwiastki równania charakterystycznego układu (miejsca zerowe mianownika transmitancji).

Ponieważ transmitancje (9.1) i (9.2) mają jednakowe mianowniki (jednakowe są równania charakterystyczne), charakterystyki impulsowe wyznaczone na ich podstawie będą miały jednakową postać; różnić się będą tylko wartościami współczynników. Zatem, stabilność układu o strukturze jak na rys. 9.2 można ocenić na podstawie odpowiedzi na zakłócenie impulsowe lub impulsową zmianę wartości zadanej.

Rozpatrzony zostanie wpływ pierwiastków (mogą być pojedyncze lub wielokrotne, rzeczywiste zerowe lub niezerowe oraz zespolone sprzężone) równania charakterystycznego

$$a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0=0 \qquad (9.3)$$

na postać charakterystyki impulsowej układu.

**Przypadek 1**

Równanie charakterystyczne ma tylko niezerowe pojedyncze pierwiastki rzeczywiste $s_1$, $s_2$, ..., $s_n$. Wtedy

$$G(s)=\frac{L(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)}=\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_2}{s-s_2}+\ldots+\frac{C_n}{s-s_n} \qquad (9.4)$$

gdzie: $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ – współczynniki stałe.

Charakterystyka impulsowa ma postać

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}+\ldots+C_ne^{s_nt} \qquad (9.5)$$

Aby $\lim_{t\to\infty} g(t)=0$, wszystkie pierwiastki $s_1$, $s_2$, ..., $s_n$ muszą być ujemne; każdy pierwiastek dodatni powoduje powstanie składnika dążącego do nieskończoności.

**Przypadek 2**

Równanie charakterystyczne ma podwójny pierwiastek $s_1$ i niezerowe pojedyncze pierwiastki rzeczywiste $s_3$, ..., $s_n$. Wtedy

$$G(s)=\frac{L(s)}{a_n(s-s_1)^2(s-s_3)...(s-s_n)}=\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_2}{(s-s_1)^2}+\frac{C_3}{s-s_3}+...+\frac{C_n}{s-s_n} \quad (9.6)$$

Charakterystyka impulsowa ma postać

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=C_1e^{s_1t}+C_2te^{s_1t}+C_3e^{s_3t}+...+C_ne^{s_nt} \quad (9.7)$$

Jeżeli wszystkie pierwiastki $s_1$, $s_3$, ..., $s_n$ są ujemne, to $\lim_{t\to\infty} C_2te^{s_1t}=0$ (przy $s_1<0$ funkcja wykładnicza $e^{s_1t}$ maleje szybciej, niż rośnie zmienna $t$), a także $\lim_{t\to\infty} g(t)=0$.

Analogicznie jest w przypadku pierwiastków o wyższych krotnościach.

**Przypadek 3**

Równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek zerowy, np. $s_1=0$, i niezerowe pojedyncze pierwiastki rzeczywiste $s_2$, ..., $s_n$. Wtedy

$$G(s)=\frac{L(s)}{a_ns(s-s_2)...(s-s_n)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s-s_2}+...+\frac{C_n}{s-s_n} \quad (9.8)$$

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=C_1+C_2e^{s_2t}+...+C_ne^{s_nt} \quad (9.9)$$

Jeżeli wszystkie pierwiastki niezerowe są ujemne, charakterystyka impulsowa dąży do wartości stałej $\lim_{t\to\infty} g(t)=C_1$; w przeciwnym razie $\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$.

**Przypadek 4**

Równanie charakterystyczne ma dwa (lub więcej) pierwiastki zerowe i niezerowe pojedyncze pierwiastki rzeczywiste $s_3$, ..., $s_n$. Wtedy

$$G(s)=\frac{L(s)}{a_ns^2(s-s_3)...(s-s_n)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s^2}+\frac{C_3}{s-s_3}+...+\frac{C_n}{s-s_n} \quad (9.10)$$

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=C_1+C_2t+C_3e^{s_3t}+...+C_ne^{s_nt} \quad (9.11)$$



Ze względu na składnik $C_2t$, $\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$; podobnie w przypadku większej liczby pierwiastków zerowych.

**Przypadek 5**

Równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone sprzężone $x_1=a+jb$ i $x_2=a-jb$ oraz niezerowe pojedyncze pierwiastki rzeczywiste $s_3$, ..., $s_n$. Wtedy

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{L(s)}{a_n(s^2-2as+a^2+b^2)(s-s_3)...(s-s_n)}=\\&=\frac{C_1s+C_2}{s^2-2as+a^2+b^2}+\frac{C_3}{s-s_3}+...+\frac{C_n}{s-s_n}\end{aligned} \quad (9.12)$$

Charakterystyka impulsowa ma postać (na podstawie tabl. 2.1)

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=C_1e^{at}\cos bt+\frac{C_2+aC_1}{b}e^{at}\sin bt+C_3e^{s_3t}+...+C_ne^{s_nt} \quad (9.13)$$

Aby zapewnić $\lim_{t\to\infty} g(t)=0$, wszystkie pierwiastki rzeczywiste muszą być ujemne oraz część rzeczywista pierwiastków zespolonych musi być ujemna (dzięki temu składowe sinusoidalne mają gasnące amplitudy).

**Przypadek 6**

Równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone sprzężone o zerowych częściach rzeczywistych $x_1=jb$ i $x_2=-jb$ oraz niezerowe pojedyncze pierwiastki rzeczywiste $s_3$, ..., $s_n$. Wtedy

$$G(s)=\frac{L(s)}{a_n(s^2+b^2)(s-s_3)...(s-s_n)}=\frac{C_1s+C_2}{s^2+b^2}+\frac{C_3}{s-s_3}+...+\frac{C_n}{s-s_n} \quad (9.14)$$

Charakterystyka impulsowa ma postać

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=C_1\cos bt+\frac{C_2}{b}\sin bt+C_3e^{s_3t}+...+C_ne^{s_nt} \quad (9.15)$$

W tym przypadku, jeżeli pierwiastki rzeczywiste są ujemne, to po okresie przejściowym wystąpią drgania niegasnące.

Podsumowując można stwierdzić, że o stabilności układu liniowego decydują pierwiastki jego równania charakterystycznego, przy czym:

- Układ jest stabilny asymptotycznie, jeżeli jego równanie charakterystyczne ma pierwiastki rzeczywiste ujemne lub zespolone o ujemnych częściach rzeczywistych.

– Jeżeli równanie charakterystyczne układu oprócz pierwiastków ujemnych lub o ujemnych częściach rzeczywistych ma jeden pierwiastek zerowy, to układ ten jest stabilny nieasymptotycznie.
– Jeżeli równanie charakterystyczne układu ma więcej niż jeden pierwiastek zerowy lub pierwiastki dodatnie lub zespolone o dodatnich częściach rzeczywistych, to układ ten jest niestabilny.
– Jeżeli równanie charakterystyczne układu ma nie więcej niż jeden pierwiastek zerowy i nie ma pierwiastków dodatnich lub zespolonych o dodatnich częściach rzeczywistych, natomiast ma pierwiastki zespolone o zerowych częściach rzeczywistych, to układ ten generuje drgania niegasnące (jest na granicy stabilności).

Z przeprowadzonej analizy wynika także wniosek ogólny: układ o strukturze jak na rys. 9.2, zachowujący się w przypadku oddziaływania zakłóceń jak układ stabilny, będzie stabilny także w przypadku zmian wartości zadanej.

Do oceny stabilności układów liniowych wystarczy zatem znajomość pierwiastków równania charakterystycznego układu. Pierwiastki te można wyznaczać metodami konwencjonalnymi lub wykorzystując odpowiednie programy komputerowe.

**Przykład 9.1**

Określić stabilność elementów o transmitancjach operatorowych: a) $G(s)=\frac{1}{2s+1}$, b) $G(s)=\frac{1}{2s-1}$, c) $G(s)=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$.

*Rozwiązanie*

a) Równanie charakterystyczne elementu ma postać:

$$2s+1=0$$

Równanie to ma jeden pierwiastek rzeczywisty ujemny $s_1=-0,5$, zatem jest to element stabilny asymptotycznie.

b) Równanie charakterystyczne elementu ma postać:

$$2s-1=0$$

Równanie to ma jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni $s_1=+0,5$, zatem jest to element niestabilny.

c) Po przekształceniu transmitancji operatorowej otrzymuje się

$$G(s)=k_p\left(\frac{T_i s+1}{T_i s}\right)$$

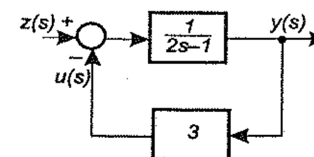
Równanie charakterystyczne elementu $T_i s=0$ ma jeden pierwiastek zerowy $s_1=0$. Jest to zatem element stabilny nieasymptotycznie.



Poleca się narysować odpowiedzi impulsowe wymienionych elementów potwierdzające wyniki rozwiązania.

**Przykład 9.2**

Określić stabilność układu pokazanego na rys. 9.3.




Rys. 9.3. Schemat blokowy do przykładu 9.2

*Rozwiązanie*

Na podstawie transmitancji operatorowej układu

$$G(s)=\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{\frac{1}{2s-1}}{1+\frac{1}{2s-1}3}=\frac{1}{2s-1+3}=\frac{1}{2s+2}$$

otrzymuje się jego równanie charakterystyczne

$$2s+2=0$$

Ma ono jeden pierwiastek rzeczywisty ujemny $s_1=-1$, zatem układ jest stabilny asymptotycznie.

**Układ otwarty (bez sprzężenia zwrotnego) jest niestabilny (patrz przykł. 9.1), układ zamknięty (dołączenie sprzężenia zwrotnego ujemnego) stał się stabilny.**

**Przykład 9.3**

Określić stabilność układu o równaniu charakterystycznym

$$s^3+3s^2+6s+8=0$$

*Rozwiązanie*

Wykorzystując funkcję roots z pakietu MATLAB i wykonując polecenia:

```
rch=[1 3 6 8]; %tablica współczynników równania charakterystycznego
s=roots(rch); % pierwiastki równania charakterystycznego
```

otrzymuje się następujące pierwiastki:

```
s =
-2.0000
-0.5000+1.9365i
-0.5000-1.9365i
```

Zatem układ o podanym równaniu charakterystycznym jest stabilny asymptotycznie.

Metoda oceny stabilności układów na podstawie znajomości pierwiastków równania charakterystycznego w praktyce jest mało przydatna ze względu na trudności z ich wyznaczaniem. Dlatego niezbędne się stało opracowanie innych metod określania stabilności. Są to tzw. kryteria stabilności, które można podzielić na grupy:

- kryteria analityczne (Hurwitza, Routha),
- kryteria graficzne (kryterium Michajłowa, metoda Evansa),
- kryteria graficzno-analityczne (kryterium Nyquista, metoda rozkładu D).

Kryteria te zostały także zaimplementowane w programach symulacyjnych, np. w środowisku MATLAB/SIMULINK.

Poniżej zostaną przedstawione kryteria Hurwitza i Nyquista.

## 9.2. KRYTERIUM HURWITZA

W roku 1895 A. Hurwitz sformułował matematyczne kryterium umożliwiające sprawdzenie, czy równanie algebraiczne dowolnego stopnia ma wyłącznie pierwiastki ujemne lub o częściach rzeczywistych ujemnych. Zastosowanie tego kryterium do badania stabilności układów automatyki ograniczone jest do liniowych układów o parametrach skupionych i transmitancji danej w postaci analitycznej. Opierając się na nim, można badać stabilność zarówno układów otwartych, jak i zamkniętych (ze sprzężeniem zwrotnym). Kryterium to zostanie podane bez formalnego dowodu słuszności, który można znaleźć w publikacjach [28, 39].

Zgodnie z tym kryterium, równanie algebraiczne stopnia $n$ o stałych rzeczywistych współczynnikach

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{9.16}$$

ma wszystkie pierwiastki ujemne lub o ujemnych częściach rzeczywistych, jeżeli spełnione są dwa warunki (zwane warunkami Hurwitza):



1) Wszystkie współczynniki $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ tego równania są różne od zera i są jednakowego znaku; jest to warunek konieczny ale niewystarczający.

2) Wszystkie podwyznaczniki główne tzw. wyznacznika Hurwitza $\Delta_n$ są większe od zera.

Wyznacznik Hurwitza $\Delta_n$ utworzony ze współczynników równania (9.16) ma $n$ wierszy i $n$ kolumn:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & - & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & - & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}_{n\times n} \tag{9.17}$$

Sformułujmy wyznacznik Hurwitza dla równania czwartego stopnia

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \tag{9.18}$$

Na osi głównej wyznacznika umieszcza się kolejne współczynniki od $a_0$ do $a_{n-1}$ (patrz strzałka); wiersze uzupełnia się kolejnymi współczynnikami. Jego podwyznacznikami głównymi są:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \tag{9.19}$$

Ze względu na właściwość wyznaczników (można je odwracać względem osi głównej, nie powodując zmiany ich wartości), wyznacznik $\Delta_4$ może być także zapisany w postaci

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \tag{9.20}$$

Jego podwyznacznikami głównymi są:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \qquad (9.21)$$

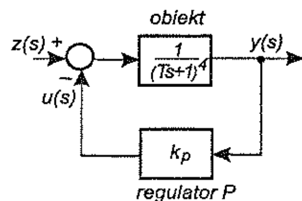
Kryterium Hurwitza umożliwia stwierdzenie stabilności asymptotycznej i stabilności nieasyptotycznej. Możliwość wystąpienia stabilności nieasymptotycznej zachodzi wtedy, gdy w równaniu charakterystycznym układu współczynnik $a_0 = 0$ (równanie ma jeden pierwiastek zerowy), natomiast pozostałe współczynniki są większe od zera i są jednakowego znaku. Po podzieleniu stron równania stopnia $n$ przez $s$, otrzymuje się równanie stopnia $n-1$, w odniesieniu do którego należy zastosować kryterium Hurwitza, w celu sprawdzenia znaku pozostałych pierwiastków. Jeżeli równanie to spełnia warunki Hurwitza, to znaczy, że równanie charakterystyczne układu ma jeden pierwiastek zerowy, a pozostałe pierwiastki są ujemne lub o ujemnych częściach rzeczywistych; zatem sprawdzany układ jest stabilny nieasymptotycznie.

W przypadku gdy układ nie spełnia pierwszego warunku kryterium Hurwitza (z wyjątkiem sytuacji, w której istnieje podejrzenie o stabilność nieasymptotyczną), wówczas nie sprawdza się drugiego warunku, gdyż układ jest niestabilny i jest to niestabilność strukturalna, czyli układ ma niewłaściwą strukturę, np. zamiast sprzężenia ujemnego występuje dodatnie, lub elementy układu mają niewłaściwe algorytmy działania.

W przypadku gdy nie jest spełniony tylko drugi warunek kryterium Hurwitza, może to oznaczać wystąpienie niestabilności parametrycznej. Wystarczyłoby zmienić wartości parametrów elementów składowych układu, aby układ z niestabilnego stał się stabilny. Samo kryterium nie daje jednak projektantowi układu informacji, w jaki sposób należałoby zmienić te parametry.

Kryterium Hurwitza nie dostarcza informacji o tym, jak przebiegają procesy przejściowe w układzie. Dlatego ma ono zastosowanie głównie we wstępnej fazie projektowania układu regulacji. Kryterium Hurwitza nie można stosować do badania stabilności układów zawierających człony opóźniające.

**Przykład 9.4**




Wyznaczyć zakres wartości wzmocnienia $k_p$ regulatora P, zapewniający stabilną pracę układu regulacji przedstawionego na rys. 9.4.

Rys. 9.4. Schemat blokowy układu do przykładu 9.4



*Rozwiązanie*

Na podstawie transmitancji operatorowej układu

$$G(s) = \frac{\frac{1}{(Ts+1)^4}}{1 + \frac{1}{(Ts+1)^4} k_p} = \frac{1}{(Ts+1)^4 + k_p}$$

wyznacza się jego równanie charakterystyczne

$$(Ts+1)^4 + k_p = 0$$

$$T^4 s^4 + 4T^3 s^3 + 6T^2 s^2 + 4Ts + 1 + k_p = 0$$

gdzie: $a_0 = 1 + k_p$, $a_1 = 4T$, $a_2 = 6T^2$, $a_3 = 4T^3$, $a_4 = T^4$.

Ponieważ stała czasowa $T$ jest wartością dodatnią, spełnienie pierwszego warunku Hurwitza wymaga wprowadzenia ograniczenia $k_p + 1 > 0$, czyli $k_p > -1$.

Sprawdzenie drugiego warunku Hurwitza wymaga zbadania podwyznaczników głównych $\Delta_2$ i $\Delta_3$ wyznacznika $\Delta_4$ (wzory (9.19)):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4T^3 & T^4 \\ 4T & 6T^2 \end{vmatrix} = 24T^5 - 4T^5 = 20T^5 > 0 \text{ – podwyznacznik jest dodatni}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4T^3 & T^4 & 0 \\ 4T & 6T^2 & 4T^3 \\ 0 & 1+k_p & 4T \end{vmatrix} =$$

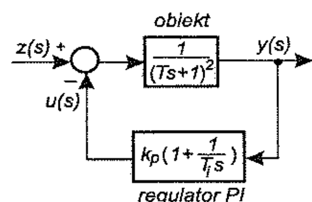
$$= 96T^6 - 16T^6 - 16T^6 k_p - 16T^6 = 64T^6 - 16T^6 k_p$$

Podwyznacznik $\Delta_3$ będzie też większy od zera, jeżeli $k_p < 4$.

Z pierwszego i drugiego warunku Hurwitza wynika zakres zmian wzmocnienia $k_p$ regulatora, zapewniający stabilną pracę układu regulacji: $-1 < k_p < 4$. Ponieważ wzmocnienie regulatora jest wartością dodatnią, należy rozumieć, że w przypadku ujemnego sprzężenia zwrotnego (jak na rys. 9.4) układ będzie stabilny przy $0 < k_p < 4$ i także w przypadku dodatniego sprzężenia zwrotnego przy $0 < k_p < 1$. Dodatkowo warto zauważyć, że stabilność tego układu nie zależy od wartości stałej czasowej obiektu, a jedynie od wzmocnienia regulatora.

**Przykład 9.5**

Określić zakres zmian nastaw $k_p$ i $T_i$ regulatora PI, zapewniający stabilną pracę układu regulacji pokazanego na rys. 9.5. Stała czasowa obiektu regulacji $T = 10$ s.




Rys. 9.5. Schemat blokowy układu regulacji do przykładu 9.5

*Rozwiązanie*

Transmitancja operatorowa układu ma postać

$$G(s) = \frac{\frac{1}{(10s+1)^2}}{1+\frac{1}{(10s+1)^2}k_p\frac{T_is+1}{T_is}} = \frac{T_is}{(10s+1)^2T_is + k_p(T_is+1)}$$

skąd równanie charakterystyczne

$$100T_is^3 + 20T_is^2 + T_i(1+k_p)s + k_p = 0$$

gdzie: $a_0 = k_p$, $a_1 = T_i(1+k_p)$, $a_2 = 20T_i$, $a_3 = 100T_i$.

Ponieważ czas zdwojenia $T_i$ regulatora i wzmocnienie $k_p$ są wielkościami dodatnimi, pierwszy warunek Hurwitza jest spełniony dla dowolnej wartości $T_i$ i $k_p$.

Drugi warunek Hurwitza wymaga zapewnienia dodatniej wartości podwyznacznika $\Delta_2$ wyznacznika $\Delta_3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20T_i & 100T_i \\ k_p & T_i(1+k_p) \end{vmatrix} = 20T_i^2(1+k_p) - 100\,k_pT_i > 0$$

skąd wynika warunek stabilności układu

$$T_i > \frac{5k_p}{1+k_p}$$



**Przykład 9.6**

Wyznaczyć obszar wartości współczynników $k$ i $T$, zapewniający stabilną pracę układu o równaniu dynamiki

$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 5\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + T\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

*Rozwiązanie*

Poddając równanie dynamiki przekształceniu Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych, wyznacza się transmitancję operatorową, skąd wynika równanie charakterystyczne układu

$$s^4 + 5s^3 + 4s^2 + Ts + k = 0$$

gdzie: $a_0 = k$, $a_1 = T$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$.

Z pierwszego warunku Hurwitza wynikają ograniczenia: $T > 0$ oraz $k > 0$. Z drugiego warunku wynikają dalsze ograniczenia:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ T & 4 \end{vmatrix} = 20 - T > 0, \quad \text{skąd } T < 20$$

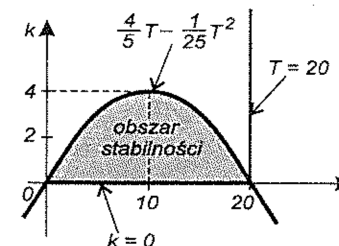
oraz

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ T & 4 & 5 \\ 0 & k & T \end{vmatrix} = 20T - 25k - T^2 > 0$$

skąd, uwzględniając, że $T > 0$, otrzymuje się kolejny warunek

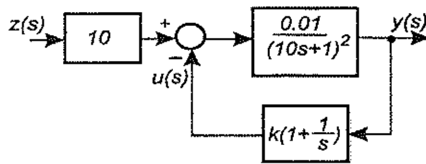
$$k < \frac{4}{5}T - \frac{1}{25}T^2$$

Na rysunku 9.6 przedstawiono wykreślone na płaszczyźnie ($T$, $k$) granice podziału tej płaszczyzny na obszary parametrów spełniające poszczególne warunki. Wszystkie warunki spełnione są tylko w obszarze zacieniowanym. Aby układ był stabilny, należy dobierać wartości $k$ i $T$ odpowiadające współrzędnym punktów z tego obszaru.




Rys. 9.6. Obszary stabilności układu

### Ćwiczenie 9.1




Dla jakich wartości współczynnika $k$ układ o schemacie przedstawionym na rys. 9.7 będzie stabilny?

Rys. 9.7. Schemat układu do ćwiczenia 9.1

Odp.: Dla $0 < k < 25$.

### Ćwiczenie 9.2

Dla jakich wartości współczynnika $k$ układ o równaniu dynamiki

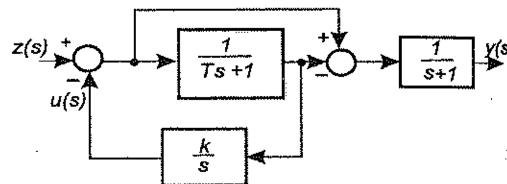
$$2\frac{d^4y(t)}{dt^4} + k\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 10x(t)$$

będzie stabilny?

Odp.: Dla $5 < k < 10$.

### Ćwiczenie 9.3

Wyznaczyć obszary wartości współczynników $k$ i $T$, zapewniające stabilną pracę układu jak na rys. 9.8.




Rys. 9.8. Schemat układu do ćwiczenia 9.3

## 9.3. KRYTERIUM STABILNOŚCI NYQUISTA. ZAPASY STABILNOŚCI

Kryterium Nyquista pozwala badać stabilność tylko takich układów, które stanowią zamknięty obwód ze sprzężeniem zwrotnym ujemnym (rys. 9.9). Transmitancja operatorowa takiego układu określona jest wzorem

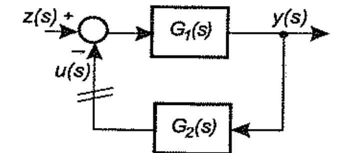
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)} \tag{9.22}$$



Szeregowe połączenie elementów występujących w obwodzie zamkniętym nazywa się układem otwartym. Układ otwarty powstaje przez przerwanie pętli sprzężenia zwrotnego, a jego transmitancja operatorowa ma postać

$$G_0(s) = G_1(s)\,G_2(s) \tag{9.23}$$

Kryterium Nyquista umożliwia ocenę stabilności układu zamkniętego na podstawie charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego. Ograniczenie możliwości stosowania kryterium Nyquista do układów z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, w przypadku badania stabilności układów regulacji, nie ma znaczenia, gdyż każdy układ regulacji jest obwodem z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.




Rys. 9.9. Schemat blokowy układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (układ zamknięty)

Znaczenie kryterium Nyquista polega na tym, że:
- charakterystyka częstotliwościowa układu otwartego, na podstawie której określana jest stabilność układu zamkniętego, może być wyznaczana analitycznie lub doświadczalnie;
- kryterium umożliwia nie tylko stwierdzenie faktu stabilności układu, lecz także ocenę oddalenia układu od granicy stabilności i projektowanie układów o określonych właściwościach dynamicznych;
- kryterium umożliwia badanie stabilności układów zawierających elementy opóźniające.

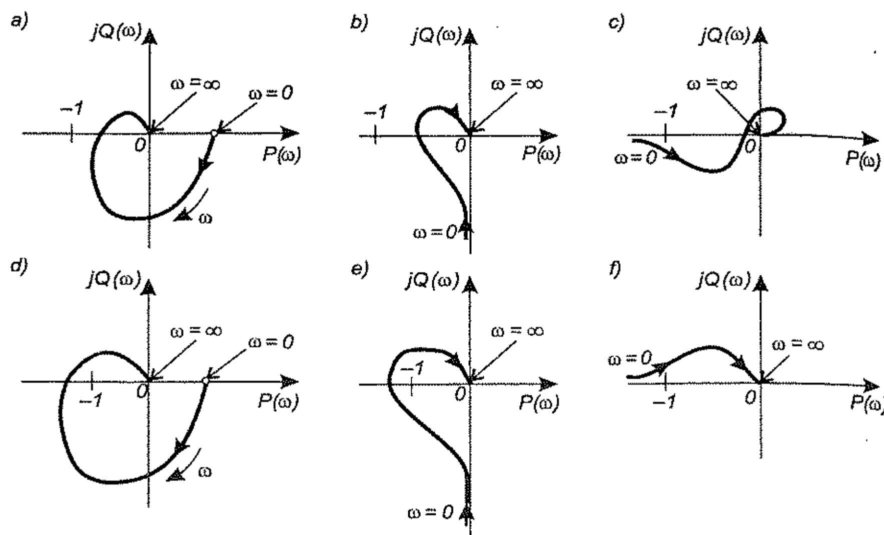
Zwykle kryterium Nyquista formułowane jest oddzielnie dla dwóch przypadków:

1) kiedy równanie charakterystyczne układu otwartego nie ma pierwiastków dodatnich lub o dodatnich częściach rzeczywistych (może mieć dowolną liczbę pierwiastków zerowych),

2) kiedy równanie charakterystyczne układu otwartego ma pierwiastki dodatnie lub o dodatnich częściach rzeczywistych.

Ograniczmy się do omówienia pierwszego przypadku; dotyczy on większości układów. Kryterium odnoszące się do tego tylko przypadku nazywa się kryterium uproszczonym.

Zgodnie z uproszczonym kryterium Nyquista, w przypadku kiedy równanie charakterystyczne układu otwartego nie ma pierwiastków dodatnich lub o dodatnich częściach rzeczywistych (może mieć dowolną liczbę pierwiastków zerowych), układ zamknięty będzie stabilny, jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego nie obejmuje punktu o współrzędnych –1, j0. Zwrot „nie obejmuje" oznacza, że przy przesuwaniu się wzdłuż charakterystyki w kierunku wzrastających pulsacji punkt (–1, j0) pozostaje po lewej stronie charakterystyki, tak jak to przedstawiono na rys. 9.10a–c.



Rys. 9.10. Przykłady charakterystyk amplitudowo-fazowych układów otwartych, odpowiadających: a–c) stabilnym układom zamkniętym, d–f) niestabilnym układom zamkniętym

Stabilność układu zamkniętego można także oceniać na podstawie charakterystyk logarytmicznych układu otwartego. Układ otwarty jest szeregowym połączeniem elementów występujących w układzie zamkniętym. Logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową układu otwartego otrzymuje się, sumując logarytmiczne charakterystyki jego elementów składowych (rozdz. 3.7).

Rozważmy charakterystyki częstotliwościowe dwóch układów otwartych, przedstawione na rys. 9.11. Charakterystyki oznaczone jako 1 odpowiadają układowi otwartemu, który po zamknięciu będzie stabilny, natomiast charakterystyki 2 – układowi niestabilnemu po zamknięciu.

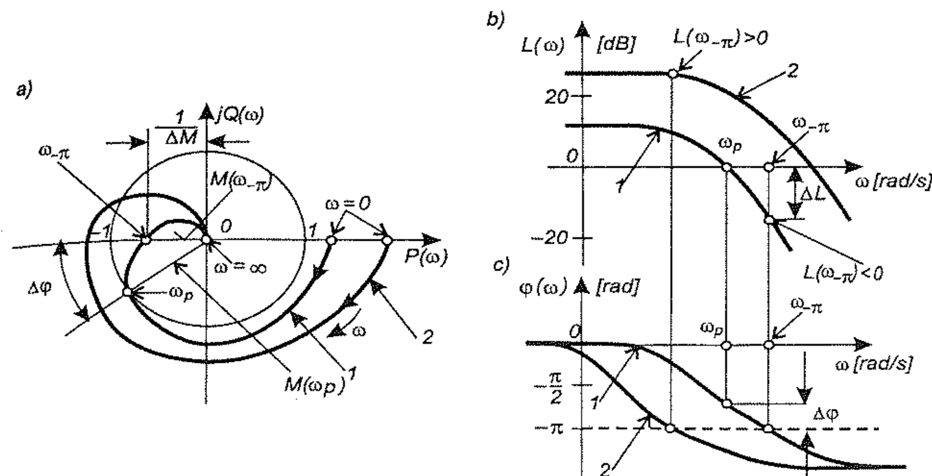
Na podstawie charakterystyk amplitudowo-fazowych przedstawionych na rys. 9.11a, można sformułować następujące warunki, które musi spełniać układ otwarty, aby po zamknięciu był stabilny (w przypadku uproszczonego kryterium Nyquista):

$$M(\omega_{-\pi}) < 1 \tag{9.24}$$

$$\varphi(\omega_p) > -\pi \tag{9.25}$$

gdzie: $\omega_p$ jest pulsacją, przy której moduł transmitancji widmowej układu otwartego jest równy jedności, tzn. $M(\omega_p) = 1$; $\omega_{-\pi}$ jest pulsacją, przy której argument transmitancji widmowej układu otwartego jest równy $-\pi$, tzn. $\varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi$.





Rys. 9.11. Charakterystyki częstotliwościowe układów otwartych: a) charakterystyki amplitudowo-fazowe, b) logarytmiczne charakterystyki amplitudowe, c) logarytmiczne charakterystyki fazowe; 1 – charakterystyki układu stabilnego po zamknięciu, 2 – charakterystyki układu niestabilnego po zamknięciu

Jeżeli stabilność układu zamkniętego jest oceniana na podstawie charakterystyk logarytmicznych układu otwartego (rys. 9.11b, c), to warunek (9.24) należy zastąpić warunkiem równoważnym

$$L(\omega_{-\pi}) = 20\lg M(\omega_{-\pi}) < 0 \tag{9.26}$$

Warunek (9.25) pozostaje bez zmian, przy czym należy pamiętać, że

$$L(\omega_p) = 0 \tag{9.27}$$

Zaletą kryterium Nyquista jest to, że umożliwia ocenę oddalenia układu od granicy stabilności. Jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przechodzi bardzo blisko punktu $(-1, j0)$, to zachodzi niebezpieczeństwo utraty stabilności przez układ zamknięty, w wyniku nawet niewielkich zmian parametrów tego układu. Jako miarę tego oddalenia przyjmuje się tzw. **zapas stabilności**, wyrażony w postaci dwóch wielkości: **zapasu modułu** i **zapasu fazy**. Jest to pewien margines bezpieczeństwa, dający projektantowi układu regulacji określoną pewność, że układ pozostanie stabilny pomimo określonych zmian jego parametrów.

**Zapas modułu** w skali bezwzględnej oznacza się symbolem $\Delta M$ i definiuje następująco:

$$\Delta M = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})} \tag{9.28}$$

W przypadku wykorzystania charakterystyk logarytmicznych, gdy moduł wyrażony jest w decybelach, posługujemy się tzw. logarytmicznym zapasem modułu $\Delta L$:

$$\Delta L = 20\lg \Delta M = -20\lg M(\omega_{-\pi}) = -L(\omega_{-\pi}) \qquad (9.29)$$

Zapasy modułu układów stabilnych są następujące: $\Delta M > 1$ lub $\Delta L > 0$. Jeżeli $\Delta M = 1$ (lub $\Delta L = 0$), to układ jest na granicy stabilności.

**Zapas fazy** oznacza się symbolem $\Delta\varphi$ i definiuje następująco:

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_p) \qquad (9.30)$$

Zapas fazy układu stabilnego $\Delta\varphi > 0$ (w przypadku układów stabilnych, przesunięcie fazowe układu otwartego $\varphi(\omega_p) > -\pi$).

Sposób wyznaczania zapasów stabilności na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej lub charakterystyk logarytmicznych przedstawiono na rys. 9.11.

Układ mający określony zapas modułu i fazy jest pod względem stabilności „odporny" na pewne zmiany swych parametrów, które zachodzą podczas pracy rzeczywistego układu lub w miarę upływu czasu. Na przykład, układ mający zapas modułu $\Delta M = 2$ (lub $\Delta L = 6$ dB) jest „odporny" (nie utraci stabilności) na dwukrotne zwiększenie wartości modułu układu otwartego.

Określenie wymagań dotyczących zapasu fazy i zapasu modułu pozwala projektantowi dobrać właściwą strukturę układu regulacji oraz odpowiedni algorytm i nastawy regulatora. W praktyce przemysłowej przyjmuje się następujące wartości zapasów stabilności:

$$30° \le \Delta\varphi \le 60°, \quad 2 \le \Delta M \le 4 \quad \text{lub} \quad 6\,\text{dB} \le \Delta L \le 12\,\text{dB} \qquad (9.31)$$

Spełnienie tych wymagań co do zapasów stabilności zapewnia zwykle uzyskanie zadowalająco dobrych przebiegów przejściowych w układzie regulacji.

Oprócz zapasów stabilności związanych z kryterium Nyquista istnieją inne formy określania zapasu stabilności. Są to:

**Zapas stabilności względem parametrów układu.** Jeżeli układ ma $n$ parametrów, które mogą się zmieniać w trakcie jego pracy, to w przestrzeni $n$-wymiarowej można wyznaczyć powierzchnię będącą miejscem geometrycznym punktów, odpowiadających takim kombinacjom przewidywanych zmian wartości parametrów, przy których badany układ jest stabilny z określonym zapasem bezpieczeństwa.

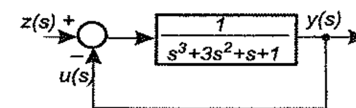
**Zapas stabilności na płaszczyźnie pierwiastków.** W przypadku układów liniowych o działaniu ciągłym można rozpatrywać zapas stabilności w postaci stref zakazanych na płaszczyźnie pierwiastków równania charakterystycznego.

Oceny stabilności układów regulacji na podstawie kryterium Nyquista można dokonywać metodami tradycyjnymi (graficzna, analityczna) lub z wykorzystaniem różnych dostępnych narzędzi informatycznych. Najbardziej rozbudowanym i uniwersalnym takim narzędziem jest środowisko MATLAB. Oceny stabilności układu zamkniętego na podstawie charakterystyk częstotliwościowych (amplitudowo-fazowej lub logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej) układu otwartego można dokonać w tym środowisku, stosując funkcje $NYQUIST(L, M)$ oraz $BODE(L, M)$, natomiast zapasy stabilności określa się, stosując funkcję $MARGIN(L, M)$.



**Przykład 9.7**

Stosując kryterium Nyquista, zbadać stabilność układu o schemacie blokowym jak na rys. 9.12. Jeżeli układ okaże się stabilny, określić jego zapas modułu.




Rys. 9.12. Schemat blokowy do przykładu 9.7

*Rozwiązanie*

Transmitancja układu otwartego ma postać

$$G_0(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

Korzystając z kryterium Hurwitza, sprawdzamy, czy równanie charakterystyczne układu otwartego

$$s^3 + 3s^2 + s + 1 = 0$$

nie ma pierwiastków dodatnich, co jest warunkiem wykorzystania uproszczonego kryterium Nyquista.

Ponieważ obydwa warunki Hurwitza są spełnione:

- wszystkie współczynniki równania są dodatnie,
- podwyznacznik $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$,

zatem równanie charakterystyczne układu otwartego ma tylko pierwiastki ujemne lub o ujemnych częściach rzeczywistych (układ otwarty jest stabilny asymptotycznie); można więc do badania stabilności układu zamkniętego wykorzystać uproszczone kryterium Nyquista.

Wyznaczamy transmitancję widmową układu otwartego:

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{1}{1 - 3\omega^2 + j(\omega - \omega^3)} \frac{1 - 3\omega^2 - j(\omega - \omega^3)}{1 - 3\omega^2 - j(\omega - \omega^3)} =$$

$$= \frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2} + j\frac{-(\omega - \omega^3)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$

skąd

$$P(\omega)=\frac{1-3\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{-(\omega-\omega^3)}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

Aby stwierdzić fakt obejmowania lub nieobejmowania przez charakterystykę amplitudowo-fazową układu otwartego punktu (–1, j0), wystarczy wyznaczyć współrzędne początku i końca charakterystyki oraz współrzędne punktów jej przecięć z osiami. Przyrównując części rzeczywistą $P(\omega)$ i urojoną $Q(\omega)$ do zera, otrzymuje się pulsacje, przy których charakterystyka przecina osie współrzędnych. Pulsacjami tymi są:

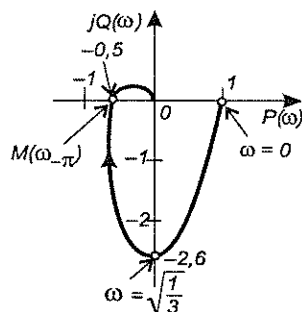
$$\omega=0,\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{3}},\quad \omega=1,\quad \omega=\infty$$

Dla tych pulsacji wyznaczono wartości części rzeczywistej i urojonej transmitancji widmowej. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabl. 9.1; przebieg wykreślonej na podstawie tych wyników charakterystyki amplitudowo-fazowej przedstawiono na rys. 9.13.

Tablica 9.1

**Wybrane punkty charakterystyki amplitudowo-fazowej**

| $\omega$ [rad/s] | 0 | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 1 | 0 | –0,5 | 0 |
| $Q(\omega)$ | 0 | –2,6 | 0 | 0 |




Rys. 9.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego do przykładu 9.7

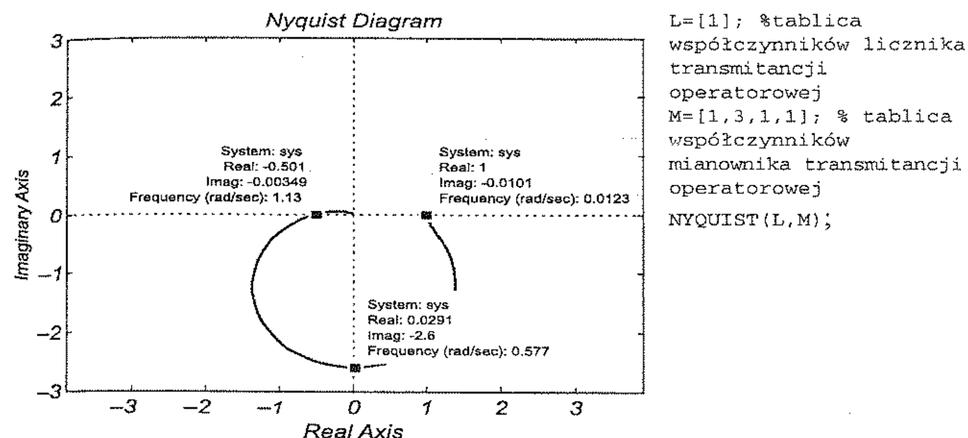


Ponieważ charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego nie obejmuje punktu (–1, j0), rozważany układ zamknięty jest stabilny. Z rysunku wynika, że $M(\omega_{-\pi})=0{,}5$, zatem

$$\Delta M=\frac{1}{M(\omega_{-\pi})}=2\quad\text{oraz}\quad \Delta L=20\lg\Delta M=6\ \text{dB}$$

Badany układ jest stabilny z zapasem modułu $\Delta M=2$ ($\Delta L=6$ dB).

Wykorzystując środowisko MATLAB, można uzyskać rzeczywisty przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej (rys. 9.14).

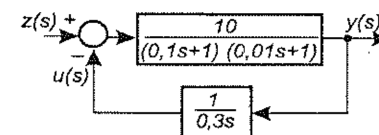



```
L=[1]; %tablica
współczynników licznika
transmitancji
operatorowej
M=[1,3,1,1]; % tablica
współczynników
mianownika transmitancji
operatorowej
NYQUIST(L,M);
```

Rys. 9.14. Charakterystyka amplitudowo-fazowa (wykres Nyquista) układu otwartego do przykładu 9.7 otrzymana w środowisku MATLAB oraz sekwencja zastosowanych poleceń

### Przykład 9.8

Zbadać stabilność układu o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 9.15. Wyznaczyć zapasy stabilności tego układu.




Rys. 9.15. Schemat blokowy do przykładu 9.8

*Rozwiązanie*

Transmitancja układu otwartego ma postać

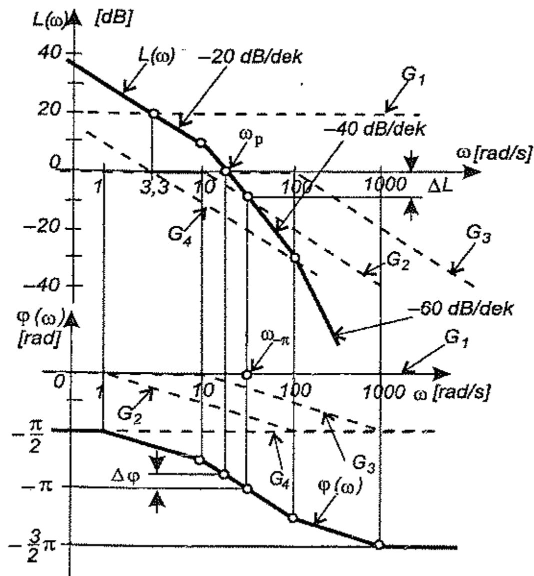
$$G_0(s)=\frac{10}{(0{,}1s+1)(0{,}01s+1)}\,\frac{1}{0{,}3s}$$

Jak widać, równanie charakterystyczne układu otwartego nie ma pierwiastków dodatnich, zatem do badania stabilności można zastosować uproszczone kryterium Nyquista.

Układ otwarty stanowi szeregowe połączenie czterech członów dynamicznych: proporcjonalnego, dwóch członów inercyjnych i członu całkującego

$$G_0(s) = G_1\, G_2\, G_3\, G_4 = 10\frac{1}{0{,}1s+1}\frac{1}{0{,}01s+1}\frac{1}{0{,}3s}$$

Na rys. 9.16 przedstawiono charakterystyki logarytmiczne poszczególnych członów układu otwartego oraz całego układu otwartego, uzyskane w wyniku sumowania charakterystyk członów składowych. Charakterystyki członów proporcjonalnego i całkującego są charakterystykami rzeczywistymi, członów inercyjnych – charakterystykami asymptotycznymi (charakterystyki fazowe wg aproksymacji metodą siecznej – rozdz. 5). Z rysunku wynika, że badany układ jest stabilny z zapasem fazy $\Delta\varphi \approx \pi/8$ rad $= 22{,}5°$ i zapasem modułu $\Delta L \approx 9$ dB. Odczytane z wykresu wartości zapasów obarczone są błędem wynikającym z zastosowanej metody graficznej oraz z aproksymacji charakterystyk rzeczywistych charakterystykami asymptotycznymi.




Rys. 9.16. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe i fazowe układu otwartego do przykładu 9.8



Zapasy stabilności można także wyznaczyć metodą analityczną, na podstawie równań opisujących charakterystyki logarytmiczne.

Logarytmiczną charakterystykę amplitudową opisuje funkcja

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega)$$

Aby można było skorzystać ze wzorów opisujących charakterystyki asymptotyczne członów inercyjnych (tabl. 5.3), należy określić przedział pulsacji, w którym znajduje się poszukiwana wartość $\omega_p$; z rys. 9.16 wynika, że $10 < \omega_p < 100$. Zatem, dla tego przedziału:

$$L_1(\omega) = 20\lg 10, \qquad L_3(\omega) = 0$$

$$L_2(\omega) = -20\lg 0{,}1\omega, \qquad L_4(\omega) = -20\lg 0{,}3\omega$$

Wartość pulsacji $\omega_p$ otrzymuje się z równania $L(\omega) = 0$, a więc

$$20\lg 10 + (-20\lg 0{,}1\omega_p) + (-20\lg 0{,}3\omega_p) = 0$$

skąd $\omega_p \approx 18{,}26$ rad/s. Znając wartość pulsacji $\omega_p$, można wyznaczyć przesunięcie fazowe układu otwartego $\varphi(\omega_p)$ i zapas fazy.

Charakterystykę fazową opisuje funkcja

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega)$$

gdzie:

$$\varphi_1(\omega) = 0, \qquad \varphi_3(\omega) = -\mathrm{arctg}\,0{,}01\omega$$

$$\varphi_2(\omega) = -\mathrm{arctg}\,0{,}1\omega, \qquad \varphi_4(\omega) = -\pi/2$$

Zatem

$$\varphi(\omega_p) = -\mathrm{arctg}\,0{,}1\omega_p - \mathrm{arctg}\,0{,}01\omega_p - \frac{\pi}{2} \approx -2{,}82 \text{ rad} \approx -161{,}6°$$

Zapas fazy wynosi $\Delta\varphi = 180° - 161{,}6° = 18{,}4°$.

Do określenia zapasu modułu niezbędna jest wartość pulsacji $\omega_{-\pi}$, którą wyznaczymy z równania $\varphi(\omega) = -\pi$. Ze względu na trudności obliczeniowe, posłużymy się liniowymi aproksymacjami funkcji arctg. Wiedząc, na podstawie rys. 9.16, że poszukiwana wartość $\omega_{-\pi}$ znajduje się, tak jak $\omega_p$, w przedziale pulsacji $10 < \omega < 100$, wyznaczamy ją z równania

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{0{,}1\omega_{-\pi}} - 0{,}01\omega_{-\pi} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

skąd $\omega_{-\pi} \approx 31{,}6$ rad/s.

Korzystając z zależności (9.29) i wykorzystując obowiązujący w przedziale pulsacji $10 < \omega < 100$ opis charakterystyki amplitudowej, otrzymuje się zapas modułu

$$\Delta L = -L(\omega_{-\pi}) = -[20\lg 10 + (-20\lg 0{,}1\omega_{-\pi}) + (-20\lg 0{,}3\omega_{-\pi})] \approx 9{,}5 \text{ dB}$$

Procedura badania stabilności i wyznaczania zapasów stabilności upraszcza się w przypadku wykorzystania technik komputerowych. Wykorzystując funkcję $MARGIN(L,M)$ z pakietu MATLAB, transmitancję operatorową rozważanego układu otwartego zapisuje się w postaci:

$$G_0(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

gdzie:

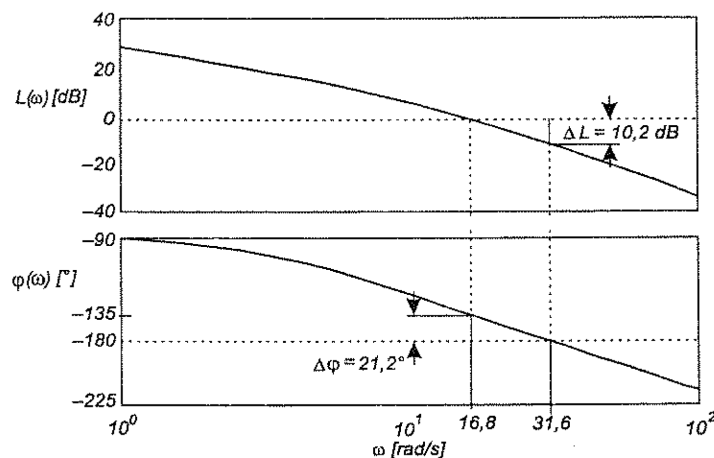
$$L(s) = 10$$

$$M(s) = (0{,}01s+1)(0{,}1s+1)\,0{,}3s = a(s)\,b(s)\,c(s)$$

W wyniku wykonania poniższych instrukcji MATLAB-a

```
L=[10];
a=[0.01,1];
b=[0.1,1];
c=[0.3,0];
M=conv(conv(a,b),c);
MARGIN(L,M)
```

otrzymuje się przedstawione na rys. 9.17 logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową układu otwartego z wyznaczonymi wartościami zapasów stabilności.




Rys. 9.17. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (wykres Bodego) układu otwartego do przykładu 9.8, wyznaczone w środowisku MATLAB



Porównanie wyników uzyskanych wyżej przedstawionymi metodami podano w tabl. 9.2.

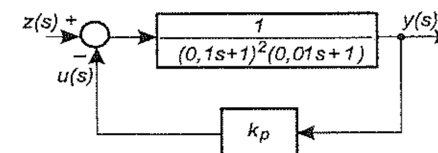
Tablica 9.2

**Wyniki obliczeń**

| Zapas stabilności | Metoda graficzna | Metoda analityczna | Metoda symulacji w środowisku MATLAB |
|---|---|---|---|
| $\Delta L$ [dB] | 9 | 9,5 | 10,2 |
| $\Delta\varphi$ [°] | 22,5 | 18,4 | 21,2 |

## Przykład 9.9

Wyznaczyć wzmocnienie $k_p$ regulatora P, przy którym układ regulacji o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 9.18 będzie stabilny z zapasem fazy $\Delta\varphi = 45°$. Wyznaczyć zapas modułu tego układu.




Rys. 9.18. Schemat blokowy do przykładu 9.9

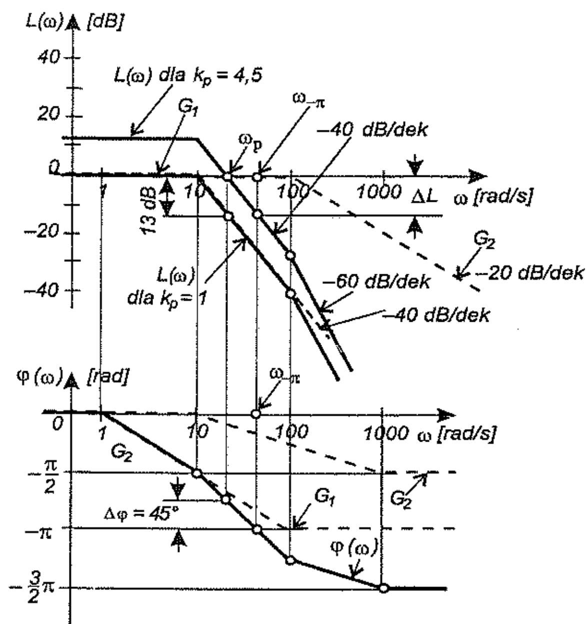
*Rozwiązanie*

Transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać

$$G_0(s) = \frac{1}{(0{,}1s+1)^2}\,\frac{1}{(0{,}01s+1)}\,k_p = G_1(s)\,G_2(s)\,k_p$$

Równanie charakterystyczne układu otwartego nie ma pierwiastków dodatnich, zatem do badania stabilności można zastosować uproszczone kryterium Nyquista.

Wykreślamy asymptotyczne charakterystyki logarytmiczne układu otwartego przy założeniu $k_p = 1$ (rys. 9.19). Przebieg charakterystyki fazowej nie zależy od wartości wzmocnienia regulatora. Z jej przebiegu można odczytać wartość zarówno pulsacji $\omega_{-\pi}$ jak i pulsacji $\omega_p$, przy której charakterystyka amplitudowa powinna przecinać oś rzędnych, zapewniając zapas fazy $\Delta\varphi = 45°$. Aby charakterystyka amplitudowa przecinała oś rzędnych w punkcie odpowiadającym tej wartości $\omega_p$, należy charakterystykę amplitudową, wykreśloną dla $k_p = 1$, przesunąć do góry o około 13 dB. Oznacza to, że zamiast $k_p = 1$ należy przyjąć $k_p \approx 4{,}5$ ($20\lg 4{,}5 \approx 13$ dB). Zatem, aby układ miał zapas fazy wynoszący 45°, regulator powinien mieć wzmocnienie wynoszące $k_p \approx 4{,}5$.




Rys. 9.19. Asymptotyczne charakterystyki logarytmiczne układu otwartego do przykładu 9.9

Zapas modułu odczytany z charakterystyki amplitudowej dla $k_p \approx 4{,}5$ przy pulsacji $\omega_{-\pi}$ wynosi $\Delta L \approx 12$ dB.

Podobnie jak w przykładzie 9.8, pulsację $\omega_p$ można wyznaczyć z równania charakterystyki fazowej. Aby zapas fazy wynosił $\Delta\varphi = 45°$, charakterystyka fazowa dla pulsacji $\omega_p$ musi mieć wartość $-135°$. Zatem wartość pulsacji $\omega_p$ spełnia równanie

$$2(-\mathrm{arctg}\,0{,}1\omega_p) + (-\mathrm{arctg}\,0{,}01\omega_p) = -\frac{3}{4}\pi$$

Aby rozwiązać to równanie, posłużymy się liniowymi aproksymacjami funkcji arctg. Z rys. 9.19 wynika, że pulsacja $\omega_p$ znajduje się w przedziale $10 < \omega < 100$. W przedziale tym charakterystyki fazowe elementów $G_1$ i $G_2$ opisują funkcje aproksymujące:

$$\varphi_1(\omega) = 2\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{0{,}1\omega}\right), \quad \varphi_2(\omega) = -0{,}01\omega$$



Zatem, z równania

$$2\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{0{,}1\omega_p}\right) - 0{,}01\omega_p = -\frac{3}{4}\pi$$

wynika $\omega_p \approx 20{,}2$ rad/s.

Asymptotyczna charakterystyka amplitudowa powinna przecinać oś rzędnych (osiągać wartość 0 dB) przy pulsacji $\omega = \omega_p = 20{,}2$ rad/s. W przedziale pulsacji $10 < \omega < 100$ asymptotyczną charakterystykę amplitudową opisuje funkcja

$$L(\omega) = 20\lg k_p - 20\lg(0{,}1\omega)^2$$

Wzmocnienie regulatora, zapewniające założony zapas fazy, wyznaczamy z równania

$$20\lg k_p - 20\lg(0{,}1 \cdot 20{,}2)^2 = 0$$

skąd $k_p \approx 4{,}1$.

Aby określić zapas modułu, należy na podstawie równania

$$2(-\mathrm{arctg}\,0{,}1\omega_{-\pi}) + (-\mathrm{arctg}\,0{,}01\omega_{-\pi}) = -\pi$$

wyznaczyć wartość pulsacji $\omega_{-\pi}$. Podobnie jak poprzednio, posłużymy się liniowymi aproksymacjami funkcji arctg. Z rys. 9.19 wynika, że pulsacja $\omega_{-\pi}$ także znajduje się w przedziale $10 < \omega < 100$, zatem z równania

$$2\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{0{,}1\omega_{-\pi}}\right) - 0{,}01\omega_{-\pi} = -\pi$$

otrzymuje się $\omega_{-\pi} \approx 44{,}7$ rad/s.

Korzystając z zależności (9.29) i stosując obowiązujący w przedziale pulsacji $10 < \omega < 100$ opis asymptotycznej charakterystyki amplitudowej, otrzymuje się zapas modułu

$$\Delta L = -L(\omega_{-\pi}) = -[20\lg k_p + (-40\lg 0{,}1\omega_{-\pi})] =$$

$$= -[20\lg 4{,}1 + (-40\lg 0{,}1 \cdot 44{,}7)] \approx 13{,}8 \text{ dB}$$

Wyznaczmy także wzmocnienie $k_p$ regulatora P, zapewniające wymagany zapas fazy, metodą symulacji w środowisku MATLAB.

Transmitancję operatorową układu otwartego, przyjmując wartość wzmocnienia regulatora $k_p = 1$, zapisujemy w postaci:

$$G_0(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

gdzie:

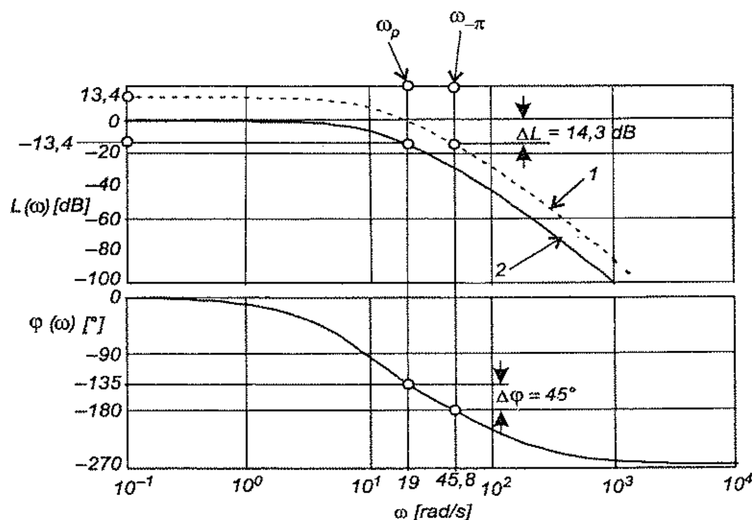
$L(s)=1,$

$M(s)=(0{,}01s+1)(0{,}1s+1)(0{,}1s+1)=a(s)\,b(s)\,c(s).$

W wyniku wykonania instrukcji MATLAB-a:

```
L=[1];
a=[0.01,1];
b=[0.1,1];
c=[0.1,1];
M=conv(conv(a,b),c);
BODE(L,M)
```

otrzymuje się, przedstawione na rys. 9.20, logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową układu otwartego z zaznaczonymi i wyliczonymi przez program wartościami odpowiednich punktów charakterystyk. Z wykresu charakterystyki fazowej wynika, że aby układ był stabilny z zapasem fazy 45°, charakterystyka amplitudowa powinna osiągać wartość 0 dB przy pulsacji $\omega_p=19$ rad/s. Przy tej pulsacji charakterystyka amplitudowa odpowiadająca wzmocnieniu regulatora $k_p=1$ (linia 2) ma wartość $L(\omega_p)=-13{,}4$ dB. Zatem, aby $L(\omega_p)$ osiągnęła wartość zero, należy zwiększyć wzmocnienie regulatora do wartości, przy której $20\lg k_p=13{,}4$ dB, czyli do wartości $k_p=4{,}68$.




Rys. 9.20. Charakterystyki logarytmiczne układu otwartego do przykładu 9.9 otrzymane z symulacji komputerowej w środowisku MATLAB: 1 – charakterystyka amplitudowa dla $k_p=4{,}68$, 2 – charakterystyka amplitudowa dla $k_p=1$



Wykorzystując funkcję $MARGIN(L,M)$, uzyskano dla układu z regulatorem o wzmocnieniu $k_p=4{,}68$ nową charakterystykę amplitudową (linia 1 na rys. 9.20), z której odczytano wartość zapasu modułu $\Delta L=14{,}3$ dB.

Porównanie wyników uzyskanych metodami graficzną, analityczną i metodą symulacji komputerowej zawiera tabl. 9.3.

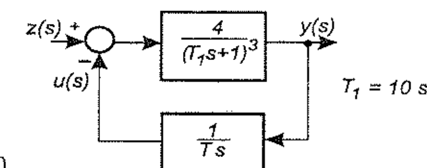
Tablica 9.3

**Wyniki obliczeń**

| | Metoda graficzna | Metoda analityczna | Metoda symulacji |
|---|---|---|---|
| $\Delta L$ [dB] | 12 | 13,8 | 14,3 |
| $k_p$ | 4,5 | 4,1 | 4,68 |

**Przykład 9.10**

Wyznaczyć wartość stałej czasowej $T$ elementu całkującego, przy której układ o schemacie przedstawionym na rys. 9.21 będzie stabilny z zapasem modułu $\Delta L=6$ dB, oraz określić zapas fazy $\Delta\varphi$ układu dla wyznaczonej wartości stałej $T$. Stała czasowa $T_1=10$ s.




Rys. 9.21. Schemat blokowy układu do przykładu 9.10

*Rozwiązanie*

Zadanie zostanie rozwiązane trzema metodami:

1) metodą graficzną, z wykorzystaniem asymptotycznych charakterystyk częstotliwościowych;

2) metodą analityczną, z uwzględnieniem rzeczywistych charakterystyk częstotliwościowych poszczególnych elementów układu;

3) metodą symulacji komputerowej w środowisku MATLAB.

**METODA GRAFICZNA**

Układ otwarty potraktujemy jako szeregowe połączenie trzech elementów: inercyjnego trzeciego rzędu, proporcjonalnego i całkującego:

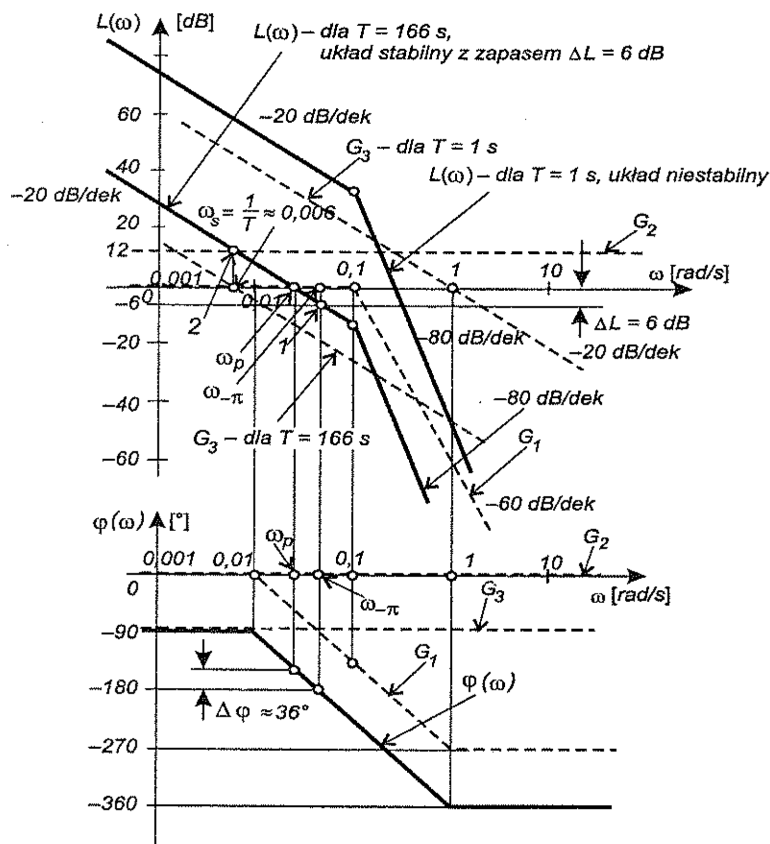
$$G_0(s)=\frac{4}{(10s+1)^3}\,\frac{1}{Ts}=G_1(s)\,G_2(s)\,G_3(s)$$

gdzie:

$$G_1(s) = \frac{1}{(10s+1)^3}, \quad G_2(s) = 4, \quad G_3(s) = \frac{1}{Ts}$$

Równanie charakterystyczne układu otwartego nie ma pierwiastków dodatnich, zatem do badania stabilności można zastosować uproszczone kryterium Nyquista.

Przyjmując wstępnie wartość poszukiwanej stałej czasowej $T = 1$ s, wykreślono (rys. 9.22) asymptotyczne logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe elementów składowych układu otwartego (linie przerywane) i charakterystyki całego układu otwartego (pogrubione linie ciągłe), jako wynik zsumowania charakterystyk elementów składowych.




Rys. 9.22. Asymptotyczne logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego do przykładu 9.10



Należy zauważyć, że charakterystyka fazowa układu nie zależy od wartości stałej czasowej elementu całkującego. Zatem, umożliwia ona odczytanie wartości pulsacji $\omega_{-\pi}$, niezbędnej do określenia zapasu modułu. Charakterystyka amplitudowa układu otwartego, wykreślona przy założeniu $T = 1$ s, ma dla pulsacji $\omega_{-\pi}$ wartość dodatnią; układ zamknięty z członem całkującym o takiej stałej czasowej byłby niestabilny. Aby układ był stabilny z zapasem modułu 6 dB, charakterystyka amplitudowa układu otwartego przy pulsacji $\omega_{-\pi}$ powinna mieć wartość –6 dB (przechodzić przez punkt 1 na rys. 9.22). Ponieważ zmiany stałej czasowej członu całkującego powodują przemieszczanie tylko w pionie wypadkowej charakterystyki amplitudowej, pożądany przebieg wypadkowej charakterystyki amplitudowej otrzymuje się, obniżając początkowo wykreśloną charakterystykę tak, żeby przechodziła przez punkt 1. Ta pożądana charakterystyka amplitudowa w punkcie 2 ma wartość 12 dB, wnoszoną tylko przez człon proporcjonalny $G_2$.

Zatem, dla pulsacji odpowiadającej punktowi 2, suma modułów logarytmicznych pozostałych elementów układu powinna być równa zeru. Ponieważ przy tej pulsacji moduł logarytmiczny członu inercyjnego $G_1$ jest równy zeru, to również wartość zero powinien mieć moduł logarytmiczny elementu całkującego $G_3$. Zatem, pulsacja odpowiadająca punktowi 2 jest pulsacją sprzęgającą $\omega_s = 1/T$ członu całkującego o wartości stałej czasowej $T$, zapewniającej uzyskanie pożądanego zapasu modułu. Z wykresu odczytujemy $\omega_s \approx 0{,}006$ rad/s, zatem poszukiwana wartość stałej czasowej członu całkującego wynosi $T = 1/\omega_s = 1/0{,}006 \approx 166$ s.

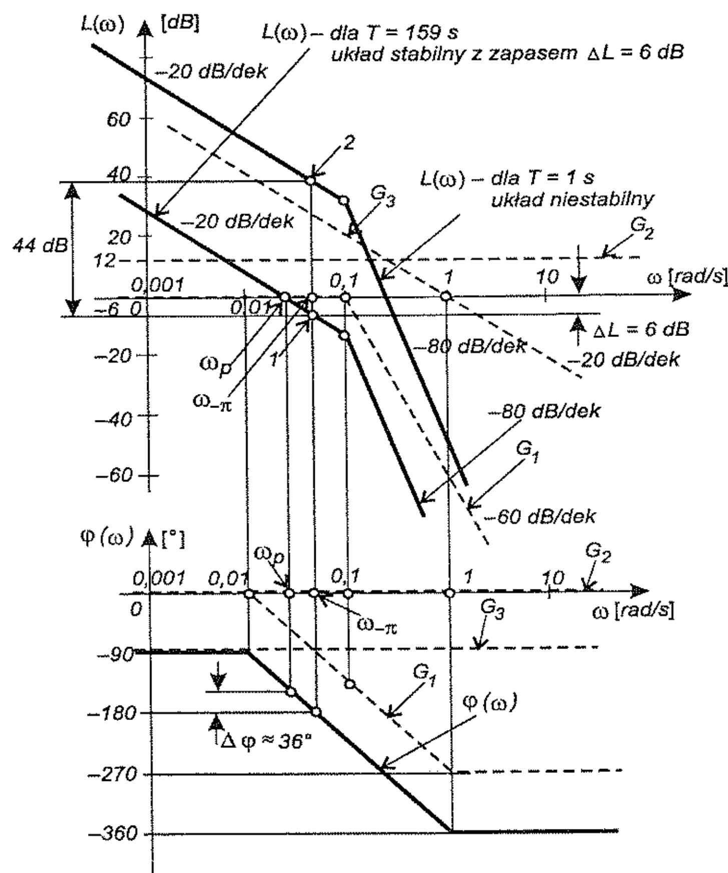
Wartość zapasu fazy odczytana jako różnica między przesunięciem fazowym układu przy pulsacji $\omega_p$ (wyznaczonej przez przecięcie charakterystyki amplitudowej z osią pulsacji) a przesunięciem fazowym równym –180° wynosi $\Delta\varphi \approx 36°$.

Poszukiwaną wartość stałej czasowej $T$ członu całkującego można uzyskać także w wyniku innego procesu rozumowania. Z powyższych rozważań wiadomo, że charakterystykę amplitudową układu otwartego wyznaczoną przy założeniu wartości stałej czasowej członu całkującego $T = 1$ s, należy obniżyć tak, aby przy pulsacji $\omega_{-\pi}$ miała wartość –6 dB (aby przechodziła przez punkt 1). Na rys. 9.23 pokazano, że wymaga to obniżenia charakterystyki amplitudowej o około 44 dB, co wymaga wprowadzenia do układu dodatkowego członu proporcjonalnego o module logarytmicznym $L(\omega) = -44$ dB, czyli o wzmocnieniu $k \approx 0{,}00631$.

Transmitancję układu otwartego, spełniającego założone wymaganie dotyczące zapasu amplitudy, można przedstawić w postaci

$$G_0(s) = \frac{4}{(10s+1)^3}\frac{1}{s}0{,}00631 = \frac{4}{(10s+1)^3}\frac{1}{158{,}5\,s}$$

Wprowadzenie dodatkowego wzmocnienia $k \approx 0{,}00631$ jest więc równoważne zmianie stałej czasowej członu całkującego z $T = 1$ s na $T = 159$ s.




Rys. 9.23. Charakterystyki częstotliwościowe do przykładu 9.10

Wartości stałej czasowej $T$ członu całkującego wyznaczone dwoma sposobami są zatem zbliżone. Różnice w wynikach są konsekwencją przyjętej metody graficznej i związanymi z nią błędami odczytu. W pierwszym przypadku wartość stałej czasowej $T$ jest wyznaczana na podstawie odczytu wartości pulsacji $\omega_s$ ze skali logarytmicznej, w drugim – na podstawie wartości modułu logarytmicznego ze skali liniowej.



METODA ANALITYCZNA

Podobnie jak poprzednio, poszukujemy wartości pulsacji $\omega_{-\pi}$, niezbędnej do określenia zapasu modułu; wyznaczamy ją z równania $\varphi(\omega) = -\pi$.

Charakterystyka fazowa układu otwartego jest sumą charakterystyk trzech elementów

$$\varphi(\omega) = -3\,\mathrm{arctg}\,10\omega + 0 - \frac{\pi}{2}$$

a więc

$$\varphi(\omega_{-\pi}) = -3\,\mathrm{arctg}\,10\omega_{-\pi} - 0 - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

skąd $\omega_{-\pi} = 0{,}05773$ rad/s.

Aby układ zamknięty był stabilny z zapasem modułu $\Delta L = 6$ dB, charakterystyka amplitudowa przy pulsacji $\omega_{-\pi}$ musi osiągać wartość –6 dB. Wartość stałej czasowej $T$ elementu całkującego, zapewniającą spełnienie powyższego warunku, można wyznaczyć z warunku $L(\omega_{-\pi}) = -6$ dB. Równanie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej układu otwartego ma postać

$$L(\omega) = -20\lg\left(\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}\right)^3 + 20\lg 4 - 20\lg T\omega$$

Zatem z równania

$$-20\lg\left(\sqrt{T_1^2\omega_{-\pi}^2 + 1}\right)^3 + 20\lg 4 - 20\lg T\omega_{-\pi} = -6$$

otrzymuje się poszukiwaną wartość stałej czasowej elementu całkującego $T \approx 89{,}8$ s.

Aby wyznaczyć zapas fazy układu z elementem całkującym o stałej czasowej $T = 89{,}8$ s, należy obliczyć wartość pulsacji $\omega_p$, przy której $L(\omega) = 0$. Zatem, z równania

$$L(\omega_p) = -20\lg\left(\sqrt{T_1^2\omega_p^2 + 1}\right)^3 + 20\lg 4 - 20\lg T\omega_p = 0$$

$$-20\lg\left(\sqrt{10^2\omega_p{}^2 + 1}\right)^3 + 20\lg 4 - 20\lg 89{,}78\,\omega_p = 0$$

otrzymuje się $\omega_p = 0{,}0368$ rad/s (spełniony jest warunek stabilności $\omega_p < \omega_{-\pi}$).

Zapas fazy obliczamy, korzystając ze wzoru (9.30)

$$\Delta\varphi = \varphi(\omega_p) + \pi = \left[ -3\mathrm{arctg}(10 \cdot 0{,}0368) + 0 - \frac{\pi}{2} \right] + \pi \approx 29{,}4°$$

Wartość stałej czasowej $T = 89{,}8$ s członu całkującego, wyznaczona metodą analityczną na podstawie rzeczywistych charakterystyk częstotliwościowych elementów układu, zapewnia układowi regulacji wymagany zapas modułu $\Delta L = 6$ dB i zapas fazy $\Delta\varphi \approx 29{,}4°$. Natomiast wyznaczona metodą graficzną na podstawie charakterystyk asymptotycznych wartość $T = 166$ s w rzeczywistości zapewnia układowi nieco większe zapasy stabilności $\Delta L \approx 11{,}3$ dB i $\Delta\varphi \approx 48{,}9°$, co może być zaletą w przypadku wystąpienia zmian parametrów układu np. w wyniku zużycia zespołów układu rzeczywistego czy zmiany punktu pracy.

**METODA SYMULACJI KOMPUTEROWEJ**

Przyjmując wstępnie wartość stałej czasowej członu całkującego, np. $T = 10$ s, transmitancję operatorową rozważanego układu otwartego zapisujemy w postaci:

$$G_0(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

gdzie:

$L(s) = 4$,

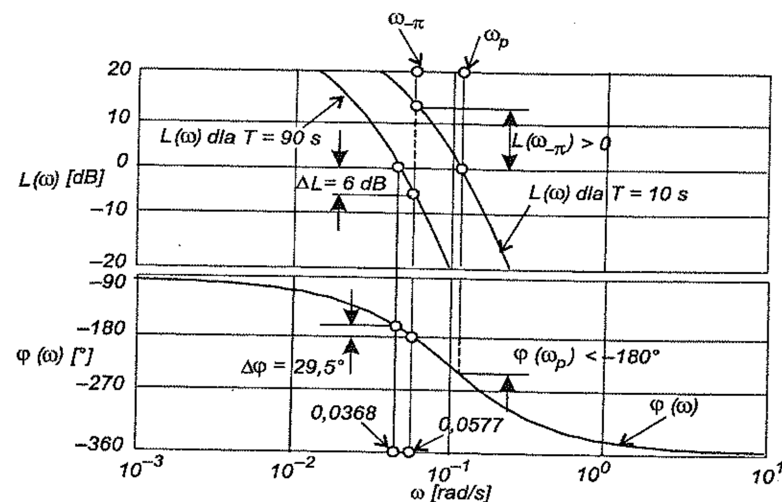
$M(s) = (100s^2 + 20s + 1)(10s + 1) \cdot 10s = a(s)\, b(s)\, c(s)$.

Wykorzystując funkcję $MARGIN(L,M)$ z pakietu MATLAB, w wyniku wykonania poniższych instrukcji

```
L=[4];
a=[100,20,1];
b=[10,1];
c=[10,0];
M=conv(conv(a,b),c);
MARGIN(L,M)
```

otrzymuje się logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową układu otwartego z zaznaczonymi i wyliczonymi przez program zapasami stabilności (rys. 9.24). Jak widać, stała czasowa $T = 10$ s nie zapewnia stabilności układu zamkniętego. Należy zatem zwiększać wartość stałej $T$ tak, aby osiągnąć stabilność z pożądanym zapasem modułu. Zapas modułu $\Delta L = 6$ dB uzyskuje się po wprowadzeniu do programu wartości stałej czasowej $T = 90$ s i wówczas obliczony przez program zapas fazy wynosi $\Delta\varphi = 29{,}5°$.






Rys. 9.24. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego do przykładu 9.10 otrzymane metodą symulacji komputerowej

Porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami podano w tabl. 9.4.

Tablica 9.4

**Porównanie wyników obliczeń**

| | Metoda graficzna | Metoda analityczna | Metoda symulacji komputerowej |
|---|---|---|---|
| $T$ [s] | 166 | 89,8 | 90 |
| $\Delta L$ [dB] | 11,3 | 6 | 6 |
| $\Delta\varphi$ [°] | 48,9 | 29,4 | 29,5 |

## Ćwiczenie 9.4

Wyznaczyć wzmocnienie $k_p$ regulatora P, przy którym układ regulacji z obiektem astatycznym o transmitancji $G_{ob}(s) = \dfrac{10}{s(0{,}1s + 1)(0{,}01s + 1)}$ będzie stabilny z zapasem fazy $\Delta\varphi = 30°$.

Odp.: $k_p = 2{,}4$.

**Ćwiczenie 9.5**

Transmitancja układu otwartego ma postać

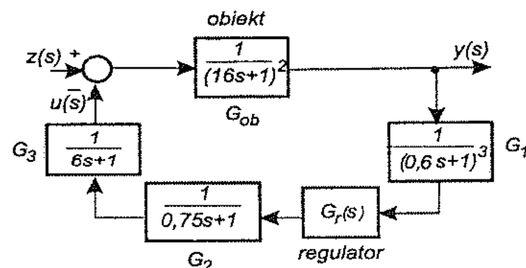
$$G_0(s)=\frac{100k}{(0{,}1s+1)^2(0{,}01s+1)}$$

Wyznaczyć wartość współczynnika $k$, przy której układ zamknięty będzie stabilny z zapasem modułu $\Delta L = 6$ dB.

Odp.: $k = 0{,}05$.

## 9.4. ANALIZA WPŁYWU ALGORYTMU REGULATORA I JEGO NASTAW NA STABILNOŚĆ UKŁADU REGULACJI

Analiza wpływu algorytmu regulatora i jego nastaw na stabilność układu regulacji zostanie przeprowadzona na przykładzie układu regulacji ze statycznym, inercyjnym drugiego rzędu obiektem regulacji $G_{ob}$, z przetwornikiem pomiarowym $G_1$, zespołem wykonawczym złożonym z elementów $G_2$ i $G_3$ oraz z regulatorem o transmitancji $G_r(s)$ – rys. 9.25. Zostaną rozpatrzone właściwości układu w przypadku zastosowania regulatorów o algorytmach P, PD (idealnym) oraz PI.



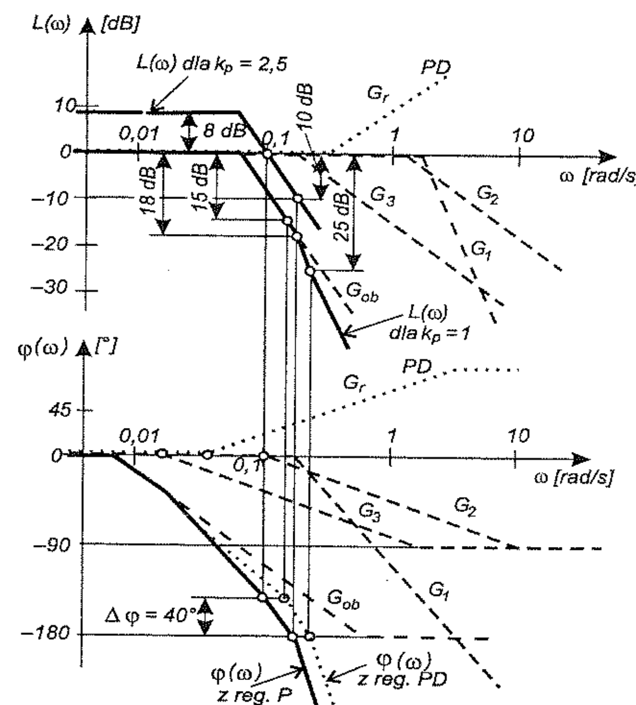

Rys. 9.25. Schemat blokowy przykładowego układu regulacji

**Przypadek 1. Układ z regulatorem P o transmitancji $G_r(s) = k_p$**

Rozpatrzmy wpływ wzmocnienia regulatora na przebieg charakterystyk logarytmicznych układu otwartego.



Na rys. 9.26 liniami przerywanymi wykreślono charakterystyki logarytmiczne elementów $G_1$, $G_2$, $G_3$ i obiektu regulacji $G_{ob}$, pogrubionymi liniami ciągłymi – charakterystyki układu otwartego dla $k_p = 1$ i $k_p = 2{,}5$.




Rys. 9.26. Charakterystyki logarytmiczne układu otwartego z regulatorami P i PD

Zapas modułu układu przy $k_p = 1$ wynosi $\Delta L \approx 18$ dB. Jest to zapas za duży (zalecane wartości zapasów stabilności: $6\,\text{dB} \le \Delta L \le 12\,\text{dB}$ oraz $30° \le \Delta\varphi \le 60°$), gdyż przebiegi przejściowe w takim układzie nie będą zadowalające. Aby zapewnić zapas modułu $\Delta L = 6$ dB, należałoby charakterystykę amplitudową układu otwartego przesunąć do góry o 12 dB, co oznaczałoby, że należy zastosować regulator o wzmocnieniu takim, że $20\lg k_p = 12$ dB, a więc $k_p = 4$. Jednakże przy $k_p = 4$ zapas fazy osiąga zbyt małą wartość $\Delta\varphi \approx 25°$. Aby uzyskać zapas fazy np. $\Delta\varphi = 40°$, należy podnieść pierwotną charakterystykę amplitudową tylko o 8 dB. Należy więc przyjąć ostatecznie, że $20\lg k_p = 8$, czyli właściwą wartością wzmocnienia regulatora jest $k_p \approx 2{,}5$. Przy takim wzmocnieniu regulatora, zapas modułu układu wynosi $\Delta L = 10$ dB.

Z rysunku wynika także, że o stabilności układu decydują głównie elementy o największych stałych czasowych.

**Przypadek 2. Układ z regulatorem PD o transmitancji $G_r(s) = k_p(1 + T_d s)$**

Rozpatrzmy wpływ algorytmu PD na stabilność układu regulacji.

Na rys. 9.26 linią kropkową wykreślono logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową idealnego regulatora PD dla nastaw $k_p = 1$ i $T_d = 3$ s oraz charakterystykę fazową układu otwartego z tym regulatorem. Dzięki temu, że stała czasowa akcji różniczkowania jest mniejsza niż stała czasowa obiektu regulacji, w zakresie pulsacji mniejszych niż $1/T_d$, istotnym ze względu na ocenę stabilności, wprowadzenie akcji różniczkowania nie zmienia charakterystyki amplitudowej układu otwartego. Natomiast charakterystyka fazowa układu z regulatorem PD osiąga wartość $-180°$ przy wyższej pulsacji niż charakterystyka układu z regulatorem P, dzięki czemu zapas modułu układu z regulatorem PD zwiększył się do wartości $\Delta L \approx 25$ dB.

Z rysunku wynika, że aby uzyskać zapas modułu o wartości 6 dB, należy zastosować wzmocnienie $k_p$ regulatora PD, powodujące przesunięcie w górę charakterystyki amplitudowej o 19 dB; natomiast aby nie zmniejszać zapasu fazy poniżej 40°, należy charakterystykę podnieść jedynie o 15 dB. Ostatecznie, w przypadku zastosowania regulatora PD o stałej czasowej $T_d = 3$ s należy przyjąć, że $20 \lg k_p = 15$, skąd $k_p \approx 5{,}6$. Wprowadzenie akcji różniczkującej pozwoliło więc w tym przypadku na ponaddwukrotne zwiększenie wzmocnienia regulatora, przy zachowaniu takich samych zapasów stabilności ($\Delta L = 10$ dB, $\Delta\varphi = 40°$), co korzystnie wpływa na parametry jakościowe układu regulacji.

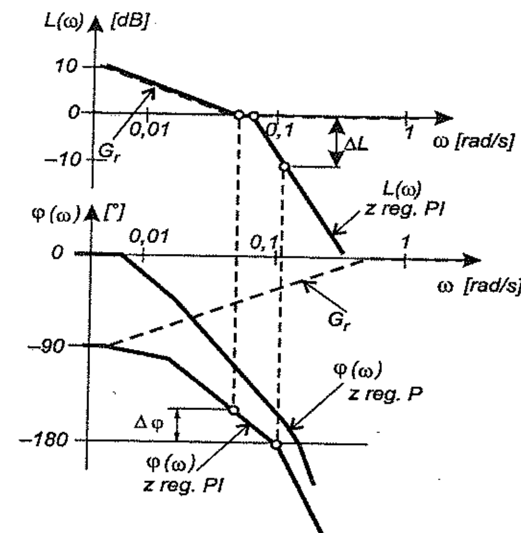
Celowość wprowadzenia działania różniczkującego można ocenić na podstawie przebiegu charakterystyki amplitudowej układu otwartego. Przyjmuje się, że jeżeli $L(\omega_{-\pi}) - L(\omega = 0) < 5$ dB, to wprowadzenie działania różniczkującego jest niecelowe, gdyż pozwala na zbyt małe zwiększenie wzmocnienia. Jeżeli $L(\omega_{-\pi}) - L(\omega = 0)$ zawiera się w granicach 5÷20 dB, to działanie różniczkujące jest pożądane. Przy $L(\omega_{-\pi}) - L(\omega = 0) > 20$ dB, wprowadzenie działania różniczkującego nie jest potrzebne, gdyż samo działanie proporcjonalne jest wystarczająco skuteczne.

**Przypadek 3. Układ z regulatorem PI o transmitancji $G_r(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$**

Jeżeli pomimo wprowadzenia akcji D wzmocnienie układu otwartego jest za małe (ze względu na zbyt duże odchyłki statyczne), to należy zbadać możliwość wykorzystania regulatora PI (akcja całkowania likwiduje odchyłki statyczne).

Na rys. 9.27 przedstawiono wypadkowe (po zsumowaniu charakterystyk składowych) logarytmiczne charakterystyki rozważanego układu otwartego z regulatorem PI o nastawach $k_p = 1$ i stałej czasowej zbliżonej do stałej czasowej obiektu regulacji $T_i = 19$ s.






Rys. 9.27. Charakterystyki logarytmiczne układu otwartego z regulatorem PI

Wprowadzenie akcji całkującej spowodowało obniżenie charakterystyki fazowej i zmniejszenie zapasu fazy (na rysunku $\Delta\varphi \approx 30°$); zapas modułu, dzięki zmniejszeniu wzmocnienia regulatora do wartości 1, właściwie się nie zmienił. Zwiększanie stałej czasowej $T_i$ powoduje przesuwanie się charakterystyk regulatora w lewo i wzrost zapasów stabilności, a także niekorzystne, ze względu na zdolność tłumienia zakłóceń, obniżanie charakterystyki amplitudowej. Zmniejszanie stałej czasowej $T_i$ powoduje przesuwanie się charakterystyk regulatora w prawo, co w efekcie wywołuje zmniejszenie zapasów stabilności i groźbę utraty stabilności.

W rozważanym przykładzie, ze względu na zbyt mały zapas fazy, należy zwiększyć wartość czasu zdwojenia $T_i$ regulatora, co spowoduje także zwiększenie zapasów stabilności, ale jednocześnie – rozszerzenie pasma pulsacji, w którym $L(\omega) = 0$, niepożądanego ze względu na małą efektywność tłumienia zakłóceń. Likwidację tego pasma można osiągnąć, zwiększając wzmocnienie $k_p$ z ograniczeniem wynikającym z niezbędnej wartości zapasu modułu. Jak wynika z analizy dotyczącej regulatora PD, w niektórych przypadkach osiągnięcie pożądanego wzmocnienia staje się możliwe dzięki wprowadzeniu także działania różniczkującego.

Na podstawie powyższych rozważań można sformułować szereg ogólnych wniosków dotyczących wpływu poszczególnych parametrów regulatora na sta-

bilność układu regulacji (wpływ tych parametrów na jakość regulacji jest przedmiotem analiz w rozdz. 10 i 11).

1. Zwiększenie wzmocnienia $k_p$ regulatora powoduje zwiększenie wzmocnienia układu otwartego, co wpływa niekorzystnie na stabilność (charakterystyka amplitudowa przesuwa się do góry przy niezmienionej charakterystyce fazowej).
2. Wpływ działania całkującego na stabilność układu jest w większości przypadków niekorzystny, zwłaszcza przy małych wartościach stałej czasowej $T_i$. Działanie całkujące wnosi stałe ujemne, równe –90°, przesunięcie fazowe i jednocześnie zwiększa wzmocnienie układu otwartego dla pulsacji $\omega < 1/T_i$. Duże wartości stałej $T_i$ zapewniają stabilną pracę układu.
3. Działanie różniczkujące ma korzystny wpływ na stabilność układu. Jest to jedna z głównych przyczyn wprowadzenia działania D do regulatorów przemysłowych. Działanie różniczkujące w zakresie pulsacji $\omega < 1/T_d$ nie zmienia charakterystyki amplitudowej układu otwartego; wprowadzając dodatnie przesunięcie fazowe w tym zakresie, umożliwia zwiększenie wzmocnienia układu otwartego. Korzystnie na stabilność wpływa akcja różniczkowania z czasem wyprzedzenia mniejszym niż stała czasowa obiektu regulacji.

Ostatecznie należy sformułować podstawowy wniosek: małe wartości $k_p$, duże wartości $T_i$ oraz małe wartości $T_d$ wpływają stabilizująco na układ regulacji.

## 9.5. PORÓWNANIE KRYTERIÓW STABILNOŚCI

Kryteria stabilności różnią się pod względem swej użyteczności.

Za pomocą kryterium Hurwitza można sprawdzać stabilność układów o dowolnej strukturze, ale tylko wtedy, kiedy znana jest transmitancja układu w postaci algebraicznej. Kryterium to umożliwia wyznaczanie zakresów zmienności poszczególnych współczynników równania charakterystycznego układu, a więc i parametrów elementów tworzących układ i zapewniających jego stabilność.

Wadą kryterium jest brak możliwości doboru parametrów układu zapewniających stabilną pracę z określonym zapasem stabilności. Kryterium Hurwitza teoretycznie nie można stosować do badania układów zawierających elementy opóźniające – nie można przedstawić transmitancji członu opóźniającego w postaci wielomianu o skończonej liczbie miejsc zerowych ani w postaci ilorazu takich wielomianów. W praktyce wykorzystuje się przybliżenie transmitancji członu opóźniającego w postaci aproksymacji Pade'go

$$e^{-sT_0} \approx \frac{1 - \frac{T_0}{2}s}{1 + \frac{T_0}{2}s} \tag{9.32}$$

Kryterium Nyquista umożliwia badanie stabilności tylko układów zamkniętych z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, co z punktu widzenia automatyki nie jest istotnym ograniczeniem, gdyż każdy układ regulacji jest obwodem z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Stabilność układu zamkniętego może być oceniana zarówno na podstawie matematycznego opisu układu otwartego w postaci algebraicznej (np. w postaci transmitancji układu otwartego), jak i wyznaczonych eksperymentalnie charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego, co eliminuje potrzebę znajomości matematycznego opisu poszczególnych elementów układu.

Kryterium Nyquista umożliwia nie tylko sprawdzanie stabilności oraz wyznaczanie zapasów stabilności, ale także pozwala na dokładną analizę wpływu poszczególnych parametrów elementów składowych na stabilność układu. Dla projektanta układu regulacji kryterium to jest narzędziem, dzięki któremu projektant może kształtować właściwości układu przez dobór określonych wartości parametrów lub przez wprowadzanie do układu dodatkowych elementów korekcyjnych. Kryterium Nyquista można stosować także do układów zawierających elementy opóźniające bez konieczności aproksymacji ich charakterystyk, a także do układów nieliniowych z jednym elementem nieliniowym o symetrycznej charakterystyce statycznej.

# 10. JAKOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

Zadaniem układu automatycznej regulacji jest działanie zmierzające do eliminacji lub zmniejszenia odchyłek regulacji wywołanych oddziaływaniem na układ zakłóceń lub powstających w wyniku zmian wartości zadanej. Jak wykazano w rozdziale poprzednim, działanie takie realizować mogą tylko układy stabilne asymptotycznie. Układ stabilny asymptotycznie, po ustaniu oddziaływania wytrącającego go ze stanu równowagi, wraca do początkowego stanu równowagi. Jednakże nawet układ stabilny asymptotycznie może okazać się nieużyteczny, jeżeli np. czas osiągania stanu równowagi byłby bardzo długi lub stan równowagi był osiągany po wykonaniu wielu wahań wielkości regulowanej o znacznej amplitudzie. Dlatego, oprócz wymagania stabilności asymptotycznej, układom regulacji stawiane są dodatkowe wymagania związane z zachowaniem układu w stanach przejściowych (dynamicznych) i stanach ustalonych, określane ogólnie jako wymagania dotyczące **jakości układu regulacji**.

Wymagania odnoszące się do przebiegu procesów przejściowych w układach regulacji określane są za pomocą szeregu wskaźników, nazywanych ogólnie **kryteriami (wskaźnikami) jakości dynamicznej** układu regulacji.

Wymagania dotyczące stanów ustalonych formułuje się przez określenie tzw. **dokładności statycznej** układu regulacji – dopuszczalnych wartości odchyłek regulacji w stanach ustalonych.

Dalsze rozważania dotyczące jakości układów i wyprowadzone zależności odnoszą się tylko do układów regulacji stabilnych asymptotycznie.

W rzeczywistym układzie regulacji odchyłka regulacji $e(t)$ w danej chwili $t$ może być sumą dwóch składowych:

1) odchyłki $e_z(t)$ wywołanej przez zakłócenia – **odchyłki zakłóceniowej**,
2) odchyłki $e_w(t)$ powstałej w wyniku zmiany wartości zadanej (wywołanej przez wymuszenie) – **odchyłki nadążania**.

Zatem

$$e(t) = e_z(t) + e_w(t) \tag{10.1}$$



Przy ocenie jakości układu regulacji analizuje się oddzielnie obydwa składniki odchyłki regulacji.

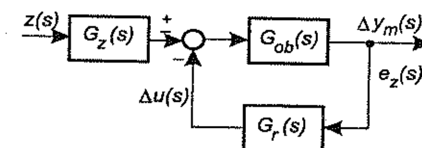
Do wyznaczenia odchyłek regulacji $e_z(t)$ i $e_w(t)$ zostaną wykorzystane schematy blokowe układów regulacji wg rys. 8.2.

Wyznaczmy przebieg **odchyłki zakłóceniowej** $e_z(t)$, wywołany pojawieniem się zakłócenia $z(t)$ przy założeniu, że $w = \text{const}$, przyjmując jako początkowy stan układu $z = 0$, $y_{m0} = w$, co oznacza, że w stanie początkowym odchyłka $e = y_{m0} - w = 0$. Pojawienie się zakłócenia $z(t)$ wywołuje zmiany $\Delta y_m(t)$ wielkości regulowanej względem wartości początkowej $y_{m0}$ i tworzenie się odchyłki regulacji $e_z(t)$:

$$e_z(t) = [y_{m0} + \Delta y_m(t)] - w = \Delta y_m(t) \tag{10.2}$$

W tym przypadku odchyłkę regulacji stanowią zmiany wielkości regulowanej względem wartości początkowej.

Rozważając wpływ zakłócenia na odchyłkę regulacji przy $w = \text{const}$, można schemat układu regulacji z rys. 8.2a uprościć do postaci przedstawionej na rys. 10.1.




Rys. 10.1. Schemat blokowy układu regulacji do wyznaczania odchyłki zakłóceniowej

Na podstawie rys. 10.1 można napisać

$$e_z(s) = \Delta y_m(s) = \frac{\pm G_z(s)\,G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)\,G_r(s)}\,z(s) \tag{10.3}$$

Wykonując odwrotne przekształcenie Laplace'a transformaty $e_z(s)$, można wyznaczyć funkcję $e_z(t)$:

$$e_z(t) = L^{-1}\left[\frac{\pm G_z(s)\,G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)\,G_r(s)}\,z(s)\right] \tag{10.4}$$

Stosunek $e_z(s)/z(s)$, wyznaczony przy zerowych warunkach początkowych, nazywany jest **transmitancją odchyłkową układu względem zakłócenia** $G_{ez}(s)$

$$G_{ez}(s) = \frac{e_z(s)}{z(s)} = \frac{\pm G_z(s)\,G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)\,G_r(s)} \tag{10.5}$$

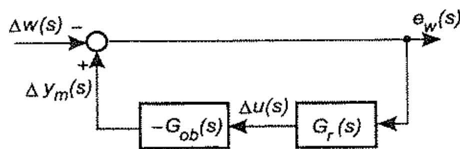
Wyznaczmy przebieg **odchyłki nadążania** $e_w(t)$ (przy założeniu, że zakłócenie $z = 0 = \text{const}$), spowodowany wprowadzeniem zmiany wartości zadanej $\Delta w(t)$, przyjmując jako początkowy stan układu $y_{m0} = w_0$, co oznacza, że w stanie początkowym odchyłka

$$e = y_{m0} - w_0 = 0$$

Wprowadzenie zmiany wartości zadanej $\Delta w(t)$ powoduje powstanie odchyłki regulacji $e_w(t)$ i zmian wielkości regulowanej $\Delta y_m(t)$ względem wartości początkowej, prowadzących do osiągnięcia przez wielkość regulowaną aktualnej wartości zadanej:

$$e_w(t) = [y_{m0} + \Delta y_m(t)] - [w_0 + \Delta w(t)] = \Delta y_m(t) - \Delta w(t) \tag{10.6}$$

Traktując jako wielkość wyjściową układu sygnał odchyłki regulacji i zakładając, że $z = 0 = \text{const}$, schemat układu wg rys. 8.2a można przedstawić w postaci przedstawionej na rys. 10.2.




Rys. 10.2. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej do wyznaczania odchyłki nadążania (na podstawie rys. 8.2a)

Transmitancja układu przedstawionego na rys. 10.2 nazywa się **transmitancją odchyłkową układu względem wartości zadanej** $G_{ew}(s)$

$$G_{ew}(s) = \frac{e_w(s)}{\Delta w(s)} = \frac{-1}{1 + G_{\text{ob}}(s)\, G_r(s)} \tag{10.7}$$

Przebieg odchyłki nadążania $e_w(t)$, kształtujący się w wyniku wprowadzenia zmian wartości zadanej $\Delta w(t)$, przy zerowych warunkach początkowych, można wyznaczyć ze wzoru

$$e_w(t) = L^{-1}[G_{ew}(s)\, \Delta w(s)] = L^{-1}\left[\frac{-1}{1 + G_{\text{ob}}(s)\, G_r(s)} \Delta w(s)\right] \tag{10.8}$$



## 10.1. DOKŁADNOŚĆ STATYCZNA

Dokładność statyczną układu regulacji określają występujące w stanach ustalonych różnice między wielkością regulowaną a wartością zadaną, zwane **odchyłkami statycznymi**.

Wartości statycznych odchyłek regulacji – **statycznej odchyłki zakłóceniowej** $e_{z\,\text{st}}$ i **statycznej odchyłki nadążania** $e_{w\,\text{st}}$ – wyznaczyć można na podstawie wzorów (10.3) i (10.7), korzystając z twierdzenia (2.13) o wartości końcowej:

$$e_{z\,\text{st}} = \lim_{t\to\infty} e_z(t) = \lim_{s\to 0} s\, e_z(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{\pm G_z(s)\, G_{\text{ob}}(s)}{1 + G_{\text{ob}}(s)\, G_r(s)} z(s) \tag{10.9}$$

oraz

$$e_{w\,\text{st}} = \lim_{t\to\infty} e_w(t) = \lim_{s\to 0} s\, e_w(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{-1}{1 + G_{\text{ob}}(s)\, G_r(s)} \Delta w(s) \tag{10.10}$$

Wzory (10.9) i (10.10) umożliwiają przeprowadzenie oceny wpływu parametrów obiektu i regulatora na wartość odchyłek statycznych. Można je stosować, jeżeli wcześniej stwierdzono asymptotyczną stabilność układu.

W przypadku układów regulacji stałowartościowej wymagania dotyczące dokładności statycznej ogranicza się zwykle do określenia dopuszczalnych bezwzględnych wartości odchyłek statycznych dla zakłóceń lub wymuszeń o stałej wartości. Formułowane są one w postaci wartości odchyłek statycznych, wyrażonych w jednostkach wielkości regulowanej lub, częściej, w procentach:

- w przypadku odchyłki zakłóceniowej – stosunek maksymalnej bezwzględnej wartości odchyłki $e_{z\,\text{st}}$ do maksymalnej wartości $y_m$

$$\frac{|e_{z\,\text{st}}|}{y_{m\,\text{max}}} 100\ [\%] \le 2\% \ \text{lub}\ 5\% \tag{10.11}$$

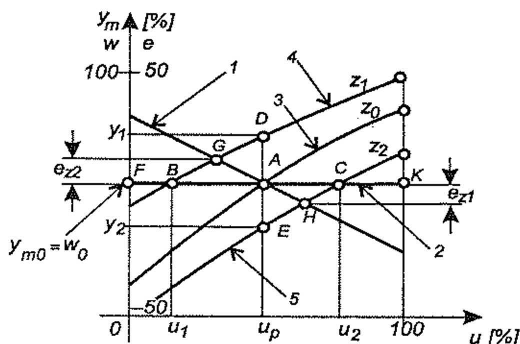
- w przypadku odchyłki nadążania – stosunek maksymalnej bezwzględnej wartości odchyłki $e_{w\,\text{st}}$ do maksymalnej wartości zadanej

$$\frac{|e_{w\,\text{st}}|}{w_{\text{max}}} 100\ [\%] \le 2\% \ \text{lub}\ 5\% \tag{10.12}$$

W przypadku układów nadążnych, w zależności od potrzeby, wymagania dotyczące dokładności statycznej mogą obejmować także odchyłki statyczne występujące podczas oddziaływań liniowo narastających i innych.

Odchyłki statyczne układu regulacji określić można także na podstawie zdjętych doświadczalnie charakterystyk statycznych obiektu regulacji, uwzględnia-

jących wpływ zakłóceń $z$ i sygnału sterującego $u$. Na rys. 10.3 przedstawiono przykładowe charakterystyki statyczne $y_m(u)$ obiektu statycznego w przypadku zakłócenia o wartości nominalnej $z_0$, maksymalnej $z_1 = z_0 + \Delta z$ i minimalnej $z_1 = z_0 - \Delta z$ (linie 3, 4, 5) oraz charakterystyki statyczne regulatorów o algorytmie P lub PD – linia 1 i o algorytmie PI lub PID – linia 2. Jak wynika z przebiegu charakterystyk statycznych analizowanego obiektu, na wzrost sygnału sterującego $u$ reaguje on wzrostem wartości wielkości regulowanej; jest to więc obiekt wymagający zastosowania regulatora o działaniu odwrotnym.




Rys. 10.3. Charakterystyki statyczne układu regulacji: 1 – charakterystyka $u(e)$ regulatora bez akcji całkowania, 2 – regulatora z akcją całkowania, 3, 4, 5 – charakterystyki $y_m(u)$ statycznego obiektu regulacji odpowiednio dla zakłócenia o wartości $z_0$, $z_1$ i $z_2$

Załóżmy, że przy zakłóceniu $z_0$ obiekt znajduje się w stanie ustalonym w wymaganym punkcie pracy (punkt $A$), w którym zapewnienie zerowej odchyłki regulacji $e = y_{m0} - w_0$ wymaga sterowania o wartości $u_p$. Gdyby pojawiło się zakłócenie o wartości $z_1$, wielkość regulowana przy sygnale sterującym $u_p$ osiągnęłaby wartość $y_1$ (punkt $D$), różniącą się znacznie od wartości zadanej $w_0$. Zapewnienie zerowej odchyłki regulacji wymagałoby zmiany sygnału sterującego z wartości $u_p$ na $u_1$. Podobnie przy zakłóceniu $z_2$ i sygnale sterującym $u_p$, wielkość regulowana osiągnęłaby wartość $y_2$ (punkt $E$). Zapewnienie zerowej odchyłki regulacji wymagałoby zmiany sygnału sterującego z wartości $u_p$ na $u_2$.

Warunkiem utrzymania zerowej odchyłki statycznej, tj. $e = y_{m0} - w_0 = 0$, przy zmianach zakłóceń od $z_1$ do $z_2$, jest zastosowanie regulatora osiągającego stan ustalony tylko przy $e = 0$, a więc o charakterystyce statycznej przechodzącej przez punkty $B$, $A$, $C$. Taką charakterystykę statyczną mają regulatory z akcją całkowania – o algorytmie I, PI lub PID. Można zauważyć, że aby regulator mógł zapewnić uzyskanie w stanach ustalonych zerowej odchyłki regulacji przy zmianach wartości zakłócenia w zakresie od $z_1$ do $z_2$, punkty $B$ i $C$ przecięcia charakterystyki statycznej regulatora ze skrajnymi charakterystykami obiektu regulacji powinny znajdować się w zakresie zmienności sygnału sterowania $u$. W przeciwnym przypadku regulator będzie zapewniał zerową odchyłkę statyczną tylko w części zakresu zmian wartości zakłócenia.

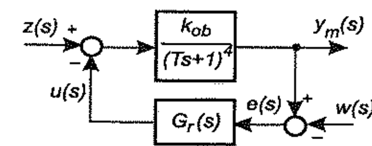


W przypadku zastosowania regulatora o algorytmie P lub PD o działaniu odwrotnym, jego charakterystyka statyczna (linia prosta o równaniu $u = -k_p\, e + u_p$) będzie przecinać charakterystyki statyczne 4, 3 i 5 obiektu w punktach $G$, $A$, $H$. Punkty te odpowiadają stanom ustalonym układu przy zakłóceniach, odpowiednio, $z_1$, $z_0$ i $z_2$, a więc w układzie z regulatorem P lub PD, przy zakłóceniu o wartości innej niż $z_0$, wystąpi odchyłka statyczna, osiągająca przy granicznych wartościach zakłócenia wartości $e_{z1}$ i $e_{z2}$. Zmniejszenie wartości odchyłek statycznych można uzyskać, zwiększając (jeżeli pozwalają na to warunki stabilności) wzmocnienie $k_p$ regulatora. Powoduje to zmianę nachylenia charakterystyki statycznej 1 regulatora i zbliżenie punktów $G$ i $H$ do linii $FBACK$.

Wnioski z przeprowadzonej analizy działania układu regulacji zostaną potwierdzone analitycznie w przykładzie 10.1.

### Przykład 10.1

Przyjmując jako stan początkowy układu stan ustalony przy $z = 0$ i $e = 0$, wyznaczyć odchyłki statyczne w układzie pokazanym na rys. 10.4, wywołane zakłóceniem $z(t) = 2 \cdot 1(t)$ oraz zmianą wartości zadanej $\Delta w(t) = 5 \cdot 1(t)$, w przypadku zastosowania: a) regulatora P, b) regulatora PD, c) regulatora PI.




Rys. 10.4. Schemat blokowy do przykładu 10.1

*Rozwiązanie*

Porównując rozważany układ ze schematem na rys. 8.2a, można stwierdzić, że

$$G_z(s) = 1, \qquad G_{\text{ob}}(s) = \frac{k_{\text{ob}}}{(Ts+1)^4}$$

W przypadku a) transmitancja regulatora ma postać

$$G_r(s) = k_p$$

Wykorzystując wzór (10.9), otrzymuje się odchyłkę statyczną wywołaną zakłóceniem $z(t) = 2 \cdot 1(t)$

$$e_{z\,\text{st}} = \lim_{s \to 0} s \frac{\dfrac{k_{\text{ob}}}{(Ts+1)^4}}{1 + \dfrac{k_{\text{ob}}}{(Ts+1)^4} k_p} \frac{2}{s} = \frac{2k_{\text{ob}}}{1 + k_{\text{ob}} k_p}$$

Wykorzystując wzór (10.10), otrzymuje się odchyłkę statyczną wywołaną zmianą wartości zadanej $\Delta w(t) = 5 \cdot 1(t)$

$$e_{w\,st} = \lim_{s \to 0} s \frac{-1}{1 + \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4} k_p} \frac{5}{s} = \frac{-5}{1 + k_{ob} k_p}$$

W przypadku b) transmitancja regulatora ma postać

$$G_r(s) = k_p \left( 1 + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d} s + 1} \right)$$

a więc:
- odchyłka statyczna wywołana zakłóceniem $z(t) = 2 \cdot 1(t)$ jest równa

$$e_{z\,st} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4}}{1 + \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4} k_p \left( 1 + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d} s + 1} \right)} \frac{2}{s} = \frac{2k_{ob}}{1 + k_{ob} k_p}$$

- odchyłka statyczna wywołana zmianą wartości zadanej $\Delta w(t) = 5 \cdot 1(t)$ wynosi

$$e_{w\,st} = \lim_{s \to 0} s \frac{-1}{1 + \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4} k_p \left( 1 + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d} s + 1} \right)} \frac{5}{s} = \frac{-5}{1 + k_{ob} k_p}$$

W przypadku c) transmitancja regulatora ma postać

$$G_r(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$



a więc:
- odchyłka statyczna wywołana zakłóceniem $z(t) = 2 \cdot 1(t)$ jest równa

$$e_{z\,st} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4}}{1 + \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4} k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)} \frac{2}{s} = 0$$

- odchyłka statyczna wywołana zmianą wartości zadanej $\Delta w(t) = 5 \cdot 1(t)$ wynosi

$$e_{w\,st} = \lim_{s \to 0} s \frac{-1}{1 + \frac{k_{ob}}{(Ts+1)^4} k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)} \frac{5}{s} = 0$$

Otrzymane wyniki pozwalają na sformułowanie następujących wniosków.

1. W układzie z obiektem statycznym i regulatorem o algorytmie P lub PD występują niezerowe odchyłki statyczne zarówno zakłóceniowe jak i nadążania, proporcjonalne odpowiednio do wartości zakłócenia lub zmiany wartości zadanej.
2. Zwiększanie wzmocnienia proporcjonalnego regulatora P lub PD zmniejsza wartość odchyłek statycznych. Zmniejszanie odchyłki statycznej przez zwiększanie wzmocnienia jest zwykle ograniczone ze względu na warunki stabilności układu. Układ z regulatorem PD osiąga granicę stabilności przy większym wzmocnieniu regulatora niż w przypadku układu z regulatorem P, co oznacza, że przy tym samym zapasie stabilności wartość odchyłek statycznych z regulatorem PD jest mniejsza niż z regulatorem P.
3. Akcja całkująca regulatora zapewnia uzyskanie zerowych odchyłek statycznych przy stałych wartościach zakłócenia lub zmianie wartości zadanej.

Wykorzystując wzór (10.10), można wykazać, że w układzie z regulatorem P i obiektem regulacji o działaniu całkującym, statyczna odchyłka nadążania także jest równa zeru.

Układy regulacji, w których występują niezerowe odchyłki statyczne wywołane oddziaływaniem zakłóceń lub wymuszeń o stałej wartości, nazywają się **układami statycznymi**. Układy, w których pomimo istnienia zakłóceń lub wymuszeń o stałej wartości występują zerowe odchyłki statyczne, nazywają się **układami astatycznymi pierwszego rzędu**. **Astatycznymi układami drugiego rzędu** nazywają się te układy, które wykazują zerowe odchyłki statyczne także w przypadku istnienia zakłóceń lub wymuszeń zmieniających się w sposób liniowo narastający.

W rzeczywistych układach regulacji, pomimo działania całkującego regulatora, może wystąpić pewna wartość odchyłki statycznej. Wynika to z niedokładności regulatora oraz z niedokładności pozostałego sprzętu automatyki, głównie

przetwornika pomiarowego. Niezerowe odchyłki regulacji w układach astatycznych są powodowane także zjawiskami nieliniowymi, których wpływ pominięto, przyjmując liniowy model układu.

## 10.2. JAKOŚĆ DYNAMICZNA

Wymagania dotyczące dokładności statycznej nie określają sposobu osiągania przez układ stanów ustalonych. Ze względu na rodzaj procesu poddawanego regulacji, może zachodzić potrzeba określenia wymagań dotyczących zmian wielkości regulowanej, takich jak: charakter przebiegu przejściowego, maksymalna wartość odchyłek regulacji, czas, po upływie którego zostanie skompensowany wpływ zakłóceń, czas osiągania zmienionej wartości zadanej, pasmo częstotliwości, w którym zachodzi nadążanie wielkości regulowanej za zadaną z określoną dokładnością i szereg innych. Dlatego w praktyce, w zależności od potrzeby, wykorzystuje się wiele różnych wskaźników oceny jakości dynamicznej, spośród których przedstawione zostaną najczęściej stosowane:

- wskaźniki dotyczące charakterystyk skokowych układu regulacji – tzw. wskaźniki przebiegu przejściowego,
- wskaźniki dotyczące przebiegu charakterystyk częstotliwościowych układu regulacji,
- całkowe wskaźniki jakości.

### 10.2.1. WSKAŹNIKI PRZEBIEGU PRZEJŚCIOWEGO

Podstawową formą oceny właściwości dynamicznych układów regulacji jest analiza przebiegów odchyłek regulacji, wywołanych przez zakłócenie skokowe lub skokową zmianę wartości zadanej. Charakterystyczne postacie takich przebiegów przedstawiono na rys. 10.5–10.8. Do oceny tych przebiegów najczęściej wykorzystywane są następujące wskaźniki:

- **statyczna odchyłka zakłóceniowa** $e_{z\,st}$;
- **statyczna odchyłka nadążania** $e_{w\,st}$;
- **maksymalna odchyłka dynamiczna** $e_m$ – maksymalna bezwzględna wartość odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego lub skokowej zmiany wartości zadanej;



- **czas regulacji** $t_r$ – czas od chwili wprowadzenia skokowego zakłócenia lub wymuszenia do chwili, od której odchyłka regulacji nie wykracza poza przedział wartości $\pm\Delta$ od wartości odpowiednio $e_{z\,st}$ lub $e_{w\,st}$; jako wartość $\Delta$ przyjmuje się najczęściej 2% lub 5% wartości $e_m$;
- **przeregulowanie** $\kappa$ (dotyczy przebiegów periodycznych) – wyrażony w procentach stosunek amplitudy drugiego odchylenia $e_2$ od wartości ustalonej do amplitudy pierwszego odchylenia $e_1$

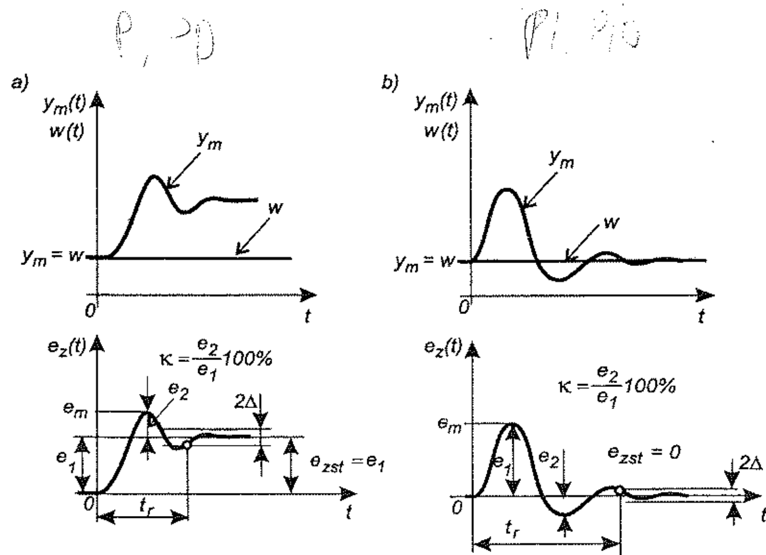
$$\kappa = \frac{e_2}{e_1} 100\% \tag{10.13}$$

Wartości wymienionych wskaźników przebiegu przejściowego zależą od właściwości obiektu regulacji, zastosowanego algorytmu regulacji i nastaw regulatora.

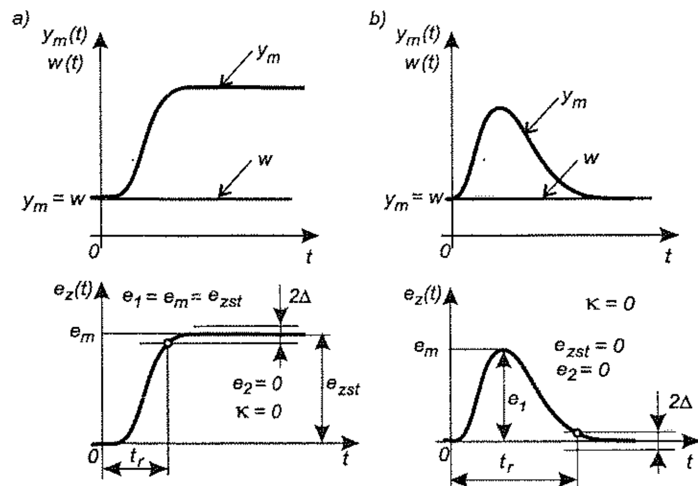
Z punktu widzenia użytkownika, ze względu na możliwość oceny przebiegu realizowanego procesu, poza wartościami odchyłek regulacji ważne są wartości wielkości regulowanej zarówno w stanach ustalonych jak i przejściowych. Ze względu na zależność przebiegów odchyłki regulacji i wielkości regulowanej, wskaźniki dotyczące przebiegu odchyłki można także wyznaczyć na podstawie przebiegu wielkości regulowanej. Dlatego na rys. 10.5–10.8, ilustrujących charakterystyczne rodzaje odpowiedzi skokowych układów regulacji, pokazano przebiegi wielkości regulowanej i odpowiadające im przebiegi odchyłki regulacji.

Charakterystycznymi odpowiedziami skokowymi układów regulacji są:

- **odpowiedzi na zakłócenie skokowe**
  - periodyczne (oscylacyjne)
    o niezerowej odchyłce statycznej (układy z regulatorem P lub PD) – rys. 10.5a,
    o zerowej odchyłce statycznej (układy z regulatorem PI lub PID) – rys. 10.5b,
  - aperiodyczne
    o niezerowej odchyłce statycznej (układy z regulatorem P lub PD) – rys. 10.6a,
    o zerowej odchyłce statycznej (układy z regulatorem PI lub PID) – rys. 10.6b;
- **odpowiedzi na skokową zmianę wartości zadanej**
  - periodyczne (oscylacyjne)
    o niezerowej odchyłce statycznej (układy z obiektami statycznymi i z regulatorem P lub PD) – rys. 10.7a,
    o zerowej odchyłce statycznej (układy z regulatorem PI lub PID lub z obiektem z akcją całkującą) – rys. 10.7b,
  - aperiodyczne
    o niezerowej odchyłce statycznej (układy z obiektami statycznymi i układy z regulatorem P lub PD) – rys. 10.8a,
    o zerowej odchyłce statycznej (układy z regulatorem PI lub PID lub z obiektem astatycznym i regulatorem P lub PD) – rys. 10.8b.

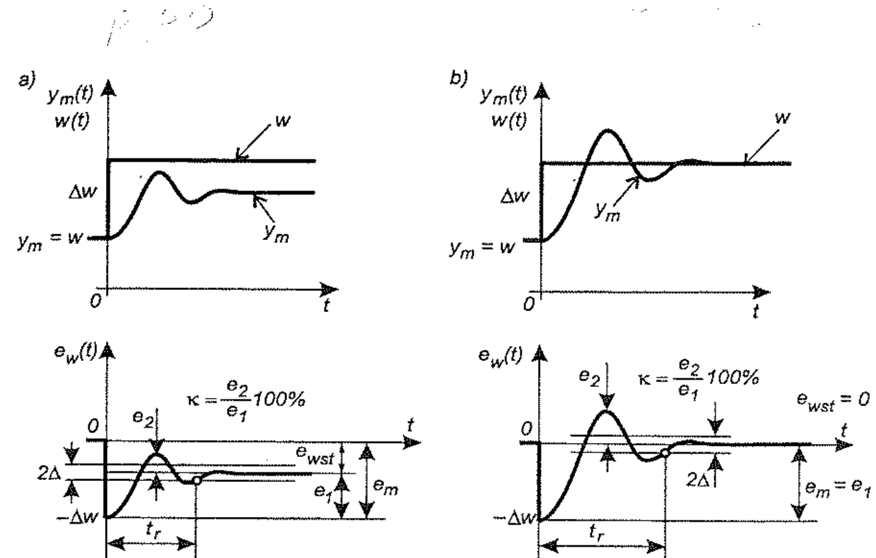



Rys. 10.5. Oscylacyjne odpowiedzi układu regulacji na zakłócenie skokowe $z(t) = 1(t)$ przy $w$ = const: a) z niezerową odchyłką statyczną, b) z zerową odchyłką statyczną

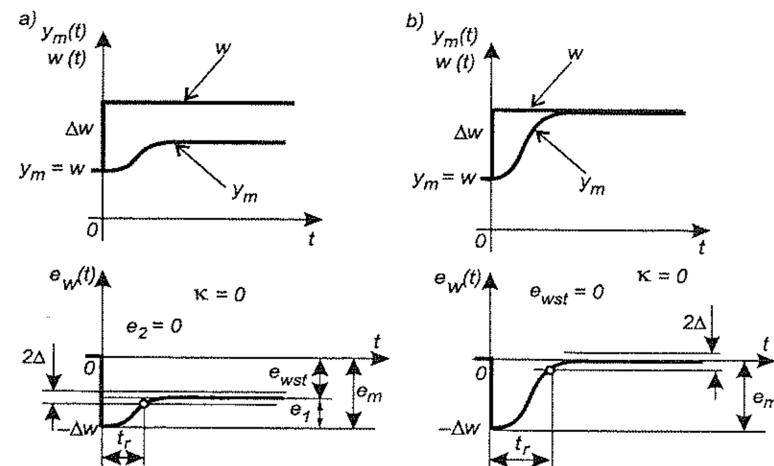



Rys. 10.6. Aperiodyczne odpowiedzi układu regulacji na zakłócenie skokowe $z(t) = 1(t)$ przy $w$ = const: a) z niezerową odchyłką statyczną, b) z zerową odchyłką statyczną





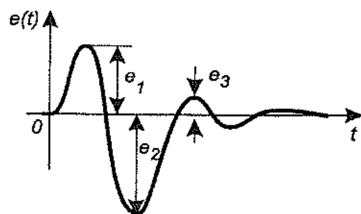

Rys. 10.7. Oscylacyjne odpowiedzi układu regulacji na skokową zmianę wartości zadanej $\Delta w$ przy $z = 0$: a) z niezerową odchyłką statyczną, b) z zerową odchyłką statyczną




Rys. 10.8. Aperiodyczne odpowiedzi układu regulacji na skokową zmianę wartości zadanej $\Delta w$ przy $z = 0$: a) z niezerową odchyłką statyczną, b) z zerową odchyłką statyczną

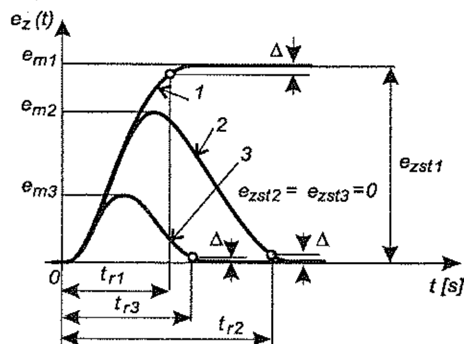
Może się zdarzyć, że w wyniku doboru nastaw regulatora do danego procesu, po wprowadzeniu zakłócenia skokowego, zmiany odchyłki regulacji układu mają charakter oscylacyjny o nietypowym przebiegu ( $e_2 > e_1$ ), jak na rys. 10.9. Wówczas jako przeregulowanie należy traktować

$$\kappa = \frac{e_3}{e_2}100\% \quad \text{lub} \quad \kappa = \frac{e_3}{e_1}100\%$$




Rys. 10.9. Przykład nietypowego oscylacyjnego przebiegu odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego

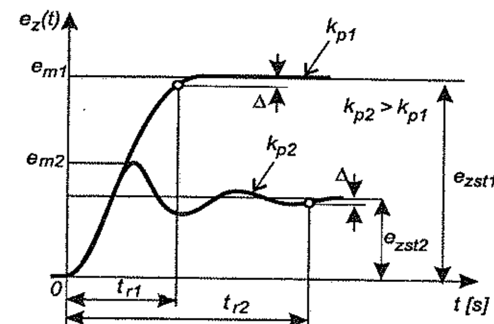
Wpływ rodzaju regulatora na przebieg (aperiodyczny) odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego $z(t) = 1(t)$ przy $w = \text{const}$ ilustruje rys. 10.10. W układach z regulatorem o algorytmie P obserwuje się najkrótszy czas trwania stanu przejściowego (najkrótszy czas regulacji – $t_{r1}$ ), ale regulacja jest najmniej dokładna, gdyż odchyłka statyczna $e_{z\,st1} \neq 0$ ; odchyłka dynamiczna $e_{m1}$ ma także wartość największą. W układach z regulatorem o algorytmie PI lub PID odchyłki statyczne są zerowe, odchyłki dynamiczne są mniejsze od odchyłek w układzie z regulatorem P, przy czym odchyłka dynamiczna jest najmniejsza w przypadku zastosowania regulatora o algorytmie PID.




Rys. 10.10. Wpływ rodzaju regulatora na przebieg (aperiodyczny) odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego $z(t) = 1(t)$ przy $w$ = const. Przebieg odchyłki w układzie: 1 – z regulatorem P, 2 – z regulatorem PI, 3 – z regulatorem PID



Wpływ wzmocnienia $k_p$ regulatora P lub PD na kształtowanie się odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego $z(t) = 1(t)$ przy $w = \text{const}$ ilustruje rys. 10.11. Aperiodyczny przebieg odchyłki odpowiada wzmocnieniu $k_{p1}$ regulatora, przy którym odchyłka statyczna osiąga wartość $e_{z\,st1}$. Jak wiadomo, zwiększanie wzmocnienia regulatora prowadzi do zmniejszenia odchyłki statycznej. Zwiększanie wzmocnienia regulatora prowadzi do zmiany charakteru przebiegu odchyłki na przebieg oscylacyjny; dalsze zwiększanie wzmocnienia regulatora mogłoby doprowadzić do oscylacji niegasnących i utraty stabilności.




Rys. 10.11. Wpływ nastaw regulatora P lub PD na kształtowanie się odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego $z(t) = 1(t)$ przy $w$ = const

Jak wynika z porównania przebiegów przejściowych na rys. 10.11, przebiegi oscylacyjne charakteryzują się mniejszą odchyłką dynamiczną ( $e_{m2} < e_{m1}$ ) i statyczną ( $e_{z\,st2} < e_{z\,st1}$ ), ale dłuższym czasem regulacji ( $t_{r2} > t_{r1}$ ).

W praktyce zaobserwowano związki między zapasami stabilności a reakcją układu na zakłócenie skokowe. Stwierdza się, że zapewniając zapasy stabilności w granicach $2 \le \Delta M \le 5$ ( $6 \le \Delta L \le 14$ dB ) oraz $30° \le \Delta\varphi \le 60°$, w większości układów regulacji, po wprowadzeniu zakłócenia skokowego, przebiegi przejściowe mają charakter oscylacyjny z minimum czasu regulacji i przeregulowaniem około 20%.

## 10.2.2. CZĘSTOTLIWOŚCIOWY WSKAŹNIK REGULACJI

Opisane w rozdz. 10.2.1 wskaźniki jakości regulacji charakteryzują jedynie wybrane parametry przebiegu przejściowego w postaci odpowiedzi układu na zakłócenie lub wymuszenie skokowe. W rzeczywistości przebieg wielkości regulowanej jest wynikiem działania na układ regulacji niezdeterminowanych zakłóceń,

co powoduje, że przebieg ten ma charakter nieuporządkowanych fluktuacji wokół wartości zadanej. Także zmiany wartości zadanej, szczególnie w przypadku układów programowych i nadążnych, mogą dokonywać się w sposób odbiegający od zmiany skokowej.

Jeśli na układ regulacji oddziałuje zakłócenie lub wymuszenie w postaci funkcji okresowej, która może być aproksymowana sumą przebiegów sinusoidalnych, to korzystnie jest ocenić jakość regulacji, posługując się tzw. **częstotliwościowym wskaźnikiem jakości**. Wskaźnik ten definiowany jest jako stosunek transformaty Fouriera $e(j\omega)$ sygnału odchyłki regulacji $e(t)$ wywołanej działaniem zakłócenia lub wymuszenia, do transformaty Fouriera $e'(j\omega)$ odchyłki, jaka powstałaby pod wpływem takiego samego zakłócenia lub wymuszenia w układzie otwartym (bez toru sprzężenia zwrotnego z regulatorem):

$$q(j\omega) = \frac{e(j\omega)}{e'(j\omega)} \tag{10.14}$$

Częstotliwościowy wskaźnik jakości jest więc miarą zdolności regulatora do eliminacji odchyłek przy różnych wartościach pulsacji sygnału odchyłki lub ogólniej – miarą zdolności do eliminacji składowych harmonicznych sygnału odchyłki.

Do wyznaczenia transformaty Laplace'a odchyłki regulacji $e_z(s)$, wywołanej w układach regulacji wg rys. 8.2 działaniem zakłócenia $z(t)$ przy $w = \text{const}$, posłużono się schematem przedstawionym na rys. 10.1, z którego wynika, że

$$e_z(s) = \frac{\pm G_z(s)\,G_{\text{ob}}(s)}{1+G_{\text{ob}}(s)\,G_r(s)}\,z(s) \tag{10.15}$$

W układzie otwartym (bez toru sprzężenia zwrotnego) zakłócenie $z(t)$ powoduje powstanie odchyłki $e'_z(t)$, której transformatą jest

$$e'_z(s) = \pm G_z(s)\,G_{\text{ob}}(s)\,z(s) \tag{10.16}$$

Stosunek $e_z(s)$ do $e'_z(s)$ ma postać

$$\frac{e_z(s)}{e'_z(s)} = \frac{1}{1+G_{\text{ob}}(s)\,G_r(s)} \tag{10.17}$$

skąd

$$q(j\omega) = \frac{e_z(j\omega)}{e'_z(j\omega)} = \frac{1}{1+G_{\text{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)} \tag{10.18}$$

Do wyznaczenia transformaty Laplace'a odchyłki regulacji $e_w(s)$ w układach regulacji wg rys. 8.2, wywołanej zmianą wartości zadanej $\Delta w(t)$ przy



$z = 0 = \text{const}$, posłużono się schematem przedstawionym na rys. 10.2, z którego wynika, że

$$e_w(s) = \frac{-1}{1+G_{\text{ob}}(s)\,G_r(s)}\,\Delta w(s) \tag{10.19}$$

W przypadku braku sprzężenia zwrotnego w układzie wg rys. 10.2, wymuszenie $\Delta w(t)$ spowodowałoby powstanie odchyłki $e'_w(t)$, której transformata

$$e'_w(s) = -\Delta w(s) \tag{10.20}$$

Stosunek $e_w(s)$ do $e'_w(s)$ jest taki jak stosunek $e_z(s)$ do $e'_z(s)$, zatem

$$q(j\omega) = \frac{e_z(j\omega)}{e'_z(j\omega)} = \frac{e_w(s)}{e'_w(s)} = \frac{1}{1+G_{\text{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)} \tag{10.21}$$

a więc, w układach jak na rys. 8.2, regulator w jednakowym stopniu tłumi odchyłki wywołane przez zakłócenia oraz odchyłki spowodowane zmianami wartości zadanej.

Użycie częstotliwościowej, a nie operatorowej, formy wskaźnika $q$ ma na celu umożliwienie analizy tylko jego modułu, ponieważ zarówno przy nadążaniu, jak i przy kompensacji zakłóceń miarodajne są jedynie wartości amplitud ewentualnych odchyłek. Ponadto częstotliwościowe ujęcie wskaźnika można wykorzystać do analizy wpływu na układ zakłóceń stochastycznych.

Przy projektowaniu układów automatyki pożądane wartości modułu wskaźnika $q$ określa się zwykle tylko w odniesieniu do pasma pulsacji, w którym należy zapewnić odpowiednio małą wartość modułu tego wskaźnika ($|q(j\omega)| << 1$). Może to być spełnione, jeżeli w tym paśmie częstotliwości moduł transmitancji widmowej układu otwartego spełnia warunek

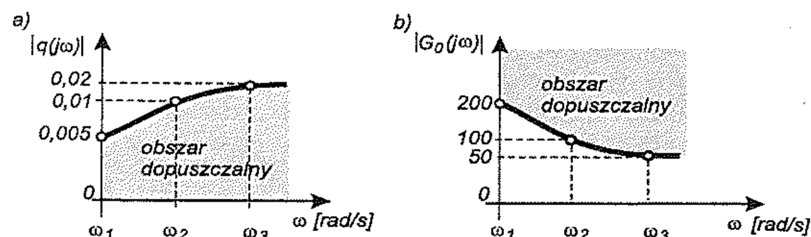
$$|G_{\text{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)| \gg 1$$

Zatem można przyjąć, że

$$|q(j\omega)| \approx \left|\frac{1}{G_{\text{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)}\right| \tag{10.22}$$

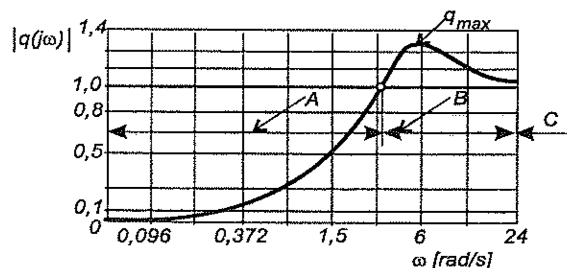
Na podstawie wzoru (10.22) i założonych wartości modułu wskaźnika $q$ można wyznaczyć przebieg charakterystyki amplitudowej układu otwartego o transmitancji widmowej $G_{\text{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)$, zapewniający uzyskanie założonych wartości wskaźnika w określonym paśmie pulsacji. Na przykład, jeżeli wymagane wartości modułu wskaźnika $q$ powinny znajdować się w obszarze dopuszczalnym jak na

rys. 10.12a, to charakterystyka amplitudowa układu otwartego powinna się znajdować w obszarze dopuszczalnym jak na rys. 10.12b.




Rys. 10.12. Ilustracja zależności charakterystyki amplitudowej $|G_0(j\omega)|$ układu otwartego od wymagań dotyczących wartości modułu wskaźnika regulacji

Przykład typowego przebiegu modułu wskaźnika $q(j\omega)$ przedstawiono na rys. 10.13. Przebieg ten wyznaczono dla układu regulacji z obiektem statycznym o transmitancji $G_{\mathrm{ob}}(s)=\dfrac{1}{(10s+1)^2}\mathrm{e}^{-1{,}25s}$ i regulatorem PI o nastawach: $k_p=0{,}5$ i $T_i=10$ s.




Rys. 10.13. Przebieg modułu wskaźnika $q(j\omega)$ typowego układu regulacji

W paśmie A regulator kompensuje (w różnym stopniu) wpływ działających zakłóceń, w paśmie B wszystkie zakłócenia są przez regulator wzmacniane, w paśmie C zakłócenia wywołują takie same skutki jak w układzie bez regulatora. Pasma te można także określić na podstawie charakterystyki amplitudowej układu otwartego.

W praktyce przyjmuje się, że w przypadku układów nadążnych maksymalna wartość modułu częstotliwościowego wskaźnika jakości $q_{\max}$ nie powinna być większa niż 1,4, a w przypadku układów regulacji stałowartościowej – większa niż 1,68.



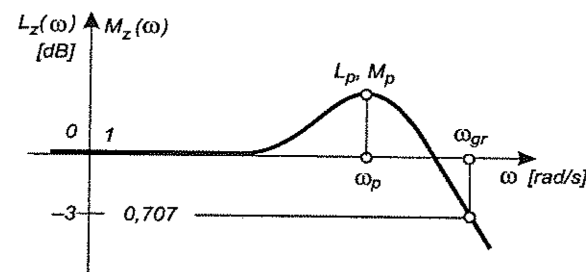
### 10.2.3. PASMO PRZENOSZENIA I MODUŁ REZONANSOWY

Pojęcia „pasmo przenoszenia" i „moduł rezonansowy" odnoszą się do charakterystyki amplitudowej zamkniętego układu regulacji. Charakteryzują one zdolność układu do odtwarzania na wyjściu układu regulacji amplitud składowych harmonicznych sygnału wartości zadanej.

Transmitancja widmowa względem wartości zadanej układów regulacji o schematach jak na rys. 8.2 ma postać

$$G_w(j\omega)=\frac{\Delta y_m(j\omega)}{\Delta w(j\omega)}=\frac{G_{\mathrm{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)}{1+G_{\mathrm{ob}}(j\omega)\,G_r(j\omega)} \tag{10.23}$$

Typowy kształt charakterystyki amplitudowej układu zamkniętego, odpowiadający transmitancji widmowej (10.23), przedstawiono na rys. 10.14. Jak widać, w szerokim zakresie pulsacji sygnału wartości zadanej, moduł $M_z(\omega)$ transmitancji widmowej układu zamkniętego (jego wartość jest stosunkiem amplitudy składowej harmonicznej sygnału wyjściowego do amplitudy składowej harmonicznej sygnału wejściowego przy danej pulsacji) jest bliski wartości 1, co oznacza, że w tym paśmie układ poprawnie odtwarza na wyjściu amplitudę składowych harmonicznych sygnału wartości zadanej. Zwykle w wyższym paśmie pulsacji obserwuje się wzrost wartości modułu transmitancji widmowej do wartości maksymalnej $M_p$ (lub określonej w decybelach wartości modułu logarytmicznego $L_p=20\log M_p$), zwanej **modułem rezonansowym**, osiąganej przy **pulsacji rezonansowej** $\omega_p$, a następnie jego zmniejszanie się do wartości zero. Wzrost modułu ponad wartość 1 oznacza wzmocnienie amplitud składowych harmonicznych sygnału wartości zadanej w określonym paśmie pulsacji. Wymaga się, żeby maksymalna wartość modułu rezonansowego układu regulacji mieściła się w granicach $1{,}1\le M_p\le 1{,}5$, co oznacza, że $0{,}8\,\mathrm{dB}\le L_p\le 3{,}5\,\mathrm{dB}$. Moduł rezonansowy $M_p$ związany jest ze współczynnikiem tłumienia drgań w układzie regulacji. Duże wartości $M_p$ odpowiadają słabemu tłumieniu drgań.




Rys. 10.14. Typowy przebieg charakterystyki amplitudowej zamkniętego układu regulacji

**Pasmo przenoszenia** jest to zakres pulsacji, w którym układ regulacji wystarczająco dokładnie odtwarza na wyjściu amplitudy składowych harmonicznych sygnału wartości zadanej. Jako miarę pasma częstotliwości przyjmuje się tzw. **trzydecybelową pulsację graniczną** $\omega_{gr}$ – pulsację, przy której moduł logarytmiczny transmitancji widmowej układu zamkniętego $L_z(\omega)$ zmniejsza się o 3 dB w stosunku do wartości przy pulsacji $\omega = 0$ (rys. 10.14).

### 10.2.4. CAŁKOWE WSKAŹNIKI JAKOŚCI REGULACJI

Przedstawione w rozdz. 10.2.1 wskaźniki przebiegu przejściowego określają tylko wybrane cechy przebiegów odchyłek regulacji, wywołanych tylko skokowym zakłóceniem lub skokowym wymuszeniem. Całkowe wskaźniki jakości w określony sposób charakteryzują całość przebiegu przejściowego i można je stosować także do oceny przebiegów przejściowych wywołanych, innymi niż skokowe, zakłóceniami i wymuszeniami.

Jako miarę jakości regulacji przyjmuje się wielkość tzw. pól regulacji (rys. 10.15 i 10.16). Dąży się do minimalizacji tego pola. Im jest ono mniejsze, tym lepsza jest jakość dynamiczna układu. Podejście takie ma również interpretację ekonomiczną, gdyż często straty energii lub materiału (surowca) w procesach produkcyjnych są funkcją wielkości i czasu trwania odchyłki regulacji, a celem regulacji jest minimalizacja tych strat.

Zależnie od struktury i parametrów układu regulacji oraz spodziewanego charakteru przebiegu przejściowego, oblicza się wartości następujących całek:

$$I_1 = \int_0^\infty e(t)dt \qquad (10.24)$$

$$I_2 = \int_0^\infty |e(t)|dt \qquad (10.25)$$

$$I_3 = \int_0^\infty |e(t) - e_{st}|dt \qquad (10.26)$$

$$I_4 = \left|\int_0^\infty [e(t) - e_{st}]dt\right| \qquad (10.27)$$

$$I_5 = \int_0^\infty [e(t) - e_{st}]^2 dt \qquad (10.28)$$



$$I_6 = \int_0^\infty te(t)dt \qquad (10.29)$$

$$I_7 = \int_0^\infty t|e(t)|dt \qquad (10.30)$$

Całkową miarą jakości statycznych układów regulacji (w których występują odchyłki statyczne) w przypadku przebiegów oscylacyjnych (rys. 10.15d) jest całka $I_3$, a w przypadku przebiegów aperiodycznych (rys. 10.15c) – całka $I_4$. W przypadku układów astatycznych całkową miarą jakości są: dla przebiegów aperiodycznych (rys. 10.15a i 10.16a) – całka $I_1$ i dla przebiegów oscylacyjnych (rys. 10.15b i 10.16b) – całka $I_2$. W przypadku układów, w odniesieniu do których wymagania dotyczące jakości formułowane są tak, aby uzyskać jak najmniejsze wahania wielkości regulowanej oraz układów czasooptymalnych, minimalizuje się całki: $I_5$, $I_6$ i $I_7$.

W typowych układach regulacji zapewnienie minimalnej wartości całki $I_2$ prowadzi do uzyskania odpowiedzi na skokowe zakłócenia w postaci przebiegów aperiodycznych z minimum czasu regulacji, natomiast w przypadku osiągnięcia minimum całki $I_5$ odpowiedzi na skokowe zakłócenia są oscylacyjne z przeregulowaniem $\kappa \approx 45\%$.

Całkę $I_5$ można obliczać metodą bezpośrednią lub, jeżeli transformata odchyłki regulacji jest podana w postaci (10.31), wykorzystując wzory podane w tabl. 10.1:

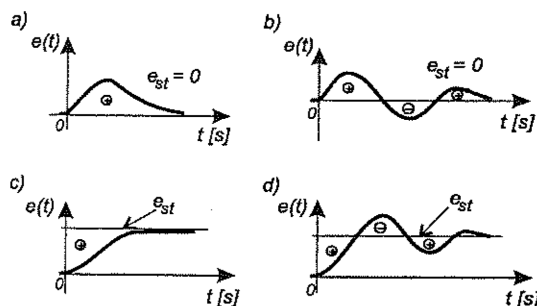
$$e(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0} \qquad (10.31)$$

Tablica 10.1

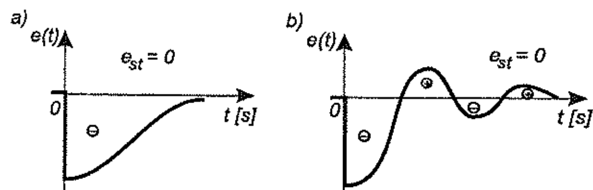
**Wzory do obliczania wartości całki $I_5$**

| $n$ | $I_5 = \int_0^\infty [e(t) - e_{st}]^2 dt$ |
|---|---|
| 1 | $I_5 = \frac{b_0^2}{2a_1 a_0}$ |
| 2 | $I_5 = \frac{b_1^2 + \frac{a_2}{a_0} b_0^2}{2a_2 a_0}$ |
| 3 | $I_5 = \frac{a_1 b_2^2 + a_3(b_1^2 - 2b_0 b_2) + \frac{a_3 a_2}{a_0} b_0^2}{2a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3)}$ |

Na rys. 10.15 i 10.16 przedstawione są pola regulacji przy różnych rodzajach przebiegów przejściowych.




Rys. 10.15. Pola regulacji w przypadku zmian odchyłki regulacji wywołanych skokową zmianą zakłócenia: a, c) przebiegi aperiodyczne, b, d) przebiegi oscylacyjne




Rys. 10.16. Pola regulacji w przypadku zmian odchyłki regulacji wywołanych skokową zmianą wartości zadanej: a) przebieg aperiodyczny, b) przebieg oscylacyjny



# 11. DOBÓR RODZAJU, ALGORYTMU I NASTAW REGULATORA

## 11.1. ZALECENIA DOTYCZĄCE DOBORU RODZAJU I ALGORYTMU REGULATORA

Poprawny wybór rodzaju regulatora i jego algorytmu uzależniony jest od znajomości (choćby przybliżonej) właściwości dynamicznych obiektu regulacji oraz jego struktury fizycznej (technologicznej), wymaganego sposobu oddziaływania regulatora na proces, zadań jakie ma spełniać układ regulacji, względów bezpieczeństwa oraz kosztów. Inny algorytm regulatora zalecany jest w przypadku układu regulacji stałowartościowej, w którym zadaniem regulatora jest eliminacja wpływu zakłóceń na wielkość regulowaną, a inny – w przypadku układu regulacji nadążnej, w którym regulator ma zapewnić nadążanie wartości wielkości regulowanej za zmieniającą się wartością zadaną. Opis właściwości dynamicznych obiektu musi uwzględniać nie tylko właściwości samego procesu, ale także urządzeń umożliwiających współpracę z rzeczywistym regulatorem (zespół wykonawczy, przetwornik pomiarowy).

Podstawową przesłanką przy wyborze rodzaju regulatora są właściwości dynamiczne obiektu regulacji. Przyjmując jako opis właściwości dynamicznych statycznych obiektów regulacji transmitancję (7.33), a jako opis właściwości obiektów astatycznych – transmitancję (7.40), można stwierdzić, że:

- W przypadku obiektów zarówno statycznych jak i astatycznych o dużych stałych czasowych, których wartość stosunku $T_0/T_z < 0{,}1$, zadowalającą jakość regulacji zapewniają regulatory **dwustawne** lub **trójstawne**.
  **Regulatory dwustawne** stosowane są do sterowania procesami, w których dostarczanie strumieni energetyczno-materiałowych może odbywać się w sposób dwustanowy typu „załącz", „wyłącz" (umowny stan 0 lub 1) za pośrednictwem prostych zespołów wykonawczych, takich jak zawory elektromagnetyczne, styczniki, triaki, przekaźniki itp. Najczęściej są to procesy termiczne wolno-

zmienne, w których dopuszczalne są oscylacje wielkości regulowanej wynikające z zastosowanego sterowania dwustawnego.

**Regulatory trójstawne** stosowane są do sterowania zespołami wykonawczymi z trójstawnym elementem napędowym (np. silnik nawrotny, w którym stan „1" odpowiada obrotom w prawo, stan „0" to zatrzymanie, a stan „–1" to obroty w lewo) lub do sterowania dwustawnego procesami o dwóch torach oddziaływania (np. proces grzejny, w którym stanowi „1" odpowiada włączenie grzania, stanowi „–1" – włączenie chłodzenia, a stanowi „0" – wyłączenie grzania i chłodzenia).

- W przypadku obiektów statycznych i astatycznych o parametrach w zakresie $0{,}1 \le T_0/T_z \le 0{,}7$ wykorzystuje się **regulatory o działaniu ciągłym** (ze standardowym ciągłym sygnałem wyjściowym). Zapewniają one ciągłe dostarczanie strumieni energetyczno-materiałowych do obiektów.
- W przypadku obiektów o wartości stosunku $T_0/T_z > 0{,}7$ stosuje się **regulatory impulsowe** (generujące impulsowe sygnały wyjściowe).

Najczęściej spotykane wartości stosunku $T_0/T_z$, w przypadku obiektów przemysłowych, mieszczą się w przedziale 0,2÷0,7. Dlatego w przemysłowych układach regulacji najbardziej rozpowszechnione są regulatory o działaniu ciągłym, realizujące typowe algorytmy regulacji P, PI, PD i PID.

Analiza współpracy regulatora z obiektem prowadzi do następujących wniosków co do wyboru algorytmu regulatora:

- Regulator o algorytmie PI zapewnia dobrą jakość regulacji tylko przy zakłóceniach o niskiej częstotliwości. Działanie całkujące jest niezbędne do uzyskania odchyłek statycznych równych zeru.
- Regulator o algorytmie PD zapewnia szersze pasmo regulacji niż regulator o algorytmie PI, ale o gorszej jakości regulacji przy niskiej częstotliwości zakłóceń lub wymuszeń. Działanie różniczkujące jest zalecane w przypadku obiektów inercyjnych wyższego rzędu (np. takich jak procesy cieplne), gdyż pozwala na wytworzenie silnego oddziaływania sterującego już przy małych odchyłkach regulacji. Regulator PD nie zapewnia osiągania w stanach ustalonych zerowej odchyłki regulacji. Należy zaznaczyć, że stosowanie działania różniczkującego wzmacnia także szumy pomiarowe zawarte w sygnale odchyłki regulacji, a ponadto przynosi niewielkie korzyści w przypadku obiektów regulacji o stosunku $T_0/T_z > 0{,}5$.
- Regulator o algorytmie PID łączy zalety regulatorów PI i PD.

W literaturze specjalistycznej spotyka się praktyczne zalecenia co do doboru algorytmu regulatora dla określonych pod względem dynamiki typów obiektów regulacji. Przykładowe zalecenia podano w tabl. 11.1.



Tablica 11.1

**Zalecenia praktyczne dotyczące skuteczności regulacji zależnie od algorytmu regulatora i właściwości obiektu regulacji**

| Odpowiedź skokowa obiektu \ Algorytm regulatora | P | PI | PD | PID |
|---|---|---|---|---|
| obiekt bezinercyjny z opóźnieniem | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja stałowartościowa i nadążna | regulacja nieskuteczna | regulacja nieskuteczna |
| obiekt inercyjny I rzędu z małym opóźnieniem | skuteczna regulacja nadążna | skuteczna regulacja stałowartościowa | skuteczna regulacja nadążna | skuteczna regulacja stałowartościowa |
| obiekt inercyjny I rzędu z opóźnieniem | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja, jakość gorsza niż z PID | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja stałowartościowa i nadążna |
| obiekt inercyjny II rzędu z opóźnieniem | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja, jakość gorsza niż z PID | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja stałowartościowa i nadążna |
| obiekt inercyjny wyższego rzędu | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja, jakość gorsza niż z PID | regulacja nieskuteczna | skuteczna regulacja stałowartościowa i nadążna |
| obiekt całkujący lub całkujący z inercją | skuteczna regulacja nadążna (gdy obiekt bez inercji) | skuteczna regulacja stałowartościowa (gdy obiekt bez inercji) | skuteczna regulacja nadążna | skuteczna regulacja stałowartościowa |

## 11.2. DOBÓR NASTAW REGULATORÓW O DZIAŁANIU CIĄGŁYM

Stosowane w praktyce, przemysłowe regulatory o działaniu ciągłym są urządzeniami uniwersalnymi. Ich parametry (nastawy) można zmieniać (nastawiać) w szerokich granicach, dzięki czemu mogą one współpracować poprawnie z obiektami o zróżnicowanej dynamice. Zależnie od stawianych wymagań dotyczących stabilności i jakości regulacji, należy wprowadzić odpowiednie nastawy regulatora, którymi są wartości:
- wzmocnienia proporcjonalnego $k_p$,
- czasu zdwojenia $T_i$,
- czasu wyprzedzenia $T_d$,

dobierane wg procedur nazywanych doborem nastaw.

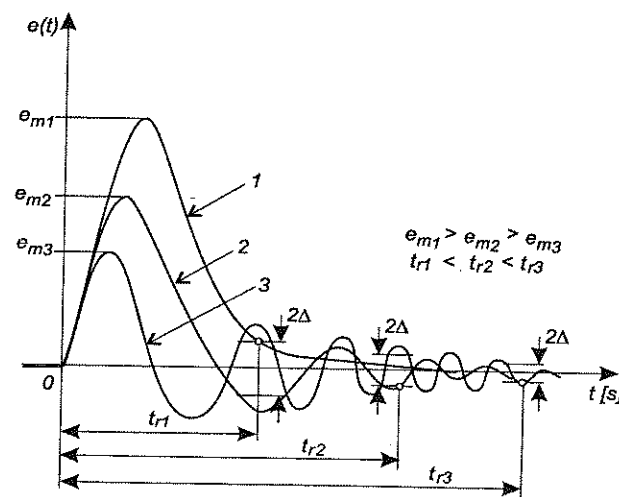
Na podstawie rozważań teoretycznych, badań modelowych i doświadczeń eksploatacyjnych opracowano wiele różnych metod doboru nastaw regulatorów PID o działaniu ciągłym. Są to metody doświadczalne (rozdz. 11.2.1–11.2.5), niezapewniające uzyskania określonych parametrów jakościowych układom regulacji, oraz metoda określania nastaw regulatorów na podstawie znanych parametrów matematycznego modelu obiektu regulacji i wymaganego kryterium jakości układu regulacji (rozdz. 11.2.6).

Wymagania dotyczące jakości regulacji są zróżnicowane i zależą od rodzaju procesu, zadania stawianego układowi, warunków ekonomicznych itp. Na przykład, w układzie sterowania położeniem freza obrabiarki dobór nastaw regulatora powinien zapewnić, aby proces przejścia freza od położenia początkowego do położenia zadanego był procesem aperiodycznym najkrócej trwającym (nie można dopuścić do przeregulowania, gdyż oznaczałoby to wejście freza w głąb materiału, najprawdopodobniej poza granicę tolerancji wymiaru obrabianego przedmiotu). Niektóre procesy, w których jakość produktu zależy często od wartości i czasu trwania odchyleń wielkości regulowanych od ich wartości nominalnych w punktach pracy, sterowane są przez regulatory, których nastawy dobierane są wg kryteriów całkowych, np. $\min \int_0^\infty e(t)dt$ lub $\min \int_0^\infty e^2(t)dt$.

Zatem w praktyce wymagania jakościowe dotyczą zwykle odpowiedzi skokowych układów regulacji. Najczęściej wymaga się uzyskania jednej z trzech postaci odpowiedzi skokowych:

- przebiegu aperiodycznego z przeregulowaniem $\kappa = 0 \div 5\%$ i minimum czasu regulacji $t_r$, co także zapewnia w przybliżeniu uzyskanie minimum całki $I_2 = \int_0^\infty |e(t)|dt$; jest to tzw. kryterium IAE (ang. *Integral of the Absolute value of the Error*);
- przebiegu oscylacyjnego z przeregulowaniem około $\kappa = 20\%$ i minimum czasu regulacji $t_r$, co zapewnia w przybliżeniu uzyskanie minimum całki $I_7 = \int_0^\infty t|e(t)|dt$; kryterium to oznaczane jest jako ITAE (ang. *Integral of the Time weighted Absolute Error*);
- przebiegu z minimum całki z kwadratu odchyłki regulacji, tj. minimum całki $I_5 = \int_0^\infty e^2(t)dt$, co zapewnia uzyskanie przeregulowania $\kappa \approx 45\%$; jest to kryterium oznaczane jako ISE (ang. *Integral of Square of the Error*).

Na rys. 11.1 przedstawiono porównanie odpowiedzi na zakłócenie skokowe układu regulacji z obiektem statycznym i regulatorem PID o nastawach zapewniających spełnienie poszczególnych kryteriów, dobranych jedną z poniżej opisanych metod. Jak widać, wpływ zakłócenia najszybciej jest kompensowany w układzie z regulatorem o nastawach dobranych wg kryterium IAE, ale amplituda odchyłki dynamicznej jest największa. Nastawy dobrane wg kryterium ISE zapewniają uzyskanie odchyłki dynamicznej o najmniejszej amplitudzie przy najdłuższym czasie regulacji. Kompromisowe nastawy zapewnia kryterium ITAE.




Rys. 11.1. Odpowiedzi na zakłócenie skokowe układu regulacji z regulatorem PID o nastawach dobranych wg kryterium: 1 – IAE, 2 – ITAE, 3 – ISE; $e$ – odchyłka regulacji, $e_m$ – odchyłka maksymalna, $t_r$ – czas regulacji, $\Delta$ – tolerancja stanu ustalonego

Przy doborze nastaw należy pamiętać, że w przypadku obiektów statycznych ważnym parametrem jest stosunek czasu opóźnienia do zastępczej stałej czasowej $T_0/T_z$, charakteryzujący podatność obiektu na regulację (rys. 12.2). Gdy stosunek ten przekracza wartość 0,3, jakość regulacji z nawet poprawnie dobranymi nastawami regulatora PID znacznie się pogarsza. Poprawę jakości regulacji można uzyskać przez modyfikację struktury układu, np. przez zastosowanie w układzie dodatkowego sprzężenia zwrotnego.

Istnienie szeregu metod doboru nastaw różniących się wynikowymi nastawami w przypadku takich samych obiektów, algorytmów regulacji i żądanych parametrów jakościowych świadczy o tym, że problematyka doboru nastaw regulatorów nie jest sprawą zamkniętą. W dalszym ciągu poszukuje się możliwości polepszenia jakości regulacji przez lepsze dopasowanie nastaw do rzeczywistych właściwości obiektów regulacji, zastosowanie nowych algorytmów regulacji lub wykorzystanie niekonwencjonalnych struktur układu regulacji.

## 11.2.1. METODA ZIEGLERA-NICHOLSA

Metoda doboru nastaw regulatorów opracowana w 1942 r. przez Johna Zieglera i Nathaniela Nicholsa jest jedną z najczęściej stosowanych i rozpowszechnionych doświadczalnych metod doboru nastaw regulatorów o algorytmach PID. Stosowana jest wówczas, gdy regulator i inne elementy rzeczywistego układu regulacji są już zainstalowane, ich funkcjonowanie jest sprawdzone (w trybie regulacji ręcznej) i należy tylko dobrać nastawy regulatora. Metoda Zieglera-Nicholsa (skrótowo metoda Z-N) obejmuje dwa warianty ustalania wartości nastaw:

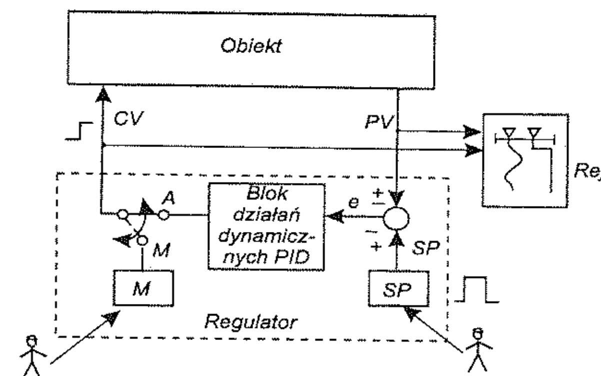
wariant 1: nastawy regulatora dobierane są na podstawie parametrów zamkniętego układu regulacji, doprowadzonego do granicy stabilności (metoda wzbudzenia układu);

wariant 2 (tylko dla układów ze statycznymi obiektami regulacji): nastawy regulatora dobierane są na podstawie parametrów charakterystyki skokowej obiektu regulacji.

W celu zilustrowania przebiegu procedury doboru nastaw metodą Zieglera-Nicholsa na rys. 11.2 przedstawiono schemat funkcjonalny rzeczywistego układu regulacji.

### Wariant 1

Procedura może być stosowana do doboru nastaw regulatorów w układach regulacji obiektów statycznych i astatycznych z inercją wyższego rzędu. Przed uruchomieniem procedury doboru nastaw należy upewnić się, czy sygnał sterujący regulatora będzie jedynym sygnałem wpływającym na zmianę wielkości regulowanej. W przeciwnym razie pojawiające się zakłócenia mogą spowodować niepoprawny dobór nastaw.



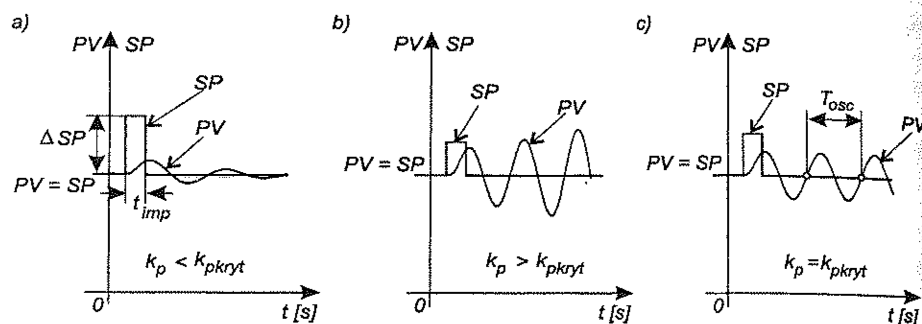

Rys. 11.2. Schemat funkcjonalny rzeczywistego układu regulacji; *SP*, *PV*, *CV* – sygnały odpowiednio wielkości zadanej, zmiennej procesowej, sterowania, Rej – rejestrator, drukarka lub monitor

Dobór nastaw przeprowadza się, wykonując następujące czynności:

1. W trybie sterowania ręcznego (tryb M), zmieniając *CV*, doprowadzić wielkość regulowaną *PV* do stanu, w którym sygnał wyjściowy obiektu *PV* zrówna się z wymaganą wartością zadaną *SP*.
2. Ustawić regulator zainstalowany na obiekcie na działanie proporcjonalne, tzn. że jeżeli zainstalowany regulator ma działanie PID, to należy wyłączyć działanie całkujące i różniczkujące, ustawić punkt pracy $u_p$ regulatora równy nastawionej w ramach czynności 1 wartości *CV* oraz nastawić początkową wartość wzmocnienia regulatora $k_p > 0$.
3. Przełączyć układ na sterowanie automatyczne (tryb A) i jeżeli układ zachowuje stan równowagi, zadajnikiem SP wytworzyć impulsową zmianę wartości zadanej o amplitudzie i czasie trwania impulsu zależnym od spodziewanej dynamiki procesu; obserwować lub rejestrować zmiany *PV*. Praktycy zalecają amplitudę impulsu o wartości 10% zakresu zmian sygnału *PV* i czas trwania impulsu $t_{imp}$ równy około 10% szacowanej wartości zastępczej stałej czasowej obiektu.
4. Jeżeli zmiany *PV* są wystarczająco rozróżnialne, uznaje się próbę za poprawną i ocenia charakter przebiegu. Jeżeli zmiany są gasnące (rys. 11.3a), oznacza to, że $k_p < k_{p\,kryt}$. Należy ponawiać czynności 1÷4, ustawiając coraz to większe wartości $k_p$, aż do wystąpienia w układzie stałych niegasnących oscylacji (rys. 11.3c).

5. Jeżeli zmiany $PV$ są oscylacyjne o narastającej amplitudzie (rys. 11.3b), oznacza to, że $k_p > k_{p\,\text{kryt}}$ i w kolejnych próbach należy zmniejszać wartość $k_p$.
6. Z zarejestrowanego przebiegu o niegasnącej amplitudzie, odpowiadającego krytycznej wartości wzmocnienia $k_{p\,\text{kryt}}$, należy odczytać okres oscylacji $T_{\text{osc}}$.

W trakcie eksperymentów należy kontrolować, czy sygnał sterujący $CV$ nie osiąga wartości granicznych. Jeżeli wystąpią takie objawy, należy zmienić parametry impulsu $SP$.




Rys. 11.3. Przebiegi zmian wielkości regulowanej $PV$ i $SP$ uzyskiwane w trakcie eksperymentu Zieglera-Nicholsa (wariant 1)

Poszukiwane nastawy regulatora oblicza się na podstawie $k_{p\text{kryt}}$ i $T_{\text{osc}}$, stosując wzory podane w tabl. 11.2.

Tablica 11.2

**Nastawy regulatorów PID wg metody Zieglera-Nicholsa (na podstawie [31])**

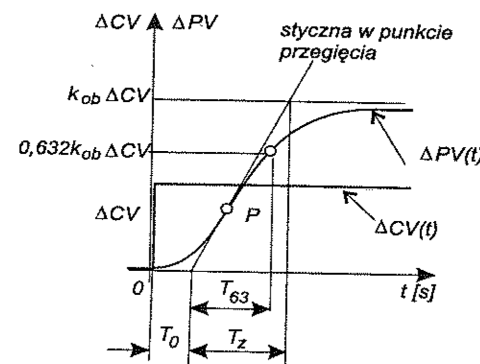
| Algorytm regulatora | Metoda Z-N stałych oscylacji układu zamkniętego | | | Metoda Z-N odpowiedzi skokowej obiektu regulacji | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ | $k_p k_{\text{ob}} T_0 / T_z$ * | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ |
| P | $0{,}5\,k_{p\,\text{kryt}}$ | – | – | 1,0 | – | – |
| PI | $0{,}45\,k_{p\,\text{kryt}}$ | $0{,}8T_{\text{osc}}$ | – | 0,9 | 3,3 | – |
| PID | $0{,}6\,k_{p\,\text{kryt}}$ | $0{,}5T_{\text{osc}}$ | $0{,}12T_{\text{osc}}$ | 1,2 | 2 | 0,5 |

* W niektórych publikacjach zalecane jest zastąpienie stałej $T_z$ stałą $T_{63}$.



**Wariant 2** (tylko w przypadku układów ze statycznymi obiektami regulacji)

W sytuacji gdy osiągnięcie granicy stabilności jest niemożliwe lub niewskazane, należy otworzyć obwód regulacji (przełączyć w tryb M), zadajnikiem sterowania ręcznego M wytworzyć skokową zmianę sygnału $CV$ o wartości $\Delta CV$ i zarejestrować odpowiedź skokową obiektu regulacji $\Delta PV(t)$. Typową postać odpowiedzi przedstawiono na rys. 11.4. Na podstawie odpowiedzi należy wyznaczyć wartości wzmocnienia obiektu $k_{\text{ob}}$ i stałych czasowych $T_0$ i $T_z$ (lub $T_{63}$), które służą do obliczenia nastaw regulatora, według zależności podanych w tabl. 11.2. Obliczone nastawy są nastawami orientacyjnymi, wymagającymi często korekty.




Rys. 11.4. Przykładowa odpowiedź skokowa obiektu regulacji; $T_0$ – zastępczy czas opóźnienia, $T_z$ – zastępcza stała czasowa, $T_{63}$ – zastępcza stała czasowa odpowiadająca 63,2% wartości ustalonej odpowiedzi, $k_{\text{ob}}\,\Delta CV$ – ustalona wartość odpowiedzi skokowej, $\Delta CV$ – amplituda wymuszenia skokowego, $P$ – punkt przegięcia odpowiedzi skokowej

Nastawy regulatorów dobrane metodą Zieglera-Nicholsa nie zapewniają określonego standardu jakości regulacji. W większości przypadków, nastawy dobrane metodą stałych oscylacji zapewniają uzyskanie oscylacyjnych przebiegów przejściowych z przeregulowaniem około 20÷30%.

W literaturze technicznej spotyka się zalecenia praktyków dotyczące wykorzystania parametrów $k_{p\,\text{kryt}}$ i $T_{\text{osc}}$ uzyskanych metodą Zieglera-Nicholsa do doboru nastaw zapewniających uzyskanie określonych parametrów jakościowych. Według [6]:

- aby uzyskać odpowiedzi skokowe układu regulacji z niewielkim przeregulowaniem, należy przyjąć nastawy: $k_p = k_{\text{kryt}}/3$, $T_i = 0{,}5T_{\text{osc}}$ i $T_d = 0{,}125T_{\text{osc}}$;
- aby zapewnić aperiodyczny przebieg odpowiedzi skokowych układu regulacji, należy przyjąć nastawy: $k_p = k_{\text{kryt}}/5$, $T_i = 0{,}5T_{\text{osc}}$ i $T_d = 0{,}125T_{\text{osc}}$.

Warto zwrócić uwagę na zbieżność reguł Zieglera-Nicholsa z powszechnym wymaganiem zapasu modułu 6 dB. Wymagane dla układu z regulatorem P, dwu-

krotne zmniejszenie wzmocnienia, przy którym układ był na granicy stabilności ($k_p = 0{,}5k_{p\,\mathrm{kryt}}$), powoduje uzyskanie przez ten układ zapasu modułu 6 dB. Ponadto w przypadku regulatora PI zaleca się nastawiać wzmocnienie mniejsze niż w przypadku regulatora P, ze względu na destabilizujący wpływ ujemnego przesunięcia fazowego wprowadzonego przez działanie całkujące. Z kolei, wprowadzenie działania D (regulator PID) umożliwia zwiększenie zarówno wzmocnienia $k_p$, jak i intensywności działania całkującego przez zmniejszenie czasu zdwojenia $T_i$.

Metoda Z-N jest powszechnie stosowana, a jej modyfikacje są implementowane w algorytmach automatycznego doboru nastaw (samostrojenie). Nie można jednak nie zwrócić uwagi na dwie istotne jej cechy:

- Podczas badań należy doprowadzić układ do granicy stabilności, co w procesach przemysłowych wiąże się ze stratami energii i surowców, a co najmniej – z pogorszeniem jakości produktu. Dlatego taka procedura w niektórych przypadkach jest niedopuszczalna.
- Metoda nie określa wartości wskaźników jakości procesu uzyskiwanych z tak dobranymi nastawami. Należy liczyć się z tym, że w konkretnym przypadku jakość nie będzie zadowalająca.

Metodę Z-N należy traktować jako skuteczną w przypadku typowych obiektów i użyteczną do wstępnego doboru nastaw, modyfikowanego w trakcie użytkowania układu regulacji.

### 11.2.2. METODA PESSENA

W literaturze spotkać można również inne zasady doboru nastaw na podstawie parametrów $k_{p\,\mathrm{kryt}}$ i $T_{\mathrm{osc}}$, wyznaczonych metodą Z-N. Spośród wielu warto przytoczyć metodę Pessena (tylko w odniesieniu do regulatorów PID), zgodnie z którą: $k_p = 0{,}2k_{\mathrm{kryt}}$, $T_i = 0{,}33T_{\mathrm{osc}}$ i $T_d = 0{,}5T_{\mathrm{osc}}$.

W stosunku do nastaw Z-N zwiększa się wpływ działania D regulatora. Silne działanie różniczkujące zapewnia bardziej korzystny przebieg przejściowy przy uruchamianiu układu regulacji, gdy początkowa wartość odchyłki regulacji jest bardzo duża i występuje silny wpływ ograniczeń i nieliniowości.

### 11.2.3. METODA HASSENA I OFFEREISSENA

Metoda Hassena i Offereissena umożliwia dobór nastaw tylko regulatorów PI i PID. Procedura doboru nastaw jest zbliżona do wariantu 1 metody Z-N. Podobnie jak w przypadku metody Z-N, eksperyment prowadzi się w zamkniętym układzie regulacji w sposób następujący:

1. Wyłączyć wszystkie działania dynamiczne regulatora, pozostawiając jedynie działanie $P$.
2. Postępując zgodnie z opisaną procedurą Z-N, doprowadzić układ regulacji do granicy stabilności i określić wartość $k_{p\,\mathrm{kryt}}$.
3. Przełączyć układ na tryb M, doprowadzić układ do stanu $PV = SP$, a następnie nastawić w regulatorze wartość wzmocnienia $k_p = 0{,}45k_{p\,\mathrm{kryt}}$ oraz możliwie dużą wartość czasu zdwojenia $T_i$.
4. Przełączyć układ na tryb A, wywołać impulsową zmianę wartości zadanej $SP$ i zmniejszając wartość $T_i$, doprowadzić układ regulacji do granicy stabilności i określić wartość $T_{i\,\mathrm{kryt}}$.
5. Przełączyć układ na tryb M i doprowadzić układ do stanu $PV = SP$.
6. W przypadku wykorzystania regulatora PI należy zastosować nastawy $k_p = 0{,}45k_{p\,\mathrm{kryt}}$, $T_i = 3T_{i\,\mathrm{kryt}}$ i przełączyć układ na tryb A.

W przypadku doboru nastaw regulatora PID należy wykonać czynności wg pkt 1–6, a następnie:

7. Po przełączeniu układu w tryb A wywołać impulsową zmianę wartości zadanej $SP$; stopniowo zwiększać wartość czasu wyprzedzenia regulatora do wartości $T_{d\max}$, przy której w układzie występuje maksymalne tłumienie.
8. Wprowadzić nastawy $T_i = 4{,}5T_{d\max}$ oraz $T_d = T_{d\max}/3$, po czym, zmniejszając wartość $k_p$, doprowadzić układ do wymaganego tłumienia.

### 11.2.4. METODA COHENA-COONA

Metoda Cohena-Coona jest zbliżona do wariantu 2 metody Z-N; dotyczy tylko układów ze statycznymi obiektami regulacji. Wartości nastaw oblicza się wg zależności podanych w tabl. 11.3, na podstawie parametrów modelu obiektu regulacji w postaci

$$G_{\mathrm{ob}}(s) = k_{\mathrm{ob}} \frac{e^{-sT_0}}{T_z s + 1}$$

Parametry modelu wyznacza się na podstawie odpowiedzi skokowej rzeczywistego obiektu regulacji, stosując opisaną w rozdz. 7 metodę siecznej. Według danych literaturowych, nastawy dobrane tą metodą zapewniają uzyskanie przez układ oscylacyjnych odpowiedzi skokowych z przeregulowaniem około 25%.

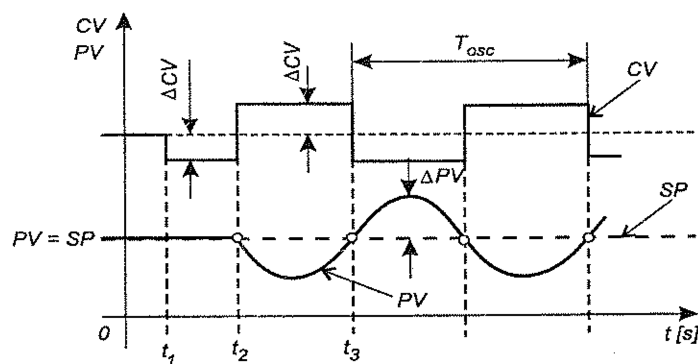
Tablica 11.3

**Nastawy regulatorów wg wzorów Cohena-Coona**

| Algorytm regulatora | $k_p k_{ob}$ | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ |
|---|---|---|---|
| P | $0{,}33 + T_z/T_0$ | – | – |
| PI | $0{,}083 + 0{,}9T_z/T_0$ | $\frac{30 + 3T_0/T_z}{9 + 20T_0/T_z}$ | – |
| PD | $0{,}166 + 1{,}25T_z/T_0$ | – | $\frac{6 - 2T_0/T_z}{22 + 3T_0/T_z}$ |
| PID | $0{,}25 + 1{,}33T_z/T_0$ | $\frac{32 + 6T_0/T_z}{13 + 8T_0/T_z}$ | $\frac{4}{11 + 2T_0/T_z}$ |

## 11.2.5. METODA ÄSTRÖMA-HAGGLUNDA

Nastawy regulatorów przemysłowych o algorytmie PID, wg metody opracowanej w 1984 r. przez Szwedów Karla Äströma i Tore Hagglunda, oblicza się na podstawie parametrów odpowiedzi rzeczywistego obiektu regulacji na zmiany sterowania $CV$ o przebiegu prostokątnym, generowane w otwartym układzie regulacji przez operatora. Należy dobrać dla danego obiektu odpowiednią ze względów technologicznych amplitudę tych zmian i określić częstotliwość, przy której przesunięcie fazowe między sygnałami wyjściowym i wejściowym wynosić będzie 180° (rys. 11.5).




Rys. 11.5. Przebiegi sygnałów $PV$ i $CV$ w trakcie eksperymentu Äströma-Hagglunda



Przebieg procedury jest następujący:

1. W trybie sterowania ręcznego (tryb M), zmieniając $CV$, doprowadzić wielkość regulowaną $PV$ do stanu, w którym sygnał wyjściowy obiektu $PV$ zrówna się z wymaganą wartością zadaną $SP$.
2. Zmienić skokowo sygnał $CV$ o wartość $\Delta CV$ (chwila $t_1$ na rys. 11.5) i obserwować zmiany sygnału $PV$.
3. Gdy nastąpi zauważalna zmiana wielkości regulowanej (chwila $t_2$), zmienić sterowanie w przeciwnym kierunku o wartość $2\Delta CV$.
4. W chwili $t_3$, w której zmieniająca się wielkość regulowana $PV$ osiągnie wartość równą wartości zadanej $SP$, zmienić sterowanie w przeciwnym kierunku o wartość $2\Delta CV$.
5. Powtarzać te czynności, aż ustalą się zmiany wielkości regulowanej $PV$ o stałej amplitudzie, przesunięte w fazie w stosunku do zmian $CV$ o 180°.

Ponieważ oddziaływanie operatora na proces symuluje działanie przekaźnika dwupołożeniowego, metodę tę często nazywa się „przekaźnikową".

Na podstawie otrzymanych przebiegów wielkości regulowanej $PV$ i sygnału sterującego $CV$ należy wyznaczyć okres oscylacji $T_{osc}$ i obliczyć współczynnik $k_u$ zgodnie ze wzorem

$$k_u = \frac{4\Delta CV}{\pi \Delta PV} \tag{11.1}$$

Wykorzystując wyznaczone wartości $T_{osc}$ i $k_u$, nastawy regulatora oblicza się wg wzorów podanych w tabl. 11.4 lub wzorów Zieglera-Nicholsa (tabl. 11.2), podstawiając w miejsce $k_{p\,kryt}$ wartość współczynnika $k_u$.

Tablica 11.4

**Nastawy regulatorów PID wg Äströma-Hagglunda**

| Algorytm regulatora | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|
| P | $0{,}5k_u$ | – | – |
| PI | $0{,}45k_u$ | $0{,}83T_{osc}$ | – |
| PID | $0{,}59k_u$ | $0{,}5T_{osc}$ | $0{,}25T_{osc}$ |

Z porównania tabl. 11.2 i 11.4 wynika, że proponowany przez Äströma-Hagglunda czas wyprzedzenia $T_d$ jest dwukrotnie dłuższy niż obliczony metodą Zieglera-Nicholsa.

Klasyczny eksperyment Zieglera-Nicholsa wymaga ostrożności przy zbliżaniu się do granicy stabilności ze względu na możliwość jej przekroczenia i wywołanie awarii instalacji. Wady tej nie ma metoda Äströma i Hagglunda, ale przeprowadzana ręcznie jest uciążliwa w zastosowaniu do procesów o dużych opóźnieniach i stałych czasowych.

### 11.2.6. TABELARYCZNY DOBÓR NASTAW

Dla szeregu typowych matematycznych modeli obiektów regulacji zostały opracowane tablice lub nomogramy do określania nastaw regulatorów, zapewniających uzyskanie przez układ regulacji określonych właściwości dynamicznych.

W tabl. 11.5 zestawiono wzory określające nastawy regulatorów dla obiektów statycznych, których właściwości zostały przyporządkowane transmitancji

$$G_{ob}(s) = k_{ob}\frac{e^{-sT_0}}{T_z s + 1}$$

Wzory te uwzględniają zróżnicowanie nastaw zależnie od zadania, jakie spełniać ma układ regulacji. Inne muszą być nastawy regulatora w przypadku regulacji stałowartościowej, zapewniające możliwie szybkie kompensowanie zakłóceń, a inne, gdy układ z takim samym obiektem regulacji jest układem nadążnym.

W tabl. 11.6 zestawiono wzory do wyznaczania parametrów odpowiedzi układu regulacji na zakłócenie $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$: czasu regulacji $t_r$, odchyłki statycznej $e_{st}$ oraz wartości maksymalnej odchyłki dynamicznej $e_m$, jeżeli nastawy regulatorów zostały dobrane zgodnie z tabl. 11.5.

Analogiczne dane, odnoszące się do układów regulacji z obiektami astatycznymi przyporządkowanych transmitancji

$$G_{ob}(s) = \frac{e^{-sT_0}}{T_z s}$$

zawierają tabl. 11.7 i 11.8.

Zależności wartości nastaw regulatorów od parametrów modelu obiektu regulacji dla poszczególnych wymagań jakościowych były opracowywane przez ich autorów różnymi metodami. Dlatego zależności podawane przez różnych autorów w niektórych przypadkach prowadzą do uzyskania różniących się nastaw (np. w tabl. 11.5 i 11.9 podano różniące się reguły obliczania nastaw w przypadku tych samych modeli obiektów statycznych).



Jeśli właściwości obiektu regulacji zostały przyporządkowane modelowi w postaci członu inercyjnego wyższego rzędu o transmitancji

$$G_{ob}(s) = k_{ob}\frac{1}{(Ts+1)^n}$$

to poleca się dobierać nastawy regulatorów wg zależności podanych w tabl. 11.10.

Tablica 11.5

**Nastawy regulatorów PID dla obiektów statycznych opisanych transmitancją $G_{ob}(s) = k_{ob}\frac{e^{-sT_0}}{T_z s+1}$ (wg [31])**

| Rodzaj regulacji | | Rodzaj przebiegu | Algorytm regulatora | $k_{ob}k_p T_0/T_z$ | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Stałowartościowa | $z(t)=z_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,3 | – | – |
| | | | PI | 0,6 | $0{,}8 + 0{,}5T_z/T_0$ | – |
| | | | PID | 0,95 | 2,4 | 0,4 |
| | | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 0,7 | – | – |
| | | | PI | 0,7 | $1 + 0{,}3T_z/T_0$ | – |
| | | | PID | 1,2 | 2,0 | 0,4 |
| | | $\min\int e^2 dt$ | P | Nie dobiera się nastaw wg tego kryterium | | |
| | | | PI | 1,0 | $1 + 0{,}35T_z/T_0$ | – |
| | | | PID | 1,4 | 1,3 | 0,5 |
| Nadążna | $w(t)=w_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,3 | – | – |
| | | | PI | 0,35 | $1{,}17T_z/T_0$ | – |
| | | | PID | 0,6 | $1{,}0T_z/T_0$ | 0,5 |
| | | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 0,7 | – | – |
| | | | PI | 0,6 | $1{,}0T_z/T_0$ | – |
| | | | PID | 0,95 | $1{,}36T_z/T_0$ | 0,64 |
| | | $\min\int e^2 dt$ | Nie dobiera się nastaw wg tego kryterium | | | |

Tablica 11.6

**Parametry odpowiedzi układu regulacji na zakłócenie $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$: czas regulacji $t_r$, odchyłka statyczna $e_{st}$, maksymalna odchyłka dynamiczna $e_m$, w układach regulacji o nastawach regulatorów zgodnych z tabl. 11.5**

| Wskaźnik jakości | Przebieg aperiodyczny $\kappa = 0\%$ | | | Przebieg oscylacyjny $\kappa = 20\%$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Algorytm regulatora | | | | | |
| | P | PI | PID | P | PI | PID |
| $e_m/k_{ob}z_0$ | $\frac{T_0}{0{,}3T_z + T_0}$ | $0{,}1 + T_0/T_z$ | $0{,}06 + 0{,}84\frac{T_0}{T_z}$ | $\frac{1{,}2T_0}{0{,}3T_z + T_0}$ | $0{,}05 + 0{,}95\frac{T_0}{T_z}$ | $0{,}05 + 0{,}78\frac{T_0}{T_z}$ |
| $e_{st}/k_{ob}z_0$ | $\frac{T_0}{0{,}3T_z + T_0}$ | 0 | 0 | $\frac{T_0}{0{,}3T_z + T_0}$ | 0 | 0 |
| $t_r/T_0$ | 4,5 | 8 | 5,5 | 6,5 | 12 | 7 |

Tablica 11.7

**Nastawy regulatorów PID dla obiektów astatycznych opisanych transmitancją $G_{ob}(s) = \frac{e^{-sT_0}}{T_z s}$ (wg [25])**

| Rodzaj przebiegu | Algorytm regulatora | Regulacja stałowartościowa $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$ | | | Regulacja nadążna $w(t) = w_0 \cdot 1(t)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k_p T_0/T_z$ | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ | $k_p T_0/T_z$ | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ |
| $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,37 | – | – | 0,37 | – | – |
| | PI | 0,46 | 5,75 | – | 0,37 | $\infty$ | – |
| | PID | 0,65 | 5,0 | 0,23 | 0,65 | $\infty$ | 0,4 |
| $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 0,7 | – | – | 0,7 | – | |
| | PI | 0,7 | 3,0 | – | 0,7 | $\infty$ | – |
| | PID | 1,1 | 2,0 | 0,37 | 1,1 | $\infty$ | 0,53 |
| min $\int e^2 dt$ | P | Nie dobiera się nastaw wg tego kryterium | | | Nie dobiera się nastaw wg tego kryterium | | |
| | PI | 1,045 | 4,3 | – | | | |
| | PID | 1,365 | 1,6 | 0,5 | | | |



Tablica 11.8

**Parametry odpowiedzi układu regulacji na zakłócenie $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$: czas regulacji $t_r$, odchyłka statyczna $e_{st}$, maksymalna odchyłka dynamiczna $e_m$, w układach regulacji o nastawach regulatorów zgodnych z tabl. 11.7**

| Rodzaj wskaźnika jakości | Przebieg aperiodyczny $\kappa = 0\%$ | | | Przebieg oscylacyjny $\kappa = 20\%$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Algorytm regulatora | | | | | |
| | P | PI | PID | P | PI | PID |
| $e_m/z_0$ | $2{,}7\frac{T_0}{T_z}$ | $1{,}9\frac{T_0}{T_z}$ | $1{,}38\frac{T_0}{T_z}$ | $1{,}43\frac{T_0}{T_z}$ | $1{,}62\frac{T_0}{T_z}$ | $1{,}12\frac{T_0}{T_z}$ |
| $e_{st}/z_0$ | $2{,}7\frac{T_0}{T_z}$ | 0 | 0 | $2{,}17\frac{T_0}{T_z}$ | 0 | 0 |
| $t_r/T_0$ | 5,5 | 13,2 | 9,8 | 7,5 | 15 | 12 |

Tablica 11.9

**Nastawy regulatorów PID wg Chiena, Hronesa i Reswicka w przypadku obiektów statycznych o transmitancji $G_{ob}(s) = k_{ob}\frac{e^{-sT_0}}{T_z s + 1}$**

| Rodzaj przebiegu | Algorytm regulatora | Regulacja stałowartościowa $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$ | | | Regulacja nadążna $w(t) = w_0 \cdot 1(t)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k_{ob}k_p T_0/T_z$ | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ | $k_{ob}k_p T_0/T_z$ | $T_i/T_0$ | $T_d/T_0$ |
| $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,3 | – | – | 0,3 | – | – |
| | PI | 0,6 | 4,0 | – | 0,35 | 1,2 | – |
| | PID | 0,95 | 2,4 | 0,42 | 0,6 | 1,0 | 0,5 |
| $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 0,7 | – | – | 0,7 | – | – |
| | PI | 0,7 | 2,3 | – | 0,6 | 1,0 | – |
| | PID | 1,2 | 2,0 | 0,42 | 0,95 | 1,35 | 0,47 |

Tablica 11.10

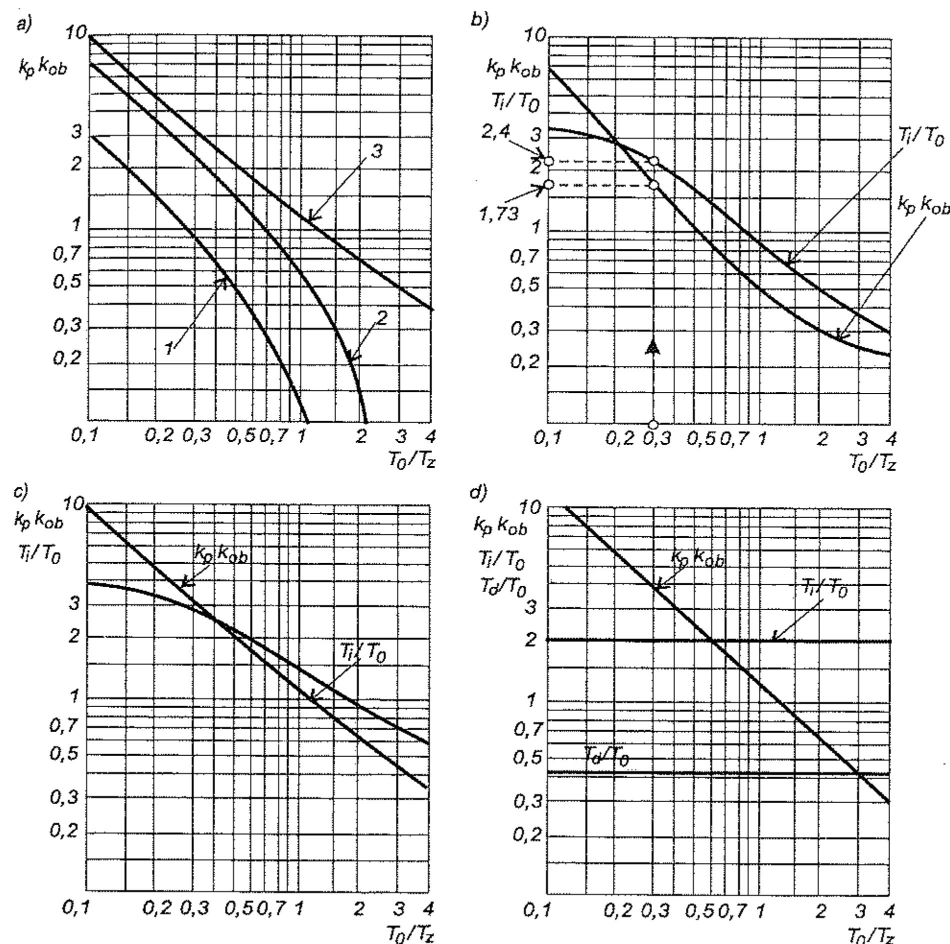
**Nastawy regulatorów w przypadku obiektów statycznych opisanych transmitancją**

$$G_{ob}(s) = k_{ob}\frac{1}{(Ts+1)^n}$$

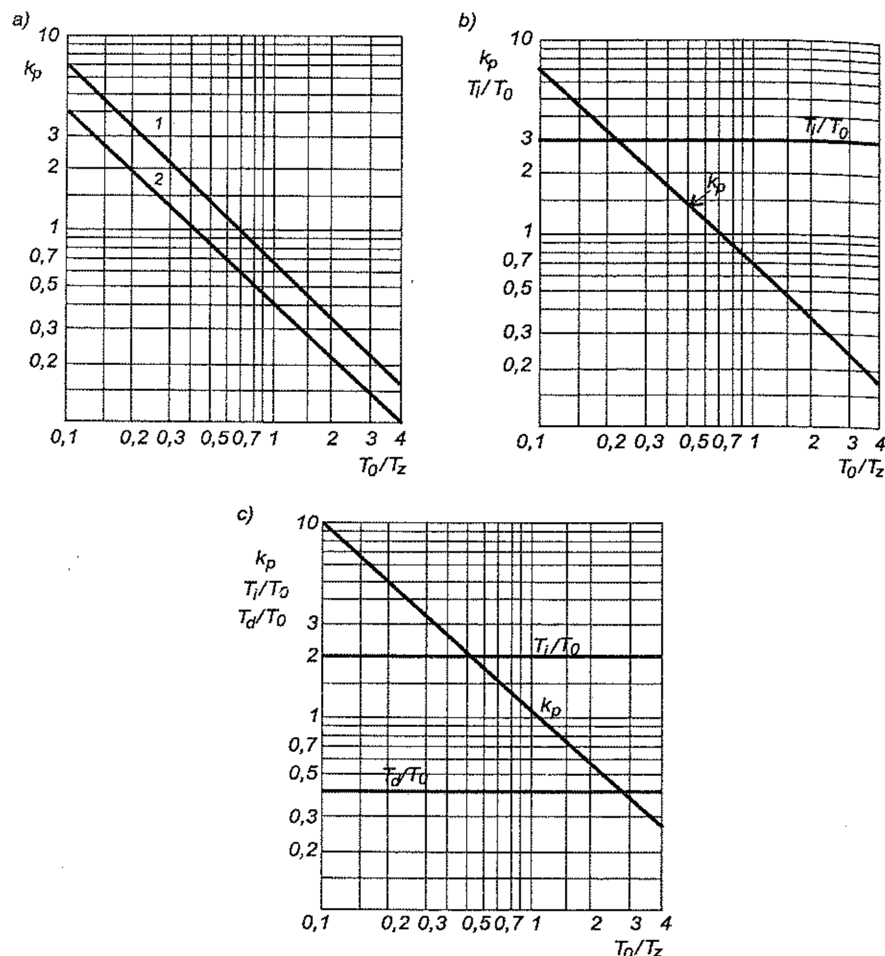
| $n$ | Rodzaj regulacji | Rodzaj przebiegu | Algorytm regulatora | $k_p\,k_{ob}$ | $T_i/T$ | $T_d/T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Stałowartościowa $z(t)=z_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 6,6 | – | – |
| | | | PI | 2,9 | 1,05 | – |
| | | | PID | 19,2 | 0,62 | 0,16 |
| | | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 3,1 | – | – |
| | | | PI | 1,75 | 1,3 | – |
| | | | PID | 18,5 | 0,75 | 0,185 |
| | Nadążna $w(t)=w_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 4,4 | – | – |
| | | | PI | 1,7 | 1,4 | – |
| | | | PID | 23,0 | 2,0 | 0,5 |
| | | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,8 | – | – |
| | | | PI | 1,0 | 1,55 | – |
| | | | PID | 7,4 | 2,0 | 0,5 |
| 3 | Stałowartościowa $z(t)=z_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 1,0 | – | – |
| | | | PI | 1,7 | 2,1 | – |
| | | | PID | 3,2 | 1,9 | 0,48 |
| | | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,5 | – | – |
| | | | PI | 0,75 | 1,9 | – |
| | | | PID | 3,1 | 2,2 | 0,55 |
| | Nadążna $w(t)=w_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 1,15 | – | – |
| | | | PI | 0,83 | 1,7 | – |
| | | | PID | 2,5 | 2,4 | 0,6 |
| | | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,59 | – | – |
| | | | PI | 0,45 | 1,5 | – |
| | | | PID | 1,75 | 2,6 | 0,65 |
| 4 | Stałowartościowa $z(t)=z_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 1,0 | – | – |
| | | | PI | 1,2 | 2,4 | – |
| | | | PID | 1,9 | 2,6 | 0,65 |
| | | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,5 | – | – |
| | | | PI | 0,57 | 2,3 | – |
| | | | PID | 1,0 | 2,9 | 0,73 |
| | Nadążna $w(t)=w_0\cdot 1(t)$ | $\kappa = 20\%$ min $t_r$ | P | 1,1 | – | – |
| | | | PI | 0,57 | 1,9 | – |
| | | | PID | 1,2 | 2,7 | 0,68 |
| | | $\kappa = 0\%$ min $t_r$ | P | 0,3 | – | – |
| | | | PI | 0,46 | 2,2 | – |
| | | | PID | 0,78 | 2,7 | 0,68 |



Oprócz przytoczonych tablic, do doboru nastaw regulatorów można wykorzystać nomogramy (rys. 11.6 i 11.7) [8]. Są one szczególnie przydatne w przypadku zmian parametrów obiektu w trakcie eksploatacji układu regulacji. Nomogramy te podają wartości parametrów regulatora w funkcji stosunku $T_0/T_z$ stałych czasowych obiektu. Osie pionowa i pozioma wykresów mają podziałki logarytmiczne dziesiętne.




Rys. 11.6. Nomogramy doboru nastaw regulatorów dla obiektów statycznych: a) nastawy regulatora P (1 – dla $\kappa = 0\%$, 2 – dla $\kappa = 20\%$, 3 – dla min $\int e^2 dt$), b) nastawy regulatora PI dla $\kappa = 20\%$, c) nastawy regulatora PI dla min $\int e^2 dt$, d) nastawy regulatora PID dla $\kappa = 20\%$




Rys. 11.7. Nomogramy doboru nastaw regulatorów dla obiektów astatycznych o transmitancji $G_{ob}(s)=e^{-sT_0}\frac{1}{T_z s}$ : a) nastawy regulatora P (1 – dla $\kappa=20\%$ , 2 – dla $\kappa=0\%$ ), b) nastawy regulatora PI dla $\kappa=20\%$ , c) nastawy regulatora PID dla $\kappa=20\%$

Na podstawie nomogramów łatwo można określić pożądane zmiany nastaw regulatora, zależnie od zmian właściwości dynamicznych obiektu regulacji.

Sposób korzystania z monogramów przedstawiono na przykładzie doboru nastaw regulatora PI wg kryterium przebiegu z $\kappa=20\%$ w przypadku obiektu statycznego o transmitancji zastępczej $G_{ob}(s)=2\frac{1}{90s+1}e^{-27s}$ .



Z nomogramu na rys. 11.6b dla stosunku $T_0/T_z=27/90\approx 0{,}3$ odczytujemy następujące wartości: $k_p k_{ob}=1{,}73$ oraz $T_i/T_0=2{,}4$ , skąd wynikają wartości nastaw: $k_p=0{,}865$ oraz $T_i=64{,}8$ s.

Wartości nastaw regulatorów PID dla układów regulacji typowych wielkości fizycznych podano w tabl. 11.11.

Tablica 11.11

**Wartości nastaw regulatorów dla układów regulacji typowych wielkości fizycznych**

| Wielkość regulowana | Rodzaj regulatora | $x_p$ [%] | $T_i$ [min] |
|---|---|---|---|
| Temperatura | PID | 10÷50 | 1÷10 |
| Ciśnienie | PI | 10÷30 | 0,2÷1 |
| Natężenie przepływu | PI | 100÷200 | 0,2÷0,5 |
| Skład | PID | 200÷500 | 10÷20 |
| Poziom płynu | P<br>PI | 100<br>50 | –<br>10 |

## 11.3. DOBÓR NASTAW REGULATORÓW MIKROPROCESOROWYCH I STEROWNIKÓW PLC O WYJŚCIU CIĄGŁYM

Zastosowanie przedstawionych w rozdz. 11.2 metod do doboru nastaw regulatorów mikroprocesorowych wymaga modyfikacji tablic nastaw, ze względu na to, że:

- przytoczone tablice nastaw zostały opracowane dla regulatorów analogowych z interakcją (tzn. o strukturze szeregowej), natomiast aktualnie stosowane regulatory mikroprocesorowe mają strukturę równoległą;
- częstotliwość próbkowania regulatora ma wpływ na przebiegi przejściowe układu regulacji. Wynikające z procesu wyliczania wartości sygnału wyjściowego regulatora opóźnienie może, w przypadku nastaw dobranych jak dla regulatorów analogowych, doprowadzić nawet do niestabilności układu regulacji.

Zatem, w przypadku regulatorów mikroprocesorowych o wyjściu ciągłym i sterowników PLC, zastosowanych do sterowania procesami szybkozmiennymi, nastawy muszą uwzględniać okres próbkowania (impulsowania) $T_p$ sygnałów. Okres ten powinien być dobierany w zależności od dynamiki obiektu regulacji. Wartości okresu próbkowania $T_p$ dla typowych układów podano w tabl. 11.12.

Tablica 11.12

**Wartości okresu impulsowania $T_p$**

| Wielkość regulowana | Okres impulsowania $T_p$ [s] |
|---|---|
| Natężenie przepływu gazów | $0,2 \div 2$ |
| Natężenie przepływu płynów | $1 \div 5$ |
| Ciśnienie | $5 \div 20$ |
| Poziom płynu | $10 \div 30$ |
| Temperatura | $30 \div 150$ |

Nastawy regulatorów w układach z obiektami statycznymi, których właściwości określają parametry $k_{ob}$, $T_0$ i $T_z$, można dobierać, wykorzystując zależności podane w tabl. 11.13.

Tablica 11.13

**Nastawy regulatorów mikroprocesorowych dla obiektów statycznych [4]**

| Algorytm regulatora | $k_p$ | $T_p/T_i$ | $T_p/T_d$ |
|---|---|---|---|
| P | $T_z/k_{ob}(T_0+T_p)$ | – | – |
| PI | $\frac{1}{k_{ob}}\left[\frac{0,9T_z}{T_0+0,5T_p}-\frac{0,135T_zT_p}{(T_0+0,5T_p)^2}\right]$ | $\frac{0,27T_zT_p}{k_{ob}(T_0+0,5T_p)^2}$ | – |
| PID | $\frac{1}{k_{ob}}\left[\frac{1,2T_z}{T_0+T_p}-\frac{0,3T_zT_p}{(T_0+0,5T_p)^2}\right]$ | $\frac{0,6T_zT_p}{k_p(T_0+0,5T_p)^2}$ | $\frac{0,5T_z}{k_{ob}T_p}$ |
| $T_p$ – okres próbkowania | | | |

W praktyce wykorzystywana jest także metoda doboru nastaw regulatorów mikroprocesorowych na podstawie wyników eksperymentu wg metody Zieglera-Nicholsa, w wyniku którego wyznacza się okres drgań niegasnących $T_{osc}$ i krytyczną wartość wzmocnienia $k_{p\,kryt}$ układu zamkniętego. Na podstawie tych parametrów i zależności podanych w tabl. 11.14 wyznacza się wartości nastaw.

Zależności podane w tabl. 11.13 i 11.14 służą tylko do określania nastaw regulatorów PID o strukturze równoległej, tj. regulatorów o transmitancji operatorowej

$$G_r(s) = k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d}s+1}\right) \tag{11.2}$$



W sterownikach *PLC* i w niektórych regulatorach mikroprocesorowych, a także w środowisku MATLAB zaimplementowany jest algorytm PID w postaci

$$G_r(s) = P+\frac{I}{s}+\frac{Ds}{\frac{1}{N}s+1} \tag{11.3}$$

Aby można było korzystać z zależności podanych w tabl. 11.13 i 11.14, należy przyjąć, że:

$$P = k_p, \quad I = \frac{k_p}{T_i}, \quad D = k_p T_d, \quad N = \frac{k_d}{T_d} \tag{11.4}$$

Tablica 11.14

**Nastawy regulatorów mikroprocesorowych na podstawie wyników eksperymentu Zieglera-Nicholsa [4]**

| Algorytm regulatora | $k_p$ | $T_i/T_p$ | $T_d/T_p$ |
|---|---|---|---|
| P | $0,5k_{p\,kryt}$ | – | – |
| PI | $k_{p\,kryt}\left(0,45-0,27\frac{T_p}{T_{osc}}\right)$ | $0,833\frac{T_{osc}}{T_p}-0,5$ | – |
| PID | $0,6k_{p\,kryt}\left(1-\frac{T_p}{T_{osc}}\right)$ | $0,5\left(\frac{T_{osc}}{T_p}-1\right)$ | $0,125\left(\frac{T_{osc}}{T_p}\right)^2/\left(\frac{T_{osc}}{T_p}-1\right)$ |

## 11.4. SAMOSTROJENIE I ADAPTACJA

**Samostrojenie** (ang. *autotuning*) polega na dostosowywaniu się nastaw regulatora do występującego w układzie obiektu o nieznanych właściwościach dynamicznych, w wyniku dokonującego się automatycznie eksperymentu, inicjowanego przez operatora.

**Adaptacja** polega na samoczynnym ciągłym lub okresowym dostrajaniu nastaw regulatora pod wpływem zmian właściwości dynamicznych obiektu. W przeciwieństwie do samostrojenia, cały czas analizowane są właściwości obiektu.

Regulatory z możliwością samostrojenia i adaptacji są bardzo przydatne w przypadku obiektów o nieliniowych charakterystykach statycznych, zwłaszcza przy zmianie punktu pracy, a także obiektów o parametrach zmiennych w czasie.

Regulator mikroprocesorowy z możliwością samostrojenia i adaptacji jako pierwsza wprowadziła w 1981 roku firma Leeds-Northrup, a niedługo potem firma ASEA. Obecnie samostrojenie i adaptacja stały się niemal powszechne, przy czym procedura samostrojenia jest implementowana w regulatorach mikroprocesorowych (sterownikach), adaptacja – jako bardziej złożona – stosowana jest w większych systemach automatyki lub regulatorach specjalizowanych.

Teoria samostrojenia i adaptacji jest znana od wielu lat, ale dopiero rozwój techniki cyfrowej i systemów ekspertowych pozwolił na opracowanie algorytmów, które można było zastosować w przemysłowych układach regulacji. Opracowywane algorytmy muszą charakteryzować się odpornością na zakłócenia technologiczne procesu w trakcie trwania procedury samostrojenia. Zakłóceniami tymi są także szumy pomiarowe, które mogą mieć istotny wpływ na wynik doboru nastaw dla obiektów szybkich (np. w układach regulacji przepływu). W przypadku procesów wolnozmiennych (np. w układach regulacji temperatury) szumy te mają mało znaczący wpływ. Procedury samostrojenia zaimplementowane w regulatorach (sterownikach) zostały opracowane tylko dla regulatorów o algorytmach PI i PID oraz obiektów statycznych o wartościach stosunku $T_0/T_z = 0{,}1 \div 0{,}6$ i wzmocnieniu $k_{ob} \geq 0{,}1$. Nastawy regulatorów o algorytmie P i PD (takie występują np. w układach regulacji o strukturze kaskadowej) dobierane są metodami konwencjonalnymi.

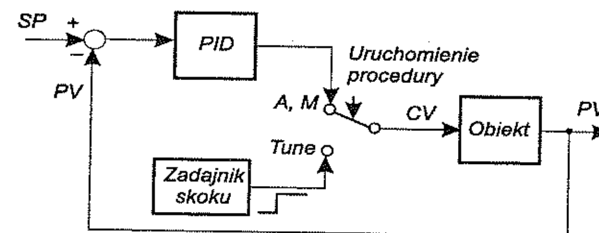
W obecnie produkowanych regulatorach (sterownikach) zaimplementowane są głównie procedury samostrojenia wykorzystujące:
- metodę odpowiedzi skokowej,
- metodę cyklu granicznego,
- metodę odpowiedzi skokowej uzupełnioną regułami ekspertowymi.

### 11.4.1. METODA ODPOWIEDZI SKOKOWEJ

Procedura samostrojenia, w której wykorzystano metodę odpowiedzi skokowej, składa się z dwóch podstawowych etapów. Na pierwszym etapie, po przeprowadzonym w trybie sterowania ręcznego rozruchu instalacji i uruchomieniu procedury samostrojenia (pozycja TUNE przełącznika, rys. 11.8), zadajnik skoku zmienia skokowo sygnał sterujący *CV* przy otwartym układzie regulacji; przebieg zmian wielkości regulowanej *PV* jest rejestrowany. Na etapie drugim, po upływie czasu niezbędnego do ustalenia się wielkości regulowanej, regulator wyznacza parametry założonego modelu matematycznego obiektu regulacji. Na podstawie tych parametrów regulator oblicza nastawy wg zaimplementowanych wykresów lub tablic doboru nastaw i prezentuje je operatorowi do zatwierdzenia lub (w zależności od implementacji) bez akceptacji wstawia je do algorytmu sterowania i przechodzi do trybu sterowania automatycznego z obliczonymi nastawami.



W niektórych regulatorach (np. LB-600 firmy EL-LAB), oprócz nastaw, wyświetlane są także wyliczone przez regulator parametry obiektu.



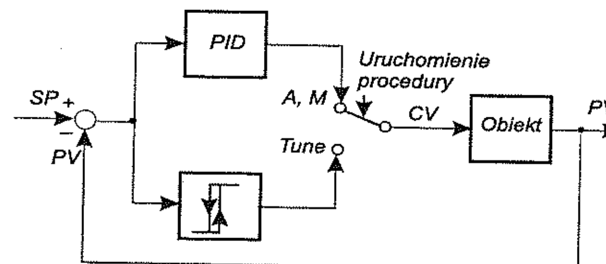

Rys. 11.8. Schemat ideowy procedury samostrojenia metodą odpowiedzi skokowej

Podstawową wadą metody odpowiedzi skokowej jest jej wrażliwość na zakłócenia zewnętrzne, ponieważ eksperyment prowadzony jest w układzie otwartym.

Większość procedur wymaga deklaracji co do wartości amplitudy skoku sygnału *CV*, dopuszczalnej amplitudy zmian *PV*, czasu ustalania się odpowiedzi obiektu, kryterium doboru nastaw. Wymagana jest więc pewna wiedza *a priori* o właściwościach dynamicznych obiektu. Zdarza się jednak, zwłaszcza przy zbyt małej amplitudzie skoku lub w przypadku nietypowego obiektu, że obliczone nastawy są nieodpowiednie.

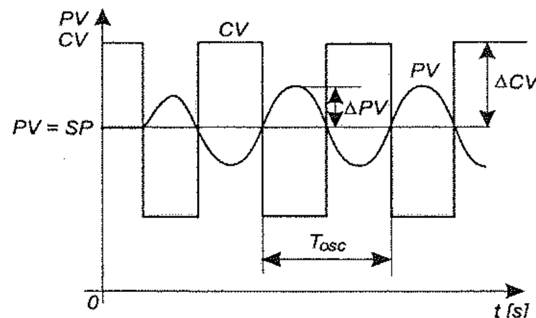
### 11.4.2. METODA CYKLU GRANICZNEGO

Klasyczny eksperyment Zieglera-Nicholsa rozpoznawania właściwości obiektu regulacji nie jest wykorzystywany w procedurach samostrojenia, ze względu na konieczność doprowadzania układu do granicy stabilności i możliwość utraty stabilności. Wady tej nie ma eksperyment Äströma-Hagglunda (patrz rozdz. 11.2.5). Stąd ogólne zainteresowanie wzbudziła metoda automatycznej realizacji tego eksperymentu w procedurach samostrojenia (rys. 11.9).




Rys. 11.9. Schemat ideowy układu do automatycznej realizacji eksperymentu Äströma-Hagglunda

Podczas trwania eksperymentu, zamiast regulatora PID, obiektem steruje przekaźnikowy regulator dwupołożeniowy. W zamkniętym układzie regulacji z takim regulatorem powstają stałe oscylacje wielkości regulowanej wokół wartości zadanej (rys. 11.10). Takie działanie układu nazywane jest w teorii układów nieliniowych cyklem granicznym (rozdz. 15); stąd określenie procedury samostrojenia – metodą cyklu granicznego. Parametrami tego cyklu są: amplitudy zmian wielkości regulowanej *PV* i sygnału sterującego *CV* oraz okres oscylacji $T_{osc}$. Parametry te służą do obliczenia nastaw ciągłego regulatora PID, zgodnie z algorytmem podanym w rozdz. 11.2.5.




Rys. 11.10. Przebieg zmian wielkości regulowanej *PV* wywołany sygnałem *CV* regulatora przekaźnikowego

Procedura samostrojenia metodą cyklu granicznego jest sekwencją następujących czynności:

- przełączenie układu ze sterowania z regulatorem PID o działaniu ciągłym na sterowanie z dwupołożeniowym regulatorem przekaźnikowym ze strefą histerezy *H* (pozycja Tune),
- określenie parametrów cyklu granicznego,
- obliczenie nastaw regulatora,
- wstawienie obliczonych nastaw do algorytmu P, PI lub PID regulatora,
- przełączenie układu na regulację ciągłą z nastawami wyliczonymi przez procedurę samostrojenia.

Metoda cyklu granicznego jest jedną z najpewniejszych metod samostrojenia. W przypadku większości procesów, obliczone nastawy regulatora zapewniają w układzie regulacji zapas modułu ok. 6 dB i zapas fazy ok. 45°.

Jeżeli w sygnale mierzonym (*PV*) występują szybkozmienne zakłócenia, które mogą powodować wielokrotne przełączenia przekaźnika w chwilach, gdy wielkość mierzona jest równa zadanej, niezbędne jest zastosowanie przekaźnika z histerezą. W przeciwnym przypadku eksperyment nie da wiarygodnych wyników. Układ ze względu na częste przełączenia byłby źródłem hałasu, a styki przekaźnika uległyby szybkiemu zużyciu. Przekaźnik z histerezą powinien być zastosowany także w przypadku, gdy opóźnienie lub rząd obiektu nie są znaczne.

Jeżeli opóźnienie lub rząd obiektu są znaczne, oscylacje wielkości regulowanej o dostatecznej amplitudzie powstaną już dla strefy histerezy przekaźnika $H = 0$, przy amplitudzie sygnału sterującego *CV* o wartości kilku procent zakresu zmian.

Metodę cyklu granicznego można uczynić bardziej odporną na wpływ zakłóceń, uśredniając wartości $k_u$ i $T_{osc}$ z kilku okresów oscylacji. Metoda ta jest idealnym narzędziem do wyznaczania wstępnych wartości nastaw w przypadku bardziej skomplikowanych algorytmów adaptacji. Okres drgań może być wykorzystywany także do wyznaczania właściwego okresu próbkowania sygnału do estymacji parametrów obiektu.

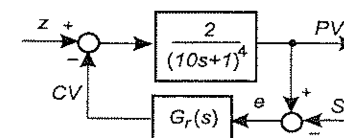
Omówione, zaimplementowane w produkowanych obecnie regulatorach, procedury samostrojenia nie rozwiązują wszystkich problemów związanych z doborem nastaw regulatorów. Dodatkowe korekty są konieczne np. wtedy, kiedy sygnał z przetwornika pomiarowego jest zniekształcony przez szumy pomiarowe, czy wtedy, gdy dynamika procesu zmienia się zależnie od kierunku ruchu lub obrotów zespołu wykonawczego. Dokładność procesu samostrojenia regulatora może być również ograniczona, gdy zachowanie się sterowanego procesu nie jest całkowicie przewidywalne. W takim przypadku samostrojenie pozwala obliczać tylko wstępne, przybliżone wartości nastaw – z koniecznością ich ręcznego dostrojenia.

**Przykład 11.1**

Wyznaczyć nastawy regulatorów o algorytmach P, PI, PID w układzie regulacji przedstawionym na rys. 11.11, wykorzystując metody:

a) analityczną, wg reguł Zieglera-Nicholsa (wariant 1),
b) eksperymentalną Zieglera-Nicholsa (wariant 1),
c) eksperymentalną Äströma-Hagglunda.

Metody b) i c) zrealizować w środowisku MATLAB z nakładką SIMULINK.




Rys. 11.11. Schemat blokowy do przykładu 11.1

*Rozwiązanie*

Ad a)

Istotą metody Zieglera-Nicholsa (wariant 1) doboru nastaw regulatorów jest ocena stabilności układu zamkniętego, złożonego z danego obiektu regulacji i regulatora o algorytmie P. Na podstawie parametrów tego układu doprowadzonego

do granicy stabilności, tj. wzmocnienia krytycznego $k_{p\,\mathrm{kryt}}$ regulatora, wywołującego w układzie oscylacje o stałej amplitudzie i okresu $T_{\mathrm{osc}}$ tych oscylacji, dobiera się nastawy zgodnie z tabl. 11.2.

W rozważanym przykładzie znana jest transmitancja operatorowa obiektu regulacji, zatem parametry $k_{p\,\mathrm{kryt}}$ i $T_{\mathrm{osc}}$ układu zamkniętego, będącego na granicy stabilności, można wyznaczyć analitycznie na podstawie kryterium Nyquista. Zgodnie z tym kryterium, układ zamknięty jest na granicy stabilności, jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przechodzi przez punkt o współrzędnych (–1, j0).

W rozważanym przykładzie transmitancja operatorowa układu otwartego z regulatorem P o wzmocnieniu $k_p$ ma postać

$$G_0(s) = k_p \frac{2}{(10s+1)^4} \tag{11.5}$$

skąd wynika transmitancja widmowa

$$G_0(j\omega) = G_0(s)\big|_{s=j\omega} = k_p \frac{2}{(10j\omega+1)^4} = M(\omega)\,\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)} \tag{11.6}$$

Aby charakterystyka amplitudowo-fazowa przechodziła przez punkt (–1, j0), muszą być spełnione warunki:

$$M(\omega_{-\pi}) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi \tag{11.7}$$

Moduł $M(\omega)$ i argument $\varphi(\omega)$ transmitancji (11.6) są wyrażone przez zależności (rozdz. 5):

$$M(\omega) = k_p \frac{2}{\left(\sqrt{10^2\omega+1}\right)^4}, \qquad \varphi(\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,10\omega \tag{11.8}$$

Zatem, z równania

$$-4\,\mathrm{arctg}\,10\omega_{-\pi} = -\pi \tag{11.9}$$

otrzymuje się $\omega_{-\pi} = 0{,}1$ rad/s, skąd

$$T_{\mathrm{osc}} = \frac{2\pi}{\omega_{-\pi}} \approx \frac{6{,}28}{0{,}1} = 62{,}8 \ \mathrm{s}$$



a z równania

$$M(\omega_{-\pi}) = k_{p\,\mathrm{kryt}} \frac{2}{\left(\sqrt{10^2\omega_{-\pi}^2+1}\right)^4} = k_{p\,\mathrm{kryt}} \frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = 1 \tag{11.10}$$

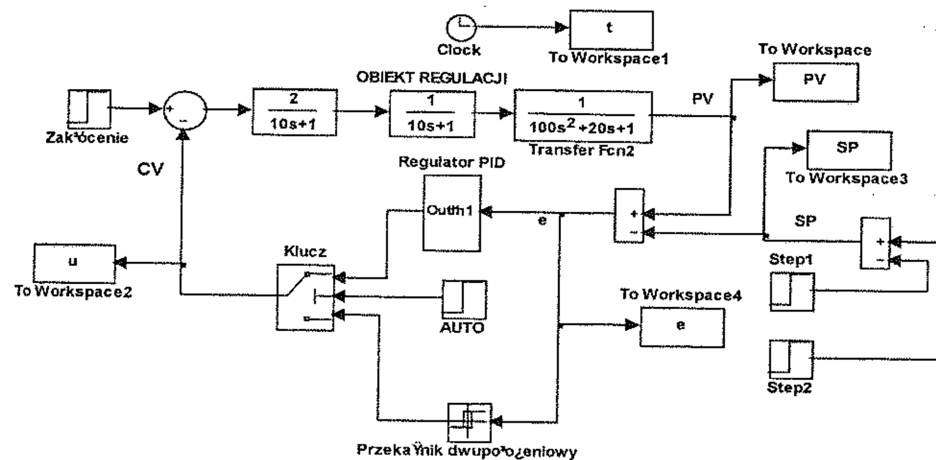
$k_{p\,\mathrm{kryt}} = 2$.

Na podstawie tabl. 11.2 dla $k_{p\,\mathrm{kryt}} = 2$ i $T_{\mathrm{osc}} = 62{,}8$ s obliczamy nastawy regulatorów:

- P: $k_p = 1$;
- PI: $k_p = 0{,}9$, $T_i = 53{,}8$ s;
- PID: $k_p = 1{,}2$, $T_i = 31{,}4$ s, $T_d = 7{,}53$ s.

Ad b)

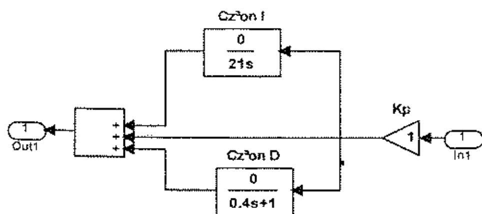
Za pomocą edytora graficznego nakładki SIMULINK stworzono schemat modelu symulacyjnego układu regulacji, w którym przeprowadzony zostanie dobór nastaw regulatora wg eksperymentu Zieglera-Nicholsa oraz Äströma-Hagglunda. Schemat ten przedstawiono na rys. 11.12.




Rys. 11.12. Schemat komputerowy układu regulacji do symulacji procedur Zieglera-Nicholsa i Äströma-Hagglunda

Aby przeprowadzić eksperyment Zieglera-Nicholsa, w zastosowanym regulatorze o algorytmie rzeczywistym PID (rys. 11.13) należy wyłączyć działanie cał-

kujące I oraz różniczkujące D, wpisując zero do liczników odpowiednich bloków dynamicznych. Początkową wartość wzmocnienia regulatora ustawia się na wartość $k_p = 0,5$. W oknie dialogowym zadajników *step1* i *step2* wpisuje się amplitudę wymuszenia skokowego równą 1. Wymuszenie z zadajnika *step2* jest opóźnione względem wymuszenia z zadajnika *step1* o 20 s. Zadajniki te będą zatem, zgodnie z wymogami procedury Zieglera-Nicholsa, generować w układzie impulsową zmianę wartości zadanej *SP* o czasie trwania wynoszącym 20 s. Wymuszenie impulsowe zostanie wprowadzone po upływie 10 s od momentu startu symulacji. Działanie zakłócenia jest wyłączone. Klucz przełącza się na tryb pracy układu z regulatorem ciągłym i po ustawieniu parametrów symulacji uruchamia symulację.




Rys. 11.13. Schemat komputerowy regulatora o rzeczywistym algorytmie PID z wyłączonym działaniem I, D

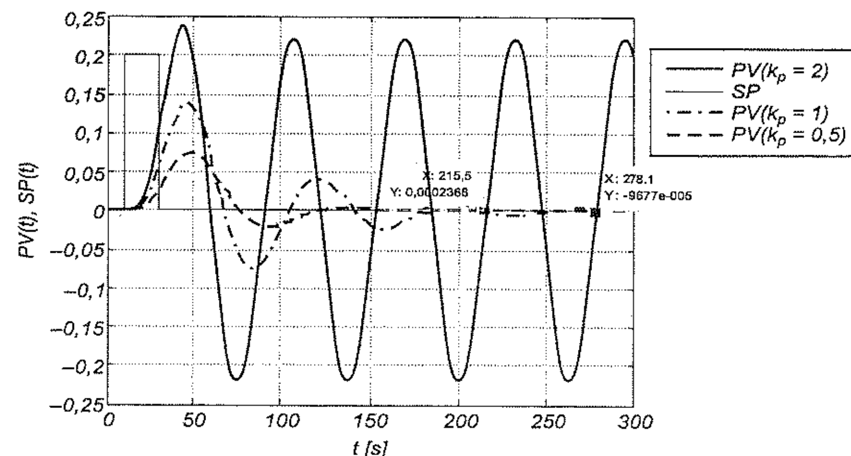
W oknie dialogowym bloku *simulation* wpisano następujące parametry symulacji:
- czas zakończenia symulacji: 300 s,
- algorytm numeryczny: metoda ODE 45 ze zmiennym krokiem całkowania,
- maksymalny krok całkowania: 0,001,
- błąd względny: 1.e-8.

Po skończonej symulacji, poleceniem *plot(t,y);grid,* wpisanym w oknie *Command Window*, otrzymuje się wykres wielkości regulowanej *PV*, wywołany impulsową zmianą wielkości zadanej *SP*. Przebieg ten jest silnie tłumiony, co oznacza, że wartość nastawionego wzmocnienia regulatora jest za mała. Zatem, w kolejnych symulacjach należy zwiększać wzmocnienie regulatora aż do wartości $k_p = k_{kryt}$, przy której wystąpią oscylacje wielkości regulowanej o stałej amplitudzie.

Po odpowiednim powiększeniu fragmentów wykresu przedstawionego na rys. 11.14, można odczytać wartość okresu niethumionych oscylacji wielkości regulowanej $T_{osc} = 62,6$ s, przy wzmocnieniu regulatora $k_p = k_{kryt} = 2$, co w zasadzie jest zgodne z wynikami uzyskanymi analitycznie.

Przeprowadzona symulacja przebiegała zgodnie z trybem postępowania operatora przy doborze nastaw rzeczywistego układu przemysłowego.






Rys. 11.14. Przebiegi wielkości regulowanej *PV* i zadanej *SP* w trakcie eksperymentu Zieglera-Nicholsa

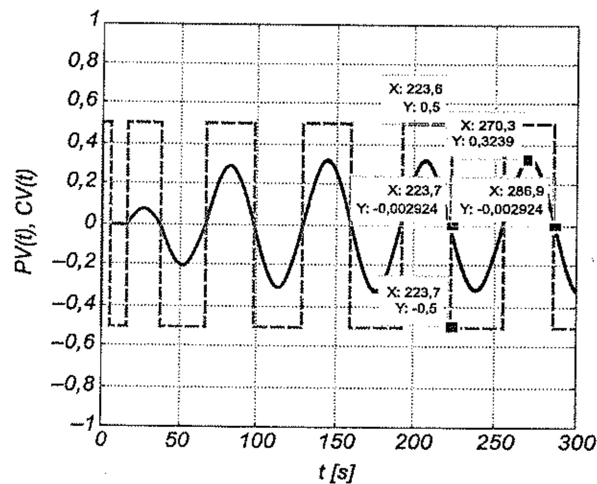
**Ad c)**

W przypadku metody Äströma-Hagglunda nastawy regulatora PID dobierane są na podstawie parametrów cyklu granicznego, występującego w układzie zamkniętym z danym obiektem regulacji i regulatorem w postaci przekaźnika dwupołożeniowego. Parametrami tymi są amplitudy sygnału sterowania *CV* i wielkości regulowanej *PV*, na podstawie których oblicza się wartość współczynnika $k_u$ (wg wzoru (11.1)) oraz okres oscylacji $T_{osc}$.

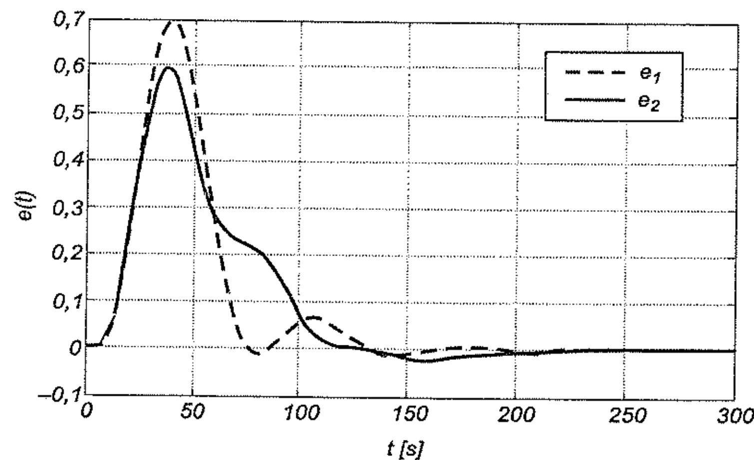
Należy zatem w układzie wg rys. 11.12 dokonać za pomocą klucza przełączenia układu ze sterowania z wykorzystaniem regulatora PID, na sterowanie za pomocą przekaźnika dwupołożeniowego z wartością zadaną $SP = 0$ (w zadajnikach *step1* i *step2* ustawić wartości zerowe). Wynikiem procesu symulacji jest wykres (rys. 11.15), z którego odczytuje się parametry: $\Delta PV = 0,3239$, $\Delta CV = 0,5$, a stąd

$$k_u = \frac{4\Delta CV}{\pi \Delta PV} = \frac{4 \cdot 0,5}{3,14 \cdot 0,3239} = 1,966, \quad T_{osc} = 286,9 - 223,7 = 63,2 \text{ s}$$

Na podstawie tabl. 11.4, dla $k_u = 1,966$ i $T_{osc} = 63,2$ s, obliczane są nastawy regulatorów:
- P: $k_p = 0,98$;
- PI: $k_p = 0,88$, $T_i = 52,46$ s;
- PID: $k_p = 1,16$, $T_i = 31,6$ s, $T_d = 15,8$ s.




Rys. 11.15. Przebiegi wielkości regulowanej $PV$ (linia ciągła) i sterowania $CV$ (linia przerywana) uzyskane w wyniku eksperymentu Äströma-Hagglunda (odczytana wartość okresu oscylacji $T_{osc} = 63{,}2$ s)




Rys. 11.16. Porównanie przebiegu odchyłki regulacji wywołanej zakłóceniem skokowym w układzie regulacji z regulatorem PID o nastawach dobranych wg Zieglera-Nicholsa (przebieg $e_1$) oraz wg Äströma-Hagglunda (przebieg $e_2$)

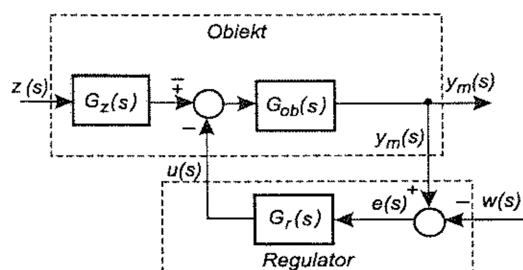


Jak widać, istotna różnica, w stosunku do nastaw wg Zieglera-Nicholsa, występuje tylko w nastawie czasu wyprzedzenia $T_d$.

W celu porównania efektów obu metod, na rys. 11.16 przedstawiono, uzyskane metodą symulacji, przebiegi odchyłki regulacji wywołanej zakłóceniem skokowym w układzie regulacji wg rys. 11.11 z regulatorem PID, o nastawach dobranych zgodnie z regułami Zieglera-Nicholsa oraz metodą Äströma-Hagglunda. Przebieg odpowiadający nastawom dobranym wg Zieglera-Nicholsa charakteryzuje się większą odchyłką dynamiczną i dłuższym czasem regulacji niż w przypadku nastaw dobranych wg Äströma-Hagglunda.

# 12. STRUKTURY JEDNOWYMIAROWYCH UKŁADÓW REGULACJI

Podstawową strukturą jednowymiarowych układów regulacji jest struktura jednoobwodowa o schemacie blokowym jak na rys. 12.1. Skuteczność tej struktury zależy od właściwości obiektu, działających na obiekt zakłóceń, algorytmu sterowania zastosowanego regulatora i od wymaganej jakości regulacji. Dużą rolę odgrywa także właściwy wybór wielkości, za pośrednictwem której regulator oddziałuje na proces. Jeżeli układ o strukturze jednoobwodowej z regulatorem konwencjonalnym o algorytmie P, PI, PD lub PID spełnia pożądane wymagania jakościowe, to nie należy go komplikować.

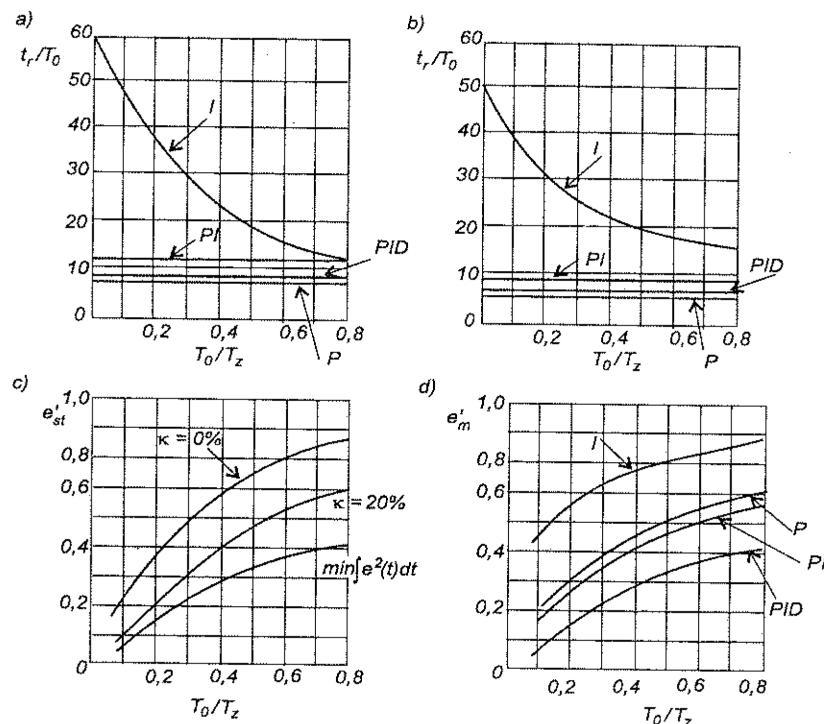



Rys. 12.1. Uogólniona struktura jednoobwodowego układu regulacji stałowartościowej

Możliwe do osiągnięcia wartości parametrów odpowiedzi skokowych w układach jednoobwodowych z regulatorami PID i obiektami o transmitancji $G_{ob}(s)=\frac{k_{ob}}{T_z s+1}e^{-sT_0}$, przy odpowiednio dobranych nastawach regulatorów, przedstawione są na nomogramach (rys. 12.2).

W przypadku obiektów regulacji z dużymi opóźnieniami, o wysokiej inercji lub o właściwościach nieliniowych, jednoobwodowe układy regulacji z regulatorami PID mogą nie zapewnić uzyskania pożądanej jakości regulacji. Możliwości uzyskania pożądanej jakości regulacji poszukuje się przez dobór innej struktury układu regulacji lub wykorzystanie nietypowych algorytmów sterowania. Jednoobwodowa struktura układu regulacji jest także nieprzydatna w przypadku szeregu specyficznych procesów podlegających regulacji. Typowymi nieelementarnymi strukturami układów regulacji są:

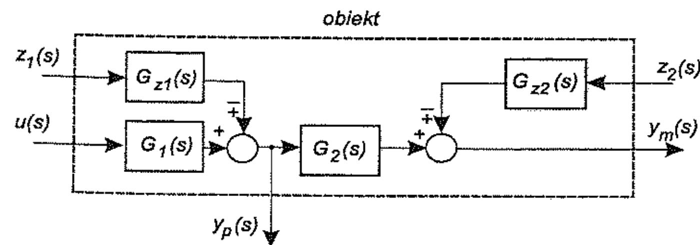
- struktura kaskadowa,
- struktura zamknięto-otwarta,
- struktura prosta układu regulacji stosunku,
- struktura kaskadowa układu regulacji stosunku,
- struktura z pomocniczą wielkością wyjściową obiektu,
- struktura selekcyjna (ang. *override control*) – regulacja z wybierakiem sygnałów.



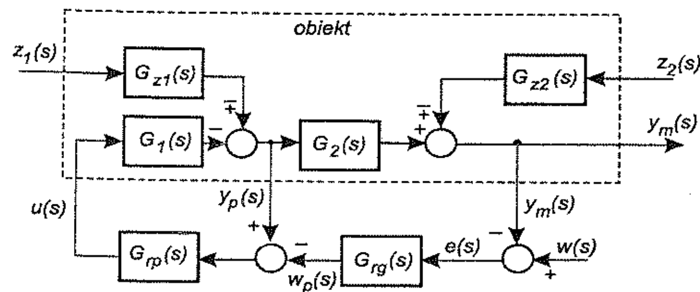

Rys. 12.2. Wskaźniki odpowiedzi skokowych jednoobwodowych układów regulacji z obiektem statycznym i regulatorem o algorytmie P, I, PI, PID: a) zależność czasu regulacji $t_r$ od algorytmu regulatora i parametrów $T_0$ i $T_z$ obiektu regulacji w przypadku nastaw regulatora zapewniających aperiodyczny przebieg odpowiedzi skokowych układu ( $\kappa = 0\%$ ), b) analogiczna zależność w przypadku nastaw zapewniających przebiegi oscylacyjne z przeregulowaniem $\kappa = 20\%$, c) zależność względnej odchyłki statycznej $e'_{st}$ w układzie z regulatorem P od parametrów obiektu i kryterium doboru nastaw regulatora, d) zależność względnej odchyłki maksymalnej $e'_m$ w przypadku różnych algorytmów regulatora, z nastawami zapewniającymi przeregulowanie $\kappa = 20\%$ (odchyłka względna – stosunek odchyłki w układzie regulacji do odchyłki wywołanej takim samym sygnałem w układzie otwartym)

## 12.1. STRUKTURA KASKADOWA

W przypadku obiektów regulacji o dużych stałych czasowych inercji i znacznych opóźnieniach, a także gdy w części obiektu występują nieliniowości (np. zespołu wykonawczego), polepszenie jakości regulacji może zapewnić układ regulacji o strukturze kaskadowej. Realizacja układu kaskadowego jest możliwa wówczas, gdy w obiekcie regulacji daje się wyróżnić pomocniczą wielkość $y_p$, której reakcja na określone zakłócenie jest znacznie szybsza niż reakcja wielkości regulowanej $y_m$ na to zakłócenie. Schemat blokowy takiego obiektu przedstawiono na rys. 12.3. W obiekcie tym wyodrębniono część $G_1$ o małej inercji, której wielkością wyjściową jest wielkość pomocnicza $y_p$ zależna od zakłócenia głównego $z_1$, i część $G_2$ o znacznej inercji lub opóźnieniu, której wielkością wyjściową jest wielkość regulowana $y_m$, zależna nie tylko od zakłócenia $z_1$, lecz także od zakłócenia $z_2$. W układzie regulacji o strukturze kaskadowej (rys. 12.4) sygnał $y_p$ jest wprowadzony do tzw. regulatora pomocniczego o transmitancji $G_{rp}(s)$, tworzącego z częścią $G_1$ obiektu pomocniczy obwód regulacji. Regulator pomocniczy, oddziałując poprzez sterowanie $u$ na część $G_1$ obiektu, powoduje znacznie szybsze kompensowanie wpływu zakłócenia $z_1$, niż byłoby to możliwe w układzie o strukturze jednoobwodowej.




Rys. 12.3. Schemat blokowy obiektu regulacji z wyodrębnioną wielkością pomocniczą $y_p$

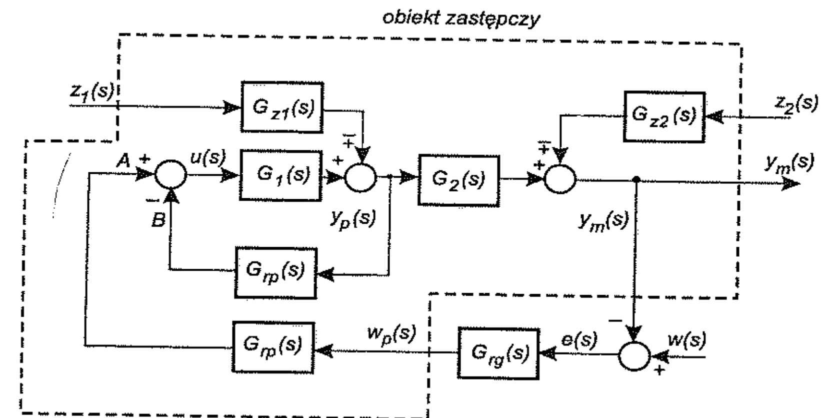



Rys. 12.4. Schemat ideowy układu regulacji o strukturze kaskadowej; $G_{rp}(s)$ – transmitancja regulatora pomocniczego, $G_{rg}(s)$ – transmitancja regulatora głównego



W układzie o strukturze kaskadowej występują dwie pętle regulacyjne: pętla pomocnicza z regulatorem pomocniczym $G_{rp}$ i pętla główna z regulatorem głównym $G_{rg}$, generującym sygnał $w_p$ wartości zadanej, zwanej wartością wiodącą dla pętli pomocniczej. Pętla pomocnicza jest układem regulacji nadążnej, którego zadaniem jest nie tylko eliminacja wpływu zakłócenia $z_1$ na wielkość pomocniczą $y_p$, lecz także zapewnienie nadążania wielkości pomocniczej za zmianami wartości zadanej $w_p$ generowanymi przez regulator główny, w celu kompensacji wpływu na wielkość regulowaną $y_m$ innych zakłóceń (zakłócenie $z_2$). W przypadku istnienia jedynie zakłóceń wpływających na wielkość pomocniczą, główna pętla regulacyjna byłaby zbędna.

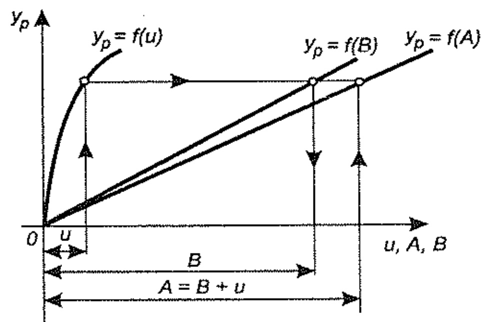
Zakładając, że regulator pomocniczy $G_{rp}$ jest elementem liniowym, można schemat blokowy z rys. 12.4 przekształcić do postaci przedstawionej na rys. 12.5, dogodnej do analizy właściwości układu kaskadowego.




Rys. 12.5. Przekształcony schemat blokowy układu regulacji kaskadowej z rys. 12.4

Przekształcony schemat ujawnia, że w układzie regulacji kaskadowej dokonuje się tzw. linearyzacja układowa charakterystyki statycznej części $G_1$ obiektu regulacji (jeżeli jest ona nieliniowa). Istotę tej linearyzacji wyjaśniono na rys. 12.6. Krzywa $y_p = f(u)$ przedstawia przykładową nieliniową charakterystykę części $G_1$ obiektu, a prosta $y_p = f(B)$ jest odwróconą charakterystyką statyczną regulatora pomocniczego $G_{rp}$ o działaniu proporcjonalnym i wzmocnieniu $k_p > 0$. Na podstawie równania węzła sumacyjnego $A = B + u$ i wielkości $B$, wynikającej z charakterystyki $y_p = f(B)$, dla każdej wartości $y_p$ można wyznaczyć punkt charakterystyki zlinearyzowanej $y_p = f(A)$ (konstrukcja graficzna zaznaczona liniami ze strzałkami). Im większe będzie wzmocnienie $k_p$ regulatora pomocniczego, tym

bliższa linii prostej będzie charakterystyka $y_p = f(A)$. Do linearyzacji charakterystyki statycznej wystarcza, aby regulator pomocniczy miał działanie P.




Rys. 12.6. Linearyzacja układowa charakterystyki statycznej części $G_1$ obiektu regulacji

W przypadku obiektów regulacji o nieliniowej charakterystyce statycznej zmiana punktu pracy związana jest ze zmianą wzmocnienia obiektu, co utrudnia zapewnienie stabilności i żądanej jakości dynamicznej w całym zakresie pracy układu regulacji. Linearyzacja charakterystyki statycznej obiektu ma zatem duże znaczenie praktyczne, ponieważ w znacznym stopniu uniezależnia właściwości układu od punktu pracy.

Inną korzystną właściwością układu regulacji kaskadowej jest tzw. neutralizacja właściwości dynamicznych części obiektu $G_1$. Obwiedziona na rys. 12.5 linią przerywaną część układu, na którą oddziałuje regulator główny $G_{rg}$, może być traktowana jako obiekt zastępczy (układu jednoobwodowego) o transmitancji

$$G_{\text{ob zast}}(s) = \frac{y_m(s)}{w_p(s)} = G_2(s)\frac{G_1(s)G_{rp}(s)}{1 + G_1(s)G_{rp}(s)} \tag{12.1}$$

Jak widać, parametry obiektu zastępczego, a więc i nastawy regulatora głównego, zależą nie tylko od właściwości dynamicznych obiektu regulacji, ale także od nastaw regulatora pomocniczego. Jeżeli jednak w wystarczająco szerokim paśmie częstotliwości, obejmującym typowe zakłócenia eksploatacyjne, zapewni się, że $|G_1(j\omega)G_{rp}(j\omega)| \gg 1$, to transmitancja (12.1) uprości się do postaci

$$G_{\text{ob zast}}(s) = \frac{y_m(s)}{w_p(s)} \cong G_2(s) \tag{12.2}$$

co oznacza, że właściwości części $G_1$ obiektu w określonym paśmie częstotliwości mają pomijalny wpływ na właściwości obiektu zastępczego; jest to nazywane neutralizacją części $G_1$.



Dla zastosowań praktycznych istotna jest znajomość skuteczności kompensacji wpływu zakłóceń w układzie kaskadowym. W układzie wg rys. 12.4 zakłócenie $z_1$ bezpośrednio wpływa na wielkość pomocniczą $y_p$, natomiast $z_2$ – na wielkość regulowaną. Wyznaczono wskaźniki regulacji dla obu zakłóceń. Dla zakłócenia $z_2$

$$q_{z2}(j\omega) = \frac{1}{1 + G_{rg}(j\omega)\,G_{\text{ob zast}}(j\omega)} \tag{12.3}$$

Dla zakłócenia $z_1$

$$q_{z1} = \frac{1}{[1 + G_{rg}(j\omega)\,G_{\text{ob zast}}(j\omega)][1 + G_{rp}(j\omega)\,G_1(j\omega)]} \tag{12.4}$$

Łatwo zauważyć, że

$$q_{z1} = \frac{q_{z2}}{1 + G_{rp}(j\omega)G_1(j\omega)} \tag{12.5}$$

Wzór (12.5) wskazuje, że zakłócenia $z_1$ są $|1 + G_{rp}(j\omega)G_1(j\omega)|$ razy silniej kompensowane niż zakłócenia $z_2$. Cecha ta ma szczególne znaczenie, gdy część $G_2$ obiektu zawiera opóźnienie. Opóźnienie to nie pozwala na zastosowanie układu jednoobwodowego o dużej wartości modułu transmitancji (układu otwartego) w szerszym zakresie częstotliwości. Jeśli przy tym część $G_1$ obiektu opóźnienia nie zawiera, to można zrealizować iloczyn $|G_{rp}(j\omega)||G_1(j\omega)|$ o dużych wartościach, a tym samym uzyskać dobrą skuteczność regulacji w stosunku do zakłóceń $z_1$. Warto zwrócić uwagę, że układ kaskadowy nie daje tak dużych korzyści w odniesieniu do zakłóceń $z_2$ ani przy nadążaniu za zmianą wartości zadanej $w$, ani w tych przypadkach, w których wielkość pomocnicza obarczona jest opóźnieniem.

Algorytmy regulatorów stosowanych w układzie kaskadowym dobiera się wg następujących zasad:

– Regulator pomocniczy jest najczęściej regulatorem proporcjonalnym P; umożliwia on najszybszą kompensację zakłócenia $z_1$, czego nie zapewnia regulator z akcją I. Działania różniczkującego nie stosuje się, gdyż dostatecznym filtrem dla zakłóceń $z_1$ o wysokiej częstotliwości jest druga część obiektu, zawierająca zwykle opóźnienia (tzw. czas martwy). Do kompensacji nieliniowości części $G_1$ obiektu, która jest częstą przyczyną stosowania struktury kaskadowej, działanie P w regulatorze $G_{rp}$ jest wystarczające.
– Regulator główny o transmitancji $G_{rg}(s)$ należy traktować jak regulator w jednoobwodowym układzie regulacji. W celu zmniejszenia odchyłki statycznej należy zastosować regulator o algorytmie PI lub PID. Dobierając nastawy tego

regulatora, należy uwzględnić wpływ nastaw regulatora pomocniczego na parametry transmitancji operatorowej obiektu zastępczego.

Dobór nastaw regulatorów w układzie kaskadowym przebiega w dwóch etapach. Najpierw dobierane są nastawy regulatora pomocniczego $G_{rp}$, podobnie jak w układzie jednoobwodowym. Następnie wyznacza się nastawy regulatora głównego $G_{rg}$, np. metodą tabelaryczną lub eksperymentalną Zieglera-Nicholsa, przy czym jako obiekt regulacji traktowany jest obiekt zastępczy (rys. 12.5). Rozpatrzono to na przykładzie.

Przyjęto, że w układzie regulacji kaskadowej części $G_1$ i $G_2$ obiektu regulacji mają transmitancje

$$G_1(s) = \frac{1}{T_z s + 1}, \quad G_2(s) = e^{-T_0 s} \tag{12.6}$$

Jako regulator pomocniczy zastosowano regulator P

$$G_{rp}(s) = k_p \tag{12.7}$$

Zgodnie ze wzorem (12.1), transmitancja obiektu zastępczego ma postać

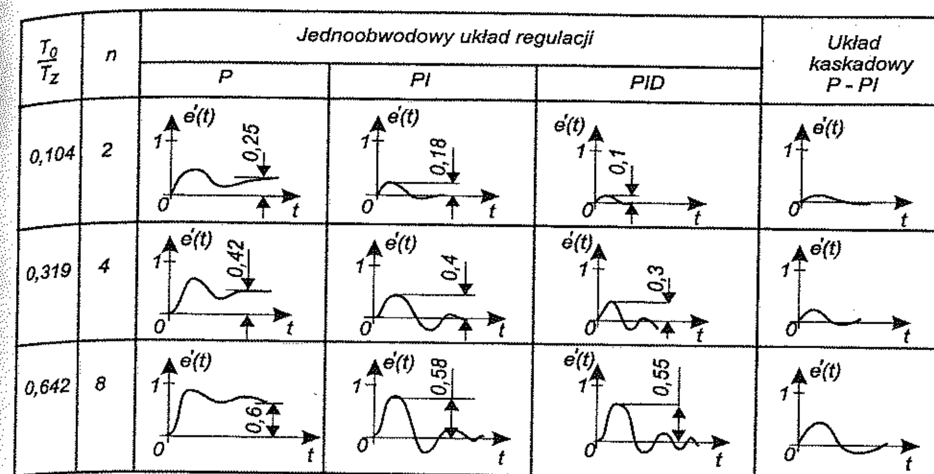
$$G_{\text{ob zast}}(s) = k_p \frac{\frac{1}{T_z s + 1}}{1 + \frac{1}{T_z s + 1} k_p} e^{-T_0 s} = \frac{k_p}{1 + k_p} \frac{1}{Ts + 1} e^{-T_0 s} \tag{12.8}$$

gdzie $T = \dfrac{T_z}{1 + k_p}$.

Z wzoru (12.8) wynika, że stosunek $T_0/T$ jest większy niż $T_0/T_z$, natomiast wzmocnienie $k_p/(1+k_p)$ obiektu zastępczego jest mniejsze od wzmocnienia obiektu rzeczywistego, co należy uwzględnić przy doborze nastaw regulatora głównego.

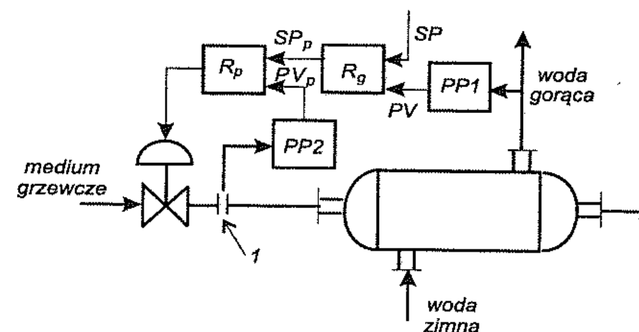
W celu orientacyjnego porównania właściwości układów jednoobwodowych i kaskadowych, na rys. 12.7 przedstawiono przebiegi zmian względnej odchyłki regulacji po skokowym zakłóceniu $z_1$, uzyskiwane w tych układach. Jako obiekty regulacji w porównywanych układach regulacji wykorzystano połączenia $n$ jednakowych elementów inercyjnych. Części $G_1$ i $G_2$ obiektu w układzie kaskadowym obejmują taką samą liczbę $n/2$ elementów inercyjnych. Jak wynika z porównania, odchyłka dynamiczna względna $e'(t)$ w układach kaskadowych jest znacznie mniejsza niż w układach jednoobwodowych, ale skuteczność tego układu zmniejsza się wraz ze wzrostem stosunku $T_0/T_z$.






Rys. 12.7. Porównanie wskaźników przebiegu przejściowego układów regulacji o strukturze jednoobwodowej i kaskadowej

Przykład układu regulacji o strukturze kaskadowej przedstawiono na rys. 12.8.




Rys. 12.8. Kaskadowy układ regulacji temperatury; PP1 – przetwornik pomiarowy temperatury, PP2 – przetwornik natężenia przepływu czynnika grzewczego (pomiar różnicy ciśnień na zwężce pomiarowej 1), $R_p$, $R_g$ – regulator pomocniczy i główny

Zadaniem układu jest utrzymanie stałej temperatury gorącej wody pobieranej z wymiennika ciepła, niezależnie od zmian parametrów medium grzewczego przepływającego przez wymiennik, oraz temperatury i natężenia przepływu wody zimnej. Głównym zakłóceniem w układzie jest zmiana ciśnienia czynnika grzewczego. Jednoobwodowy układ regulacji z regulatorem $R_g$, działającym bezpośrednio na zespół wykonawczy, nie zapewnia dobrej jakości regulacji, ze względu

na duże opóźnienie zauważanych przez regulator zmian temperatury względem zmian wielkości zakłócającej. W układzie kaskadowym wielkością pomocniczą jest natężenie przepływu czynnika grzewczego; sygnał z przetwornika natężenia przepływu dostarcza natychmiast informację o zmianie ciśnienia tego czynnika. Zadanie regulatora pomocniczego $R_p$ polega na stabilizacji natężenia przepływu medium grzewczego, dzięki czemu eliminuje się wpływ głównego zakłócenia. Pozostałe zakłócenia, np. zmiany parametrów cieplnych czynnika grzewczego, temperatury otoczenia lub temperatury wody wlotowej, są zwykle dużo wolniejsze i regulator główny $R_g$ reaguje na nie, zmieniając wartość zadaną regulatora pomocniczego $R_p$.

## 12.2. STRUKTURA ZAMKNIĘTO-OTWARTA

Układy o strukturze zamknięto-otwartej, nazywanej również strukturą kombinowaną, należą do grupy układów z dodatkowym sprzężeniem informacyjnym. Jest to sprzężenie od zakłócenia głównego, zawierające tzw. człon kompensacyjny (na rys. 12.9 i 12.10 element o transmitancji $M(s)$ ), które wprowadza się do układu zamkniętego w celu polepszenia jego właściwości, jeżeli to zakłócenie główne można mierzyć. Dzięki takiemu sprzężeniu możliwe jest uzyskanie całkowitej kompensacji wpływu danego zakłócenia na obiekt, czyli realizacja tzw. pełnej inwariantności.

Zamknięto-otwarta struktura może być wykorzystywana do realizacji układów spełniających różne zadania: układów stabilizacji, układów regulacji programowej, układów regulacji nadążnej (układy śledzące).

Na rys. 12.9 przedstawiono schemat blokowy układu zamknięto-otwartego (tzw. struktura A), w którym sygnał pochodzący z pomiaru zakłócenia $z_1$, po przejściu przez człon kompensacyjny o transmitancji $M(s)$, wspólnie z sygnałem wyjściowym $u$ regulatora oddziałuje na obiekt regulacji. Transmitancja zakłóceniowa tego układu względem zakłócenia $z_1$ ma postać

$$G_z(s)=\frac{y_m(s)}{z_1(s)}=\frac{G_2(s)...G_n(s)[1-M(s)G_1(s)]}{1+G_r(s)G_1(s)...G_n(s)} \qquad (12.9)$$

Teoretycznie istnieje możliwość uzyskania zerowej wartości licznika transmitancji (12.9), jeżeli transmitancja członu kompensacyjnego

$$M(s)=\frac{1}{G_1(s)} \qquad (12.10)$$



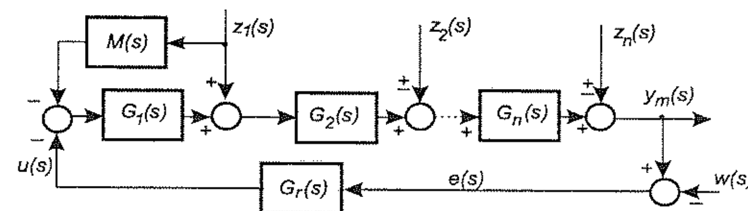
co oznaczałoby całkowitą eliminację wpływu zakłócenia $z_1$ na wielkość regulowaną $y_m$. Jak widać, transmitancja $M(s)$ członu kompensacyjnego nie zależy od algorytmu regulatora, a tylko od właściwości części $G_1$ obiektu, objętej torem kompensacyjnym. Jeżeli część $G_1$ obiektu ma właściwości członu inercyjnego o transmitancji

$$G_1(s)=\frac{k}{T_1 s+1} \qquad (12.11)$$

to członem kompensacyjnym powinien być idealny regulator PD o transmitancji

$$M(s)=\frac{T_1 s+1}{k}=k_p(T_d s+1) \qquad (12.12)$$

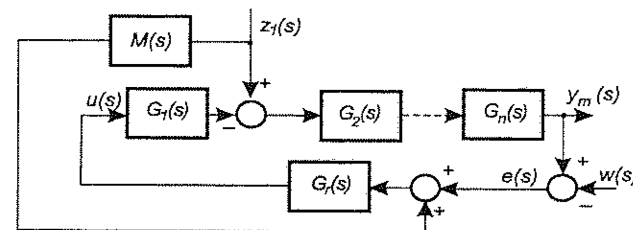
gdzie: $k_p=\frac{1}{k}$, $T_d=T_1$.




Rys. 12.9. Schemat blokowy układu zamknięto-otwartego (struktura A)

Uzyskanie pełnej inwariantności wymagałoby realizacji idealnego różniczkowania, co praktycznie nie jest możliwe.

Schemat blokowy układu zamknięto-otwartego, w którym sygnał pochodzący z pomiaru zakłócenia modyfikuje sygnał wejściowy regulatora (tzw. struktura B), przedstawiono na rys. 12.10.




Rys. 12.10. Schemat blokowy układu zamknięto-otwartego (struktura B)

Transmitancja zakłóceniowa tego układu względem zakłócenia $z_1$ ma postać

$$G_z(s) = \frac{y_m(s)}{z_1(s)} = \frac{G_2(s)...G_n(s)[1 - G_r(s)M(s)G_1(s)]}{1 + G_r(s)G_1(s)...G_n(s)} \tag{12.13}$$

Chcąc uzyskać inwariantność zupełną, należy zastosować człon kompensacyjny $M(s)$ o transmitancji

$$M(s) = \frac{1}{G_r(s)G_1(s)} \tag{12.14}$$

Transmitancja członu kompensacyjnego zależy w tym przypadku od właściwości części obiektu objętej torem kompensacyjnym oraz właściwości regulatora, co stwarza możliwość doboru członu kompensacyjnego zapewniającego lepszą niż w strukturze A kompensację wpływu zakłócenia. Niekorzystną cechą struktur A i B jest uzależnienie nastaw członu kompensacyjnego od punktu pracy układu. Dodatkowo w strukturze B nastawy członu kompensacyjnego zależą także od bieżących nastaw regulatora. Na przykład, jeżeli wskutek zmiany punktu pracy wzmocnienie obiektu zwiększy się trzykrotnie, to wyrażenie $|1 - G_r(j\omega)M(j\omega)G_1(j\omega)|$, zamiast wartości zero, osiągnie wartość –2, co oznacza, że w wyniku działania członu kompensacyjnego zakłócenie $z_1$ będzie miało dwukrotnie silniejszy wpływ na wielkość regulowaną, niż gdyby tego członu nie było, co nazywane jest przekompensowaniem układu.

Nastawy regulatora w układzie zamknięto-otwartym dobierane są jak w przypadku układów jednoobwodowych, nastawy członu kompensacyjnego – wg warunku inwariantności.

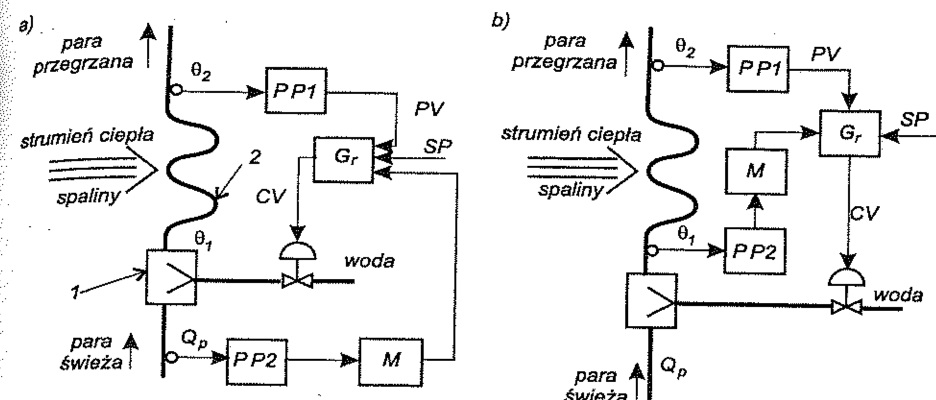
Możliwości praktycznej realizacji układów zamknięto-otwartych oraz skuteczność ich działania są ograniczone następującymi względami:

- Na obiekt działa najczęściej wiele zakłóceń, ale tylko niektóre z nich można mierzyć i wprowadzać poprzez człony kompensacyjne do zamkniętego układu regulacji.
- Zmiany punktu pracy oraz zmieniające się z upływem czasu właściwości obiektu regulacji nie pozwalają na trwały dobór parametrów członu kompensacyjnego $M(s)$, co oznacza potrzebę ciągłej identyfikacji obiektu.
- Nieliniowości poszczególnych części układu ograniczają możliwość doboru parametrów członu kompensacyjnego.

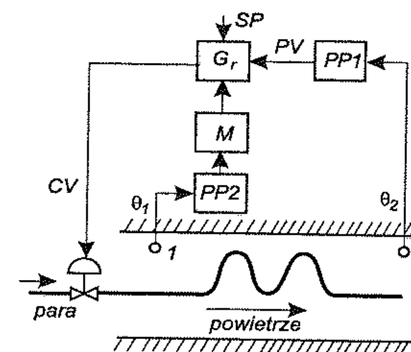
Większość projektowanych układów zamknięto-otwartych wyposażonych jest w przełączniki pozwalające na odłączenie toru kompensacyjnego bez zakłócenia pracy układu zamkniętego.

Przykłady praktycznych zastosowań układów zamknięto-otwartych pokazano na rys. 12.11a i 12.12.






Rys. 12.11. Układy regulacji temperatury pary przegrzanej w kotle parowym: a) układ o strukturze zamknięto-otwartej, b) układ z korekcją dynamiczną; $\theta_1$, $\theta_2$ – temperatura, $Q_p$ – natężenie przepływu pary, M – człon kompensacyjny, $G_r$ – regulator, PP1, PP2 – przetworniki pomiarowe




Rys. 12.12. Schemat układu regulacji temperatury powietrza w podgrzewaczu parowym o strukturze zamknięto-otwartej

Na rys. 12.11 przedstawiono układy regulacji temperatury $\theta_2$ pary przegrzanej w kotle parowym. Wymaganą temperaturę pary uzyskuje się w wyniku przemian zachodzących w przegrzewaczu pary, który pełni rolę wymiennika ciepła. W wymienniku tym następuje przekazywanie ciepła do pary od spalin, które opływają przegrzewacz, uchodząc do komina. Regulację temperatury pary zwykle przeprowadza się przez wtrysk wody (kondensatu) na wejściu do przegrzewacza. Ta część instalacji nazywa się schładzaczem, gdyż w wyniku wtrysku wody, temperatura $\theta_1$ pary na wejściu do przegrzewacza obniża się w stosunku do temperatury pary świeżej, ale jednocześnie zwiększa się ilość pary przepływającej przez przegrzewacz.

Głównymi zakłóceniami działającymi na proces są: zmiany strumienia masy $Q_p$ pary świeżej oraz zmiany strumienia ciepła doprowadzonego do przegrzewacza (wynikające ze zmian np. wartości opałowej paliwa, współczynnika nadmiaru powietrza w komorze spalania itp.). Pod względem właściwości dynamicznych przegrzewacz jest obiektem statycznym o inercji wysokiego rzędu (w przypadku małych kotłów $T_0 \approx 30 \div 80$ s, $T_z \approx 100 \div 200$ s), co czyni regulację w układzie jednoobwodowym mało skuteczną. Poprawę jakości regulacji można uzyskać, stosując strukturę zamknięto-otwartą układu regulacji z pomiarem zakłócenia w postaci zmian natężenia przepływu $Q_p$ pary świeżej (rys. 12.11a) lub wykorzystując dodatkowe sprzężenie od zmiany temperatury $\theta_1$ pary za schładzaczem (rys. 12.11b).

W układzie wg rys. 12.11a przekazanie do regulatora dodatkowo (oprócz informacji o wielkości regulowanej – sygnał *CV*) informacji o zakłóceniu, którym jest zmiana natężenia przepływu pary świeżej, za pośrednictwem członu kompensacyjnego $M(s)$ o działaniu różniczkującym, wywołuje akcję regulatora kompensującą skutki oddziaływania tego zakłócenia na temperaturę $\theta_1$, co polepsza jakość regulacji.

Układ wg rys. 12.11b odpowiada strukturze opisanej w rozdz. 12.5.

Na rys. 12.12 przedstawiono układ regulacji temperatury $\theta_2$ powietrza w podgrzewaczu parowym. Zakłóceniem głównym są zmiany temperatury $\theta_1$ powietrza dostarczanego do podgrzewacza. Do regulatora wprowadzana jest suma sygnału *PV* od wielkości regulowanej $\theta_2$ i przetworzonego przez człon kompensacyjny sygnału od wielkości zakłócającej $\theta_1$. Jeżeli zastosowano regulator PI, a część obiektu objęta sprzężeniem kompensacyjnym ma działanie inercyjne o pomijalnie małej stałej czasowej, to człon kompensacyjny powinien być elementem o rzeczywistym działaniu różniczkującym.

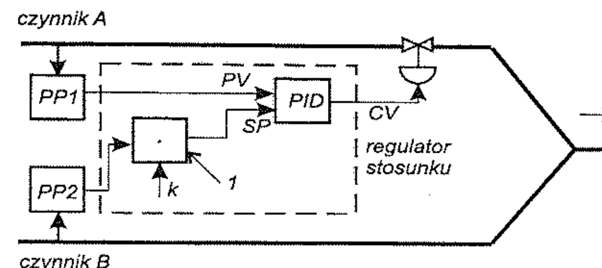
## 12.3. UKŁAD REGULACJI STOSUNKU

Układy regulacji, których zadaniem jest utrzymanie określonej wartości stosunku dwóch wielkości mierzonych, najczęściej natężeń przepływu, nazywane są układami regulacji stosunku. W istocie są to układy regulacji jednej z mierzonych wielkości, w których wielkość zadana zależy od wartości drugiej wielkości.

Na rys. 12.13 przedstawiono układ regulacji stosunku natężeń przepływu czynników A i B. W obwodzie regulacji natężenia przepływu czynnika A wartość zadana jest proporcjonalna do zmierzonej wartości natężenia przepływu czynnika B (przetwornik PP2). Przepływ czynnika B nie jest regulowany. Pożądaną wartość



stosunku natężeń przepływów uzyskuje się, wprowadzając odpowiednią wartość mnożnika $k$ do układu mnożącego. Osiągnięta wartość stosunku natężeń przepływów nie jest mierzona.




Rys. 12.13. Schemat układu regulacji stosunku natężeń przepływów czynników A i B; 1 – układ mnożący, PP1, PP2 – przetworniki pomiarowe natężenia przepływu, PID – regulator

Układy regulacji stosunku wykorzystuje się do zapewnienia pożądanego składu lub gęstości mieszaniny, właściwych proporcji reagujących ze sobą czynników.

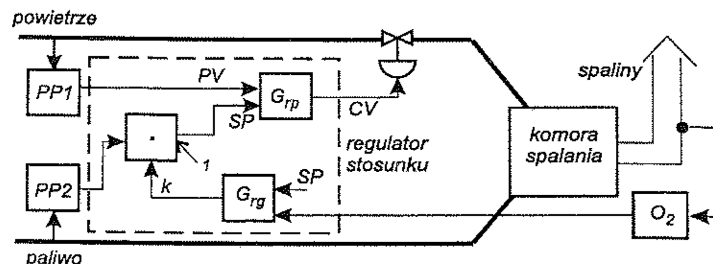
W układach regulacji stosunku może być używany specjalnie do tego przeznaczony regulator stosunku (biblioteki algorytmów regulacji regulatorów mikroprocesorowych zawierają regulator stosunku – ang. *ratio*). W wersji analogowej stosowany był uniwersalny regulator współpracujący z przyrządem mnożącym.

## 12.4. UKŁAD REGULACJI STOSUNKU O STRUKTURZE KASKADOWEJ

Przykładem układu regulacji stosunku o strukturze kaskadowej jest układ regulacji zawartości wolnego tlenu w spalinach, przedstawiony rys. 12.14. Jest to układ często wykorzystywany w urządzeniach sterujących procesami spalania.

Efektywność procesu spalania zależy od doboru właściwego stosunku ilości dostarczanego powietrza do ilości paliwa. Ze względu na zmieniającą się wartość energetyczną paliwa dostarczanego do procesu spalania, wartość tego stosunku, zapewniająca najbardziej efektywny proces spalania, może się zmieniać. Miarą poprawnego przebiegu procesu spalania jest zawartość wolnego tlenu $O_2$ w spalinach. Zmienną procesową wprowadzaną do regulatora głównego $G_{rg}$ jest sygnał z analizatora spalin, informujący o rzeczywistej zawartości tlenu w spalinach; sygnał ten jest porównywany z sygnałem *SP*, reprezentującym pożądaną zawartość

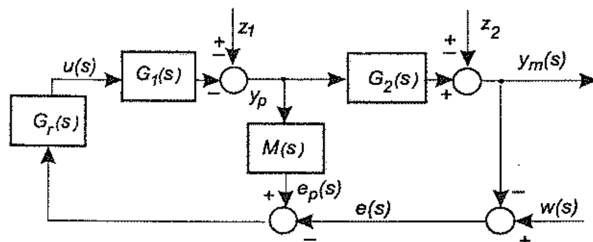
tlenu w spalinach. Sygnał wyjściowy regulatora głównego reprezentuje wartość mnożnika $k$, wprowadzaną do układu mnożącego 1.




Rys. 12.14. Schemat układu regulacji zawartości wolnego tlenu w spalinach (układ o strukturze kaskadowej)

## 12.5. UKŁAD REGULACJI Z KOREKCJĄ DYNAMICZNĄ

Układ regulacji z korekcją dynamiczną (rys. 12.15), z pomocniczą wielkością wyjściową obiektu $y_p$, doprowadzoną poprzez człon korekcyjny $M(s)$ na wejście regulatora $G_r(s)$, jest odmianą układu kaskadowego.




Rys. 12.15. Schemat blokowy układu regulacji z pomocniczą wielkością wyjściową obiektu $y_p$ i członem korekcyjnym $M(s)$

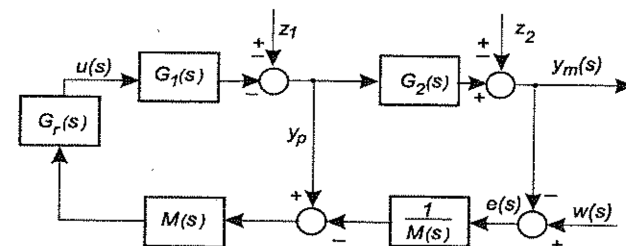
Najczęściej człon korekcyjny ma właściwości rzeczywistego elementu różniczkującego o transmitancji $M(j\omega) = T_d j\omega/(Tj\omega + 1)$. Sygnał $e_p$ w stanach nieustalonych oddziałuje na regulator, uprzedzając zmiany wielkości regulowanej będące skutkiem działającego zakłócenia. Zatem regulator wytwarza odpowiednie działanie kompensujące wpływ zakłócenia znacznie wcześniej, niż uczyniłby to w układzie jednoobwodowym. Natomiast człon $M(s)$ nie wpływa na właściwości statyczne układu, gdyż w stanach ustalonych sygnał $e_p$ ma wartość zero.



Układ z rys. 12.15 można przekształcić do postaci układu kaskadowego, jak na rys. 12.16. W układzie tym wskaźniki regulacji osiągają wartości:

$$q_{z2}(j\omega) = \frac{1 + G_r(j\omega)M(j\omega)G_1(j\omega)}{1 + G_r(j\omega)G_1(j\omega)[G_2(j\omega) + M(j\omega)]} \tag{12.15}$$

$$q_{z1}(j\omega) = \frac{1}{1 + G_r(j\omega)G_1(j\omega)[G_2(j\omega) + M(j\omega)]} = \frac{q_{z2}(j\omega)}{1 + G_r(j\omega)M(j\omega)G_1(j\omega)} \tag{12.16}$$



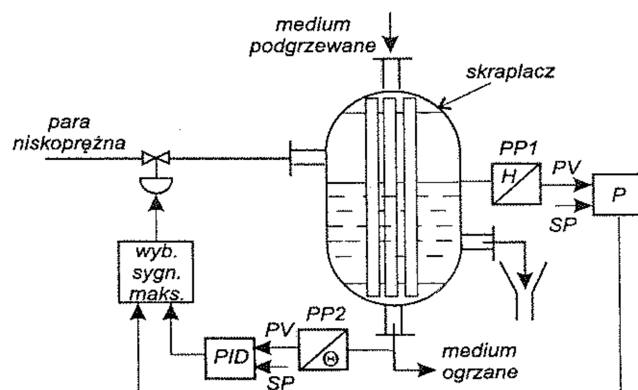

Rys. 12.16. Przekształcony na potrzeby analizy schemat blokowy z rys. 12.15

Wzór (12.15) wskazuje, że w przypadku zakłóceń $z_2$ człon $M(s)$ nie poprawia jakości regulacji, chyba że dzięki jego obecności można zwiększyć wartość wzmocnienia regulatora $G_r$, w stosunku do układu bez członu $M(j\omega)$. Podobnie jak w przypadku układów o strukturze kaskadowej, główną korzyścią wynikającą z zastosowania omawianej struktury jest polepszenie efektywności kompensowania wpływu zakłóceń $z_1$.

## 12.6. STRUKTURA SELEKCYJNA – UKŁAD REGULACJI Z WYBIERAKIEM SYGNAŁÓW

Potrzeba regulacji selekcyjnej wynika stąd, że często w praktyce istnieje konieczność jednoczesnego zapewnienia właściwego przebiegu kilku zmiennych procesowych – wielkości regulowanych, np. gdy główna wielkość regulowana wymaga, aby inne zmienne procesowe były utrzymywane w określonych granicach. W układzie regulacji o strukturze selekcyjnej występuje kilka wielkości

charakteryzujących stan obiektu, podlegających regulacji, przy czym w danej chwili oddziałuje na obiekt tylko jeden regulator poprzez wspólny dla wszystkich obwodów regulacyjnych zespół wykonawczy. Funkcję łączenia poszczególnych regulatorów z zespołem wykonawczym spełnia tzw. selektor (wybierak sygnałów), wybierający ten regulator, w którym zmienna procesowa osiąga wartość minimalną lub maksymalną. Jako przykład takiego układu, na rys. 12.17 przedstawiono schemat selekcyjnego układu regulacji. Zadaniem układu jest regulacja temperatury podgrzewanego medium przy jednoczesnym zapewnieniu możliwie szybkiego przyrostu temperatury medium podgrzewanego, w czym przeszkadza zawodnienie skraplacza, które ogranicza powierzchnię wymiany ciepła. Na początkowym etapie pracy skraplacza układ pracuje jako układ regulacji temperatury. W przypadku zawodnienia skraplacza następuje przełączenie sygnału sterującego dopływem pary do skraplacza na sygnał z regulatora poziomu skroplin w skraplaczu.




Rys. 12.17. Schemat selekcyjnego układu regulacji temperatury; PP1, PP2 – przetworniki pomiarowe poziomu, temperatury



# 13. OPIS LINIOWYCH STACJONARNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z WYKORZYSTANIEM WSPÓŁRZĘDNYCH STANU

## 13.1. PORÓWNANIE MODELU UKŁADU W POSTACI TRANSMITANCJI Z MODELEM WYKORZYSTUJĄCYM WSPÓŁRZĘDNE STANU

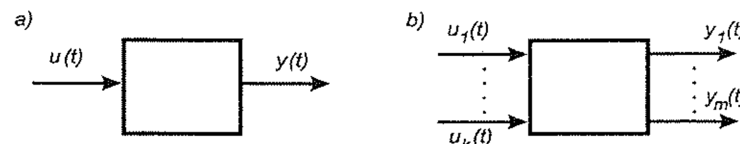
Formę opisu działania układu w postaci transmitancji operatorowej, stosowaną w odniesieniu do układów jednowymiarowych, można rozszerzyć na układy wielowymiarowe. W przypadku układu wielowymiarowego o liczbie $k$ wejść i liczbie $m$ wyjść (rys. 13.1b) wielkości wejściowe i wyjściowe można przedstawić w postaci wektorowej w dziedzinie czasu:

$$\boldsymbol{U}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \tag{13.1}$$

lub w dziedzinie zmiennej zespolonej

$$\overline{\boldsymbol{U}}(s)=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_k(s) \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{Y}}(s)=\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} \tag{13.2}$$

Wektor $\boldsymbol{U}(t)$ nazywany jest **wektorem sterowań** lub **wektorem wejść** – jego składowymi są wielkości wejściowe lub sterowanie, wektor $\boldsymbol{Y}(t)$ nazywany jest **wektorem wyjść** – jego składowymi są wielkości wyjściowe układu.




Rys. 13.1. Schemat blokowy układu: a) jednowymiarowego, b) wielowymiarowego

Odpowiednikiem transmitancji $G(s)$ układu jednowymiarowego jest **macierz transmitancji G**$(s)$ układu wielowymiarowego

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\overline{Y}(s)}{\overline{U}(s)} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1k}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{1m}(s) & \cdots & G_{mk}(s) \end{bmatrix} \tag{13.3}$$

Macierz transmitancji $\mathbf{G}(s)$ ma $m$ wierszy i $k$ kolumn, przy czym $m$ jest liczbą sygnałów wyjściowych, $k$ – liczbą sygnałów wejściowych układu. Element tej macierzy leżący w $i$-tym wierszu i $j$-tej kolumnie jest stosunkiem transformaty $i$-tego sygnału wyjściowego do transformaty $j$-tego sygnału wejściowego, wyznaczonym przy założeniu, że pozostałe sygnały wejściowe i warunki początkowe są zerowe:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \tag{13.4}$$

Analogicznie jak w przypadku układów jednowymiarowych, na podstawie modelu układu wielowymiarowego w postaci macierzy transmitancji, zachowanie układu wielowymiarowego, czyli zmiany wielkości wyjściowych pod wpływem wielkości wejściowych, można badać tylko począwszy od zerowych warunków początkowych całego układu i tylko pod wpływem zmian jednego sygnału wejściowego, co ogranicza możliwości analizy i projektowania złożonych układów dynamicznych.

Aby można było wyznaczyć odpowiedź na określone wymuszenie układu jednowymiarowego opisanego równaniem dynamiki $n$-tego rzędu, należy zdefiniować początkowy stan układu – określić $n$ warunków początkowych, czyli wartości $n$ pewnych zmiennych. Pod wpływem wymuszenia wartości tych zmiennych ulegają zmianom, jednoznacznie definiując stan dynamiczny układu w dowolnej chwili. Dotychczas, wyznaczając odpowiedzi układu na określone wymuszenia, nie interesowano się przebiegami tych zmiennych.

Metoda opisu matematycznego układów dynamicznych z wykorzystaniem współrzędnych stanu polega na przyjęciu zestawu zmiennych jednoznacznie charakteryzujących stan dynamiczny danego układu – tzw. **współrzędnych stanu** lub **zmiennych stanu** i sformułowaniu zależności między wielkościami wejściowymi, zmiennymi stanu i wielkościami wyjściowymi. Wielkościami charakteryzującymi układ dynamiczny są więc wielkości wejściowe, wyjściowe i zmienne stanu, które można przedstawić w postaci wektorowej:

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{13.5}$$

Wektor $\boldsymbol{X}(t)$ nazywa się **wektorem stanu**.



Związki między tymi wielkościami formułuje się w postaci tzw. **równań stanu i równań wyjść**.

Równania stanu opisują, jak w danej chwili $t$ zmieniają się zmienne stanu (jakie są ich pochodne), jeżeli w chwili tej współrzędne stanu mają wartości $x_1, ..., x_n$, a wielkości wejściowe – wartości $u_1, ..., u_k$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_k); \qquad x_1(t_0) = x_{10} \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_k); \qquad x_n(t_0) = x_{n0} \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Są to więc równania różniczkowe pierwszego rzędu, które umożliwiają wyznaczanie przebiegu zmian wartości współrzędnych stanu pod wpływem wielkości wejściowych, począwszy od stanu początkowego w chwili $t_0$.

Równania wyjść są równaniami algebraicznymi, wyrażającymi zależność wielkości wyjściowych od zmiennych stanu i wielkości wejściowych:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_k) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_k) \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Jeżeli równania (13.6) i (13.7) są nieliniowe i możliwa jest ich linearyzacja w otoczeniu określonego (nominalnego) punktu pracy, to po linearyzacji przybierają one postać:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + ... + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0 \Delta u_1 + ... + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_k}\right)_0 \Delta u_k \\ &\vdots \\ \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} &= \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + ... + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_0 \Delta u_1 + ... + \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_k}\right)_0 \Delta u_k \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_1(t) &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + ... + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\right)_0 \Delta u_1 + ... + \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_k}\right)_0 \Delta u_k \\ &\vdots \\ \Delta y_m(t) &= \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + ... + \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + \left(\frac{\partial g_m}{\partial u_1}\right)_0 \Delta u_1 + ... + \left(\frac{\partial g_m}{\partial u_k}\right)_0 \Delta u_k \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

Równania stanu i równania wyjść mogą być zapisane w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}U(t) \tag{13.10}$$

$$Y(t) = \mathbf{C}X(t) + \mathbf{D}U(t) \tag{13.11}$$

gdzie:

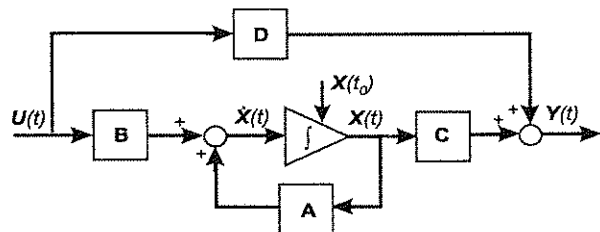
$\dot{X}(t)$ – wektor pochodnych zmiennych stanu,
**A** – macierz stanu o wymiarze $n \times n$,
**B** – macierz wejść o wymiarze $n \times k$,
**C** – macierz wyjść o wymiarze $m \times n$,
**D** – macierz transmisyjna o wymiarze $m \times k$.

Stan dynamiczny układu w chwili początkowej $t_0$ określa wektor warunków początkowych

$$X(t_0) = X_0 \tag{13.12}$$

W przypadku układów stacjonarnych elementy macierzy **A**, **B**, **C**, **D** są wartościami stałymi, natomiast w przypadku układów niestacjonarnych – funkcjami czasu. W przypadku układów jednowymiarowych macierz **B** jest macierzą kolumnową o wymiarze $n \times 1$, macierz **C** jest macierzą wierszową o wymiarze $1 \times n$.

Na podstawie równań stanu i równań wyjść w stosunkowo prosty sposób można wyznaczać przebiegi wielkości wyjściowych układu, począwszy od określonego stanu początkowego, wykorzystując strukturę przetwarzania informacji przedstawioną w postaci schematu blokowego na rys. 13.2.




Rys. 13.2. Schemat blokowy modelu liniowego układu dynamicznego opisanego przez równania stanu (13.10) i równania wyjść (13.11); $X(t_0)$ – wektor warunków początkowych układu

Podsumowując można stwierdzić, że na podstawie wartości zmiennych stanu w początkowej chwili $t = t_0$ (początkowego stanu układu), wielkości wejściowych dla $t \geq t_0$ oraz równań stanu i równań wyjść, można określić zachowanie się układu w dowolnych chwilach $t > t_0$. Zatem stan dynamiczny układu w chwili $t$ jest całkowicie określony przez stan w chwili $t_0$ i przez wielkości wejściowe przy $t \geq t_0$ oraz niezależny od stanu układu i wielkości wejściowych przed chwilą $t_0$.



Zmienne stanu takie, że dana zmienna stanu jest pochodną zmiennej poprzedniej, nazywane są **zmiennymi fazowymi**. Zmiennymi fazowymi są np.: droga, prędkość, przyspieszenie.

**Przestrzeń stanu** jest to prostokątny układ współrzędnych, na osiach którego odkładane są wartości zmiennych stanu. W miarę upływu czasu, punkt wyznaczony przez wartości zmiennych stanu przesuwa się w tej przestrzeni wzdłuż linii zwanej **trajektorią**. Jeżeli zmiennymi stanu są zmienne fazowe, to trajektoria nazywa się **trajektorią fazową**.

Ogólnie można stwierdzić, że opis dynamiki układu z wykorzystaniem współrzędnych stanu jest bardziej ogólny niż opis w postaci transmitancji. Jego zaletą jest możliwość badania zachowania się układu pod wpływem jednocześnie kilku wielkości wejściowych i począwszy od dowolnych warunków początkowych. Jest on trudniejszy do interpretacji fizycznej niż opis w postaci transmitancji i niemożliwy do bezpośredniego określenia na drodze eksperymentalnej, ale bardziej wygodny do celów symulacji komputerowej oraz do projektowania układów wielowymiarowych.

Danemu modelowi układu w postaci transmitancji można przyporządkować modele wykorzystujące różne wektory stanu, ale każdemu z tych modeli odpowiada ta sama transmitancja.

Na podstawie równań stanu (13.10) i równań wyjść (13.11) zostanie wyznaczona macierz transmitancji $\mathbf{G}(s)$. Poddając te równania przekształceniu Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych, otrzymuje się:

$$s\overline{X}(s) = \mathbf{A}\overline{X}(s) + \mathbf{B}\overline{U}(s) \tag{13.13}$$

$$\overline{Y}(s) = \mathbf{C}\overline{X}(s) + \mathbf{D}\overline{U}(s) \tag{13.14}$$

gdzie symbole $\overline{X}(s)$, $\overline{U}(s)$ i $\overline{Y}(s)$ oznaczają transformaty Laplace'a odpowiednio wektorów $X(t)$, $U(t)$, $Y(t)$.

Z równania (13.13) można wyznaczyć transformatę wektora stanu

$$\overline{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\overline{U}(s) \tag{13.15}$$

gdzie: $\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa; wyrażenie $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ jest macierzą odwrotną macierzy $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Z równań (13.14) i (13.15) otrzymuje się

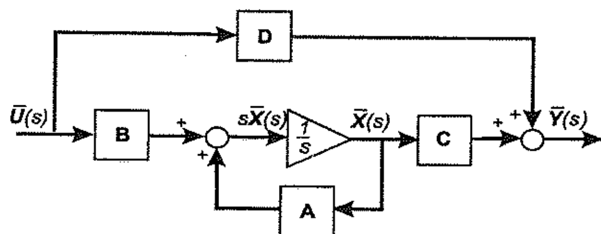
$$\overline{Y}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\overline{U}(s) + \mathbf{D}\overline{U}(s) \tag{13.16}$$

skąd

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\overline{Y}(s)}{\overline{U}(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{13.17}$$

równoważne macierzy transmitancji (13.3).

Na podstawie równań (13.13) i (13.14) można utworzyć odpowiednik schematu blokowego z rys. 13.2 w dziedzinie zmiennej zespolonej (rys. 13.3).




Rys. 13.3. Schemat blokowy modelu w dziedzinie zmiennej zespolonej liniowego układu dynamicznego opisanego przez równanie stanu (13.13) i równanie wyjść (13.14)

Opis układu we współrzędnych stanu jest równoważny opisowi za pomocą transmitancji pod warunkiem, że układ jest **sterowalny i obserwowalny** [14].

## 13.2. TWORZENIE OPISU JEDNOWYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z WYKORZYSTANIEM WSPÓŁRZĘDNYCH STANU NA PODSTAWIE RÓWNANIA DYNAMIKI LUB TRANSMITANCJI OPERATOROWEJ

Do tworzenia matematycznych modeli układów jednowymiarowych w postaci równań stanu i równań wyjść, na podstawie równania dynamiki lub transmitancji operatorowej, stosowane są trzy metody: bezpośrednia, równoległa, iteracyjna [2, 10, 14].

Przedstawiona zostanie tylko metoda bezpośrednia, polegająca na $n$-krotnym całkowaniu równania dynamiki opisującego układ, co odpowiada podzieleniu licznika i mianownika transmitancji operatorowej przez $s^n$.

Dzieląc licznik i mianownik transmitancji operatorowej w postaci

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0},\quad n>m \tag{13.18}$$



przez $s^n$, otrzymuje się

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^{m-n}+b_{m-1}s^{m-1-n}+\ldots+b_1 s^{1-n}+b_0 s^{-n}}{1+a_{n-1}s^{-1}+a_{n-2}s^{-2}+\ldots+a_1 s^{1-n}+a_0 s^{-n}} \tag{13.19}$$

Wprowadzając nową zmienną $E(s)$, można transmitancję (13.19) przedstawić w postaci

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{U(s)} \tag{13.20}$$

gdzie:

$$\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+a_{n-1}s^{-1}+a_{n-2}s^{-2}+\ldots+a_1 s^{1-n}+a_0 s^{-n}} \tag{13.21}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)}=b_m s^{m-n}+b_{m-1}s^{m-1-n}+\ldots+b_1 s^{1-n}+b_0 s^{-n} \tag{13.22}$$

Z równania (13.21) otrzymuje się zależność

$$\begin{aligned}E(s)&=U(s)-(a_{n-1}s^{-1}+a_{n-2}s^{-2}+\ldots+a_1 s^{1-n}+a_0 s^{-n})E(s)=\\&=-a_0 s^{-n}E(s)-a_1 s^{1-n}E(s)-\ldots-a_{n-2}s^{-2}E(s)-a_{n-1}s^{-1}E(s)+U(s)\end{aligned} \tag{13.23}$$

natomiast z równania (13.22)

$$\begin{aligned}Y(s)&=(b_m s^{m-n}+b_{m-1}s^{m-1-n}+\ldots+b_1 s^{1-n}+b_0 s^{-n})\,E(s)=\\&=b_0 s^{-n}E(s)+b_1 s^{1-n}E(s)+\ldots+b_{m-1}s^{m-1-n}E(s)+b_m s^{m-n}E(s)\end{aligned} \tag{13.24}$$

Przyjmijmy fazowe współrzędne stanu $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ i równania stanu w postaci

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\\\dot{x}_2(t)&=x_3(t)\\&\vdots\\\dot{x}_{n-1}(t)&=x_n(t)\\\dot{x}_n(t)&=e(t)\end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

gdzie $e(t)=L^{-1}[E(s)]$.

Poddając równania (13.25) przekształceniu Laplace'a, można napisać:

$$\left.\begin{aligned} sX_1(s) &= X_2(s) \\ sX_2(s) &= X_3(s) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ sX_{n-1}(s) &= X_n(s) \\ sX_n(s) &= E(s) \end{aligned}\right\} \text{ lub } \left.\begin{aligned} X_1(s) &= s^{-1}X_2(s) = s^{-n}E(s) \\ X_2(s) &= s^{-1}X_3(s) = s^{1-n}E(s) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ X_{n-1}(s) &= s^{-1}X_n(s) = s^{-2}E(s) \\ X_n(s) &= s^{-1}E(s) \end{aligned}\right\} \tag{13.26}$$

Uwzględniając zależności (13.26), można równanie (13.23) przedstawić w postaci

$$E(s) = -a_0X_1(s) - a_1X_2(s) - \ldots - a_{n-2}X_{n-1}(s) - a_{n-1}X_n(s) + U(s) \tag{13.27}$$

a równanie (13.24) w postaci

$$Y(s) = b_0X_1(s) + b_1X_2(s) + \ldots + b_{m-1}X_m(s) + b_mX_{m+1}(s) \tag{13.28}$$

Odpowiednikami zależności (13.27) i (13.28) w dziedzinie czasu są:

$$e(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \ldots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + u(t) \tag{13.29}$$

$$y(t) = b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \ldots + b_{m-1}x_m(t) + b_mx_{m+1}(t) \tag{13.30}$$

Równanie (13.30) jest równaniem wyjść układu opisanego transmitancją (13.18).

Równania stanu otrzymuje się, wstawiając wyrażenie (13.29) do (13.25)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \ldots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + u(t) \end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

Występujące w równaniach stanu i wyjść (13.10) i (13.11) macierze mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{13.32}$$

$$\mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \ldots \quad b_m \quad \ldots \quad 0]_{1\times n}, \qquad \mathbf{D} = [0]$$



## 13.3. FORMUŁOWANIE OPISU UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z WYKORZYSTANIEM WSPÓŁRZĘDNYCH STANU

**Przykład 13.1**

Wyznaczyć równania stanu i wyjść członów podstawowych wymienionych w tabl. 13.1.

*Rozwiązanie*

Równania dynamiki członów inercyjnego, całkującego i różniczkującego są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Do opisu tych członów we współrzędnych stanu niezbędna jest tylko jedna współrzędna. W przypadku członów inercyjnego i całkującego współrzędną tę można utożsamić z wielkością wyjściową. Równanie stanu wynika bezpośrednio z równania dynamiki (tabl. 13.1).

Do sformułowania opisu członu różniczkującego rzeczywistego we współrzędnych stanu wykorzystajmy metodę bezpośrednią, opisaną w rozdz. 13.2. Przedstawmy transmitancję członu w postaci (13.18)

$$G(s) = \frac{Ts}{\frac{T}{k_d}s + 1} = \frac{k_d s}{s + \frac{k_d}{T}}$$

Zgodnie z przyjętymi we wzorze (13.18) oznaczeniami współczynników:

$$k_d = b_1, \qquad \frac{k_d}{T} = a_0$$

Ze wzoru (13.31) wynika równanie stanu

$$\dot{x}(t) = -a_0x(t) + u(t) = -\frac{k_d}{T}x(t) + u(t)$$

Ze względu na brak w transmitancji członu różniczkującego współczynnika $b_0$, nie można do wyznaczenia równania wyjść wykorzystać wzoru (13.30). Natomiast na podstawie wzorów (13.24) i (13.27) można napisać:

$$Y(s) = b_1E(s) = b_1[-a_0X(s) + U(s)]$$

a więc równanie wyjść ma postać

$$y(t) = -a_0b_1x(t) + b_1u(t) = -\frac{k_d^2}{T}x(t) + k_du(t)$$

Tablica 13.1

**Równania stanu i wyjść członów podstawowych**

| Człon | Równanie dynamiki | Równania stanu i równania wyjść |
|---|---|---|
| Inercyjny | $T\dot{y}(t)+y(t)=ku(t)$ | $\dot{x}(t)=-\frac{1}{T}x(t)+\frac{k}{T}u(t)$<br>$y(t)=x(t)$<br>$\mathbf{A}=\left[-\frac{1}{T}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\frac{k}{T}\right],\quad \mathbf{C}=[1],\quad \mathbf{D}=[0]$ |
| Całkujący | $T\dot{y}(t)=u(t)$ | $\dot{x}(t)=\frac{1}{T}u(t)$<br>$y(t)=x(t)$<br>$\mathbf{A}=[0],\quad \mathbf{B}=\left[\frac{1}{T}\right],\quad \mathbf{C}=[1],\quad \mathbf{D}=[0]$ |
| Różniczkujący rzeczywisty | $\frac{T}{k_d}\dot{y}(t)+y(t)=T\dot{u}(t)$ | $\dot{x}(t)=-\frac{k_d}{T}x(t)+u(t)$<br>$y(t)=-\frac{k_d^2}{T}x(t)+k_d u(t)$<br>$\mathbf{A}=\left[-\frac{k_d}{T}\right],\quad \mathbf{B}=[1],\quad \mathbf{C}=\left[-\frac{k_d^2}{T}\right],\quad \mathbf{D}=[k_d]$ |
| Oscylacyjny | $\ddot{y}(t)+2\xi\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2 y(t)=$<br>$=k\omega_0^2 u(t)$ | $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$<br>$\dot{x}_2(t)=-\omega_0^2 x_1(t)-2\xi\omega_0 x_2(t)+u(t)$<br>$y(t)=k\omega_0^2 x_1(t)$<br>$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$<br>$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}k\omega_0^2 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=[0]$ |



Do opisu członu oscylacyjnego we współrzędnych stanu niezbędne są dwie współrzędne stanu. Na podstawie transmitancji członu zgodnej z postacią (13.18)

$$G(s)=\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$$

otrzymujemy wartości współczynników:

$$b_0=k\omega_0^2,\quad a_0=\omega_0^2,\quad a_1=2\xi\omega_0$$

Równania stanu można uzyskać na podstawie zależności (13.31):

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

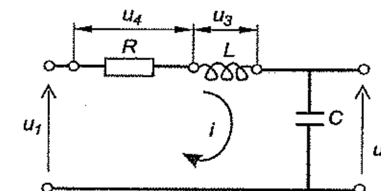
$$\dot{x}_2(t)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)+u(t)=-\omega_0^2x_1(t)-2\xi\omega_0x_2(t)+u(t)$$

a równanie wyjść – korzystając ze wzoru (13.30)

$$y(t)=b_0x_1(t)=k\omega_0^2x_1(t)$$

**Przykład 13.2**

Sformułować opis czwórnika RLC przedstawionego na rys. 13.4 z użyciem zmiennych stanu przy założeniu, że wielkością wejściową jest napięcie $u_1$, wyjściową – napięcie $u_2$ oraz że rezystancja między zaciskami wyjściowymi jest nieskończenie wielka.




Rys. 13.4. Schemat czwórnika RLC do przykładu 13.2

*Rozwiązanie*

Napięcie $u_1$ na zaciskach wejściowych czwórnika jest równe sumie napięć $u_2$ na kondensatorze, $u_3$ na cewce i $u_4$ na rezystorze:

$$u_1(t)=u_2(t)+u_3(t)+u_4(t) \tag{13.33}$$

Uwzględniając zależności

$$u_4(t)=Ri(t),\quad u_3(t)=L\frac{di(t)}{dt},\quad i(t)=C\frac{du_2(t)}{dt} \tag{13.34}$$

otrzymujemy równanie dynamiki czwórnika

$$\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_2(t)}{dt}+\frac{1}{LC}u_2(t)=\frac{1}{LC}u_1(t) \tag{13.35}$$

Równanie to przekształcimy do postaci dogodnej do zapisu z wykorzystaniem zmiennych stanu

$$\frac{d^2u_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}u_2(t) - \frac{R}{L}\frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_1(t) \tag{13.36}$$

Opisując układ z użyciem zmiennych stanu, najczęściej wykorzystuje się zmienne fazowe; jako pierwszą współrzędną $x_1$ przyjmuje się wielkość wyjściową układu, a pozostałe zmienne są kolejnymi pochodnymi tej wielkości. W tym przypadku należy wprowadzić dwie zmienne stanu.

Z założenia, że

$$x_1(t) = y(t) = u_2(t) \tag{13.37}$$

oraz

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \text{ (pierwsze równanie stanu)} \tag{13.38}$$

wynikają zależności:

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du_2(t)}{dt} \tag{13.39}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2u_2(t)}{dt^2} \tag{13.40}$$

Uwzględniając zależności (13.37), (13.39) i (13.40), z równania (13.36) otrzymuje się drugie równanie stanu

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{LC}u_1(t)$$

Jeżeli więc przyjmie się jako wektor stanu

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} \tag{13.41}$$

równania stanu i równanie wyjść będą miały postać

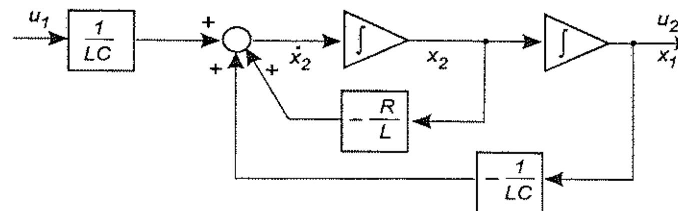
$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{LC}u_1(t) \\ &y(t) = x_1(t) = u_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{13.42}$$

Macierzami wektorowo-macierzowej postaci równań stanu i wyjść są:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1, 0], \quad \mathbf{D} = [0] \tag{13.43}$$



Równaniom (13.42) odpowiada analogowy model czwórnika RLC, przedstawiony na rys. 13.5.




Rys. 13.5. Model analogowy czwórnika RLC, zgodny z zależnościami (13.42)

Jak wcześniej wspomniano, dla układu o danym równaniu dynamiki (o danej transmitancji) można tworzyć modele wykorzystujące różne zestawy zmiennych stanu. W rozważanym modelu wybrano współrzędne fazowe, które reprezentowały napięcie i szybkość zmian napięcia na zaciskach wyjściowych czwórnika, co oznacza, że jedna ze zmiennych fazowych może być pomiarowo trudno dostępna.

Korzystnym zestawem zmiennych stanu byłby zestaw umożliwiający bezpośredni pomiar obu współrzędnych. Przyjmijmy jako współrzędną $x_1$ napięcie wyjściowe $u_2$, a jako $x_2$ natężenie prądu $i$ (nie będą to współrzędne fazowe). Na podstawie (13.33) i (13.34) można napisać:

$$\begin{aligned} &\frac{du_2(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \\ &u_1(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_2(t) \end{aligned} \tag{13.44}$$

Dla przyjętego wektora stanu

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \tag{13.45}$$

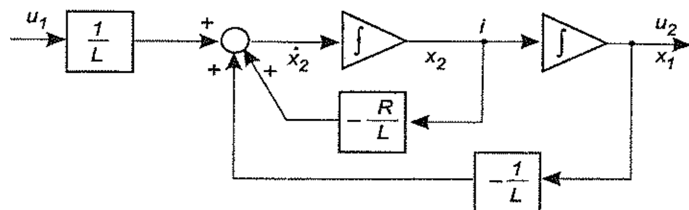
z zależności (13.44) wynikają równania stanu i równanie wyjść:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \\ &y(t) = x_1(t) \end{aligned} \tag{13.46}$$

Macierzami wektorowo-macierzowej postaci równań stanu i wyjść są:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1, 0], \quad \mathbf{D} = [0] \tag{13.47}$$

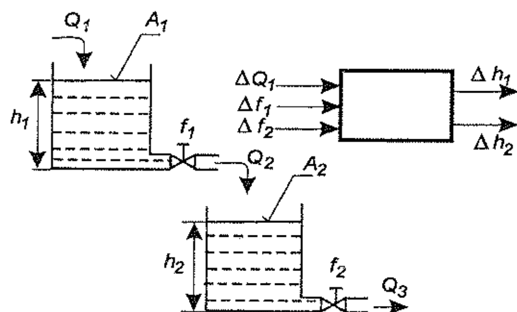
Równaniom (13.46) odpowiada analogowy model czwórnika RLC, przedstawiony na rys. 13.6.




Rys. 13.6. Model analogowy czwórnika RLC, zgodny z zależnościami (13.46)

### Przykład 13.3

Utworzyć model matematyczny z wykorzystaniem zmiennych stanu obiektu złożonego z dwóch zbiorników cieczy połączonych szeregowo (rys. 13.7). Wielkościami wejściowymi obiektu są: strumień objętości $Q_1$, przekrój przepływowy $f_1$, przekrój przepływowy $f_2$, a wielkościami wyjściowymi: wysokość słupa cieczy $h_1$ i wysokość słupa cieczy $h_2$.




Rys. 13.7. Schemat obiektu do przykładu 13.3; $A_1$, $A_2$ – powierzchnie lustra cieczy, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ – strumienie objętości cieczy, $f_1$, $f_2$ – powierzchnie przekrojów przepływowych zaworów, $h_1$, $h_2$ – wysokości słupów cieczy w zbiornikach



*Rozwiązanie*

Związki fizyczne między poszczególnymi wielkościami zapisać można w postaci bilansu strumieni objętości

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= Q_1 - Q_2 \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} &= Q_2 - Q_3 \end{aligned} \tag{13.48}$$

gdzie $A_1$, $A_2$ – powierzchnie lustra cieczy (wartości stałe).

Uwzględniając zależności strumieni objętości $Q_2$ i $Q_3$ od wysokości słupa cieczy i przekroju przepływowego zaworów

$$\begin{aligned} Q_2 &= \alpha_1 f_1 \sqrt{2gh_1} \\ Q_3 &= \alpha_2 f_2 \sqrt{2gh_2} \end{aligned} \tag{13.49}$$

gdzie $\alpha_1$, $\alpha_2$ – współczynniki przepływu zależne od konstrukcji zaworu, otrzymuje się nieliniowe równania:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= Q_1 - \alpha_1 f_1 \sqrt{2gh_1} \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} &= \alpha_1 f_1 \sqrt{2gh_1} - \alpha_2 f_2 \sqrt{2gh_2} \end{aligned} \tag{13.50}$$

które po linearyzacji w określonym punkcie pracy układu i uporządkowaniu, przybierają postać

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta h_1}{dt} &= \frac{1}{A_1}\Delta Q_1 - k_1 \Delta h_1 - k_2 \Delta f_1 \\ \frac{d\Delta h_2}{dt} &= k_3 \Delta h_1 + k_4 \Delta f_1 - k_5 \Delta h_2 - k_6 \Delta f_2 \end{aligned} \tag{13.51}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial h_1}\right)_0, \quad k_2 = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial f_1}\right)_0, \quad k_3 = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial h_1}\right)_0$$

$$k_4 = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial f_1}\right)_0, \quad k_5 = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial h_2}\right)_0, \quad k_6 = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial f_2}\right)_0$$

Równania (13.51) przedstawiają stan dynamiczny obiektu w otoczeniu punktu pracy. Stan dynamiczny układu jednoznacznie charakteryzują wysokości słupów cieczy, zatem jako wektor stanu przyjęto

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h_1(t) \\ \Delta h_2(t) \end{bmatrix}$$

Wektorami wejść i wyjść są:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q_1(t) \\ \Delta f_1(t) \\ \Delta f_2(t) \end{bmatrix}, \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h_1(t) \\ \Delta h_2(t) \end{bmatrix}$$

Równania (13.51) można przedstawić w postaci macierzowej:

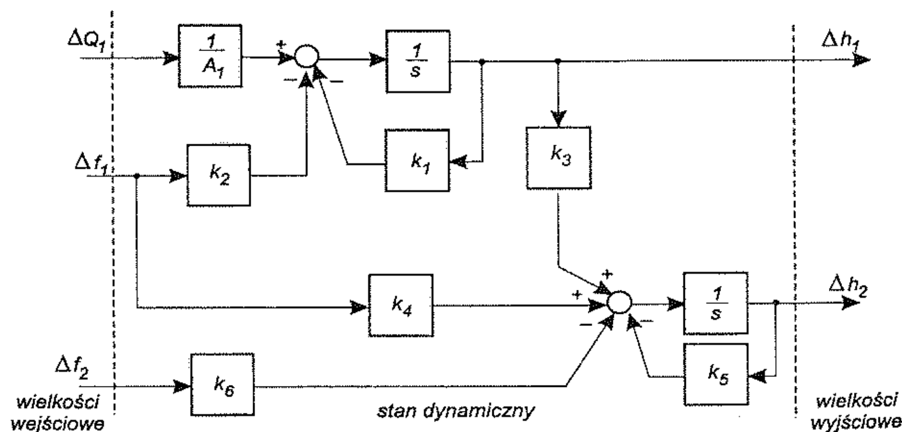
$$\dot{X}(t) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}U(t) \tag{13.52}$$

$$Y(t) = \mathbf{C}X(t) + \mathbf{D}U(t) \tag{13.53}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_3 & -k_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & -k_2 & 0 \\ 0 & k_4 & -k_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [0] \tag{13.54}$$

Schemat blokowy obiektu przedstawiono na rys. 13.8.




Rys. 13.8. Schemat blokowy obiektu do przykładu 13.3

W celu sprawdzenia poprawności zapisu macierzowego odtwórzmy równania (13.51) na podstawie równań (13.52–13.54):

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_3 & -k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & -k_2 & 0 \\ 0 & k_4 & -k_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -k_1 \Delta h_1 + 0 \cdot \Delta h_2 \\ k_3 \Delta h_1 - k_5 \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} Q_1 - k_2 \Delta f_1 + 0 \cdot \Delta f_2 \\ 0 \cdot \Delta Q_1 + k_4 \Delta f_1 - k_6 \Delta f_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -k_1 \Delta h_1 \\ k_3 \Delta h_1 - k_5 \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \Delta Q_1 - k_2 \Delta f_1 \\ k_4 \Delta f_1 - k_6 \Delta f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \Delta Q_1 - k_2 \Delta f_1 - k_1 \Delta h_1 \\ k_4 \Delta f_1 - k_6 \Delta f_2 + k_3 \Delta h_1 - k_5 \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

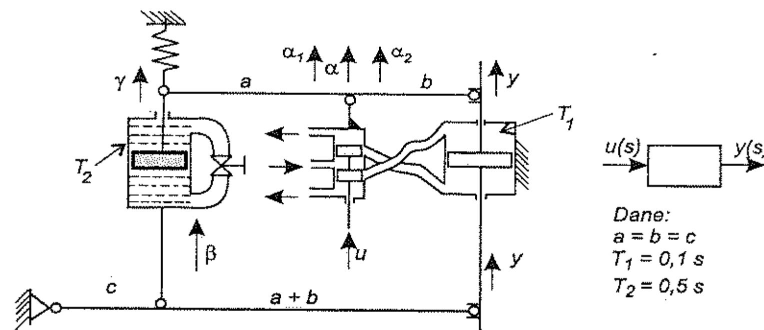
Ostatecznie otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} Q_1 - k_2 \Delta f_1 - k_1 \Delta h_1 \\ k_4 \Delta f_1 - k_6 \Delta f_2 + k_3 \Delta h_1 - k_5 \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

co jest równoznaczne z zapisem (13.51).

**Przykład 13.4**

Sformułować opis z użyciem zmiennych stanu układu przedstawionego na rys. 13.9.




Rys. 13.9. Schemat do przykładu 13.4

*Rozwiązanie*

Układ przedstawiony na rys. 13.9 został poddany analizie w przykładzie 6.4 w rozdz. 6. Na podstawie schematu blokowego układu została wyznaczona transmitancja operatorowa

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(T_2s+1)(a+b)(a+b+c)}{Es^2+Fs+a(a+b+c)} \tag{13.55}$$

gdzie:

$$E=T_1T_2(a+b)(a+b+c)$$

$$F=T_1(a+b)(a+b+c)+T_2a(a+b+c)+bc$$

Po podstawieniu danych otrzymuje się transmitancję

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s+6}{0{,}3s^2+3{,}1s+3}=\frac{10s+20}{s^2+\frac{31}{3}s+10} \tag{13.56}$$

Na podstawie transmitancji członu zgodnej z postacią (13.18) otrzymuje się wartości współczynników: $b_0=20$, $b_1=10$, $a_0=10$, $a_1=\frac{31}{3}$, a więc

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0} \tag{13.57}$$

Do opisu rozważanego układu we współrzędnych stanu niezbędne są dwie współrzędne stanu.

Równania stanu wyznacza się na podstawie zależności (13.31):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)+u(t)=-10x_1(t)-\frac{31}{3}x_2(t)+u(t)\end{aligned} \tag{13.58}$$

a równanie wyjść – korzystając ze wzoru (13.30):

$$y(t)=b_0x_1(t)+b_1x_2(t)=20x_1(t)+10x_2(t) \tag{13.59}$$

Macierzami wektorowo-macierzowej postaci równań stanu i wyjść są:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -\frac{31}{3}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[20\ \ 10],\quad \mathbf{D}=[0] \tag{13.60}$$



Wektorem stanu jest

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

Sformułujmy opis układu we współrzędnych stanu bez korzystania z gotowych wzorów (13.30) i (13.31), wykonując przekształcenia transmitancji (13.57) zgodne z procedurą metody bezpośredniej. Przekształcamy transmitancję (13.57) do postaci (13.19) i wyodrębniamy w niej dwie części

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}=\frac{b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{1+a_1s^{-1}+a_0s^{-2}}=\frac{Y(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{U(s)}$$

gdzie:

$$\frac{Y(s)}{E(s)}=b_1s^{-1}+b_0s^{-2} \tag{13.61a}$$

$$\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+a_1s^{-1}+a_0s^{-2}} \tag{13.61b}$$

Z równania (13.61b) otrzymuje się zależność

$$E(s)=-a_0s^{-2}E(s)-a_1s^{-1}E(s)+U(s)=U(s)-10s^{-2}E(s)-\frac{31}{3}s^{-1}E(s) \tag{13.62}$$

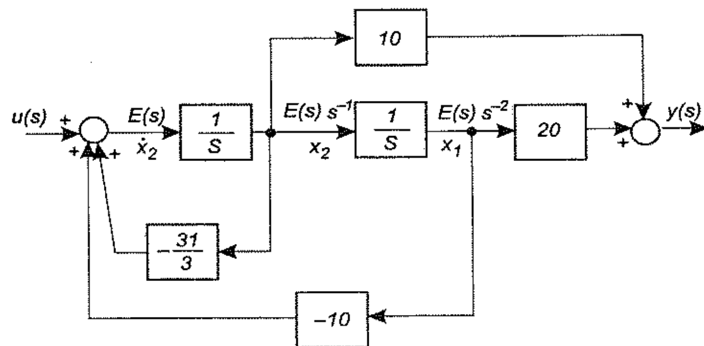
a z równania (13.61a)

$$Y(s)=b_1s^{-1}E(s)+b_0s^{-2}E(s)=10s^{-1}E(s)+20s^{-2}E(s) \tag{13.63}$$

Zgodnie z przyjętą w metodzie bezpośredniej zasadą formułowania równań stanu (równania (13.25)), przyjmujemy

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=e(t)\end{aligned}\right\},\quad \text{a więc}\quad \left.\begin{aligned}X_1(s)&=s^{-1}X_2(s)\\ X_2(s)&=s^{-1}E(s)\end{aligned}\right\} \tag{13.64}$$

Na podstawie równań (13.62) i (13.63) można zbudować model układu w postaci schematu blokowego (rys. 13.10); równania (13.64) umożliwiają umiejscowienie w tym schemacie zmiennych stanu. Bezpośrednio na podstawie tego schematu można utworzyć równania w dziedzinie czasu: równania stanu (13.58) i równanie wyjść (13.59).




Rys. 13.10. Model analogowy układu, zgodny z zależnościami (13.62–13.64)

Do tworzenia opisu układu we współrzędnych stanu na podstawie transmitancji operatorowej można także wykorzystać środowisko MATLAB. Dla rozważanego układu, w wyniku wykonania poleceń:

```
L=[3 6];
M=[0.3, 3.1, 3];
[A,B,C,D]=TF2ss(L,M)
```

otrzymuje się elementy macierzy:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-10{,}333 & -10\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[10\ \ 20],\quad \mathbf{D}=[0] \tag{13.65}$$

Poprawność obliczeń sprawdza się, wykorzystując relację (13.17), łączącą opis z wykorzystaniem zmiennych stanu z opisem w postaci transmitancji operatorowej:

$$\mathbf{G}(s)=\frac{\overline{Y}(s)}{\overline{U}(s)}=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=[10\quad 20]\left\{s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-10{,}333 & -10\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=$$

$$=[10\quad 20]\begin{bmatrix}s+10{,}333 & 10\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2+10{,}333s+10}[10\quad 20]\begin{bmatrix}s & -10\\ 1 & s+10{,}333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2+10{,}333s+10}[10\quad 20]\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}=\frac{10s+20}{s^2+10{,}333s+10}=\frac{10s+20}{s^2+\frac{31}{3}s+10}$$



Jak widać, na podstawie opisu z użyciem zmiennych stanu odtworzona została transmitancja pierwotna, co oznacza, że w trakcie obliczeń nie popełniono błędu.

Odtwarzanie transmitancji operatorowej na podstawie równań stanu i równań wyjścia w środowisku MATLAB jest realizowane przy zastosowaniu poleceń:

```
k=31/3;
A=[-k -10;1 0];B=[1;0];C=[10 20];
sys=ss(A,B,C,0);
sys_tf=tf(sys)
```

w wyniku których otrzymuje się transmitancję pierwotną (ang. *transfer function*)

```
Transfer function:

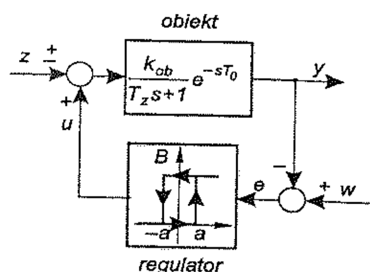
10 s + 20
------------------
s^2 + 10.33 s + 10
```

# 14. REGULACJA DWU- I TRÓJSTAWNA

## 14.1. REGULACJA DWUSTAWNA

W wielu przypadkach zadowalającym efektem regulacji, np. temperatury, ciśnienia, poziomu cieczy czy zawartości składnika, jest utrzymanie wielkości regulowanej w określonym przedziale wartości. Efekt ten można uzyskać, wykorzystując regulator o sygnale wyjściowym dwuwartościowym – **regulator dwustawny**.

Rozpatrzone zostanie zachowanie układów regulacji z regulatorem dwustawnym w przypadku statycznych obiektów regulacji.




Rys. 14.1. Uproszczony schemat blokowy układu regulacji dwustawnej z obiektem statycznym

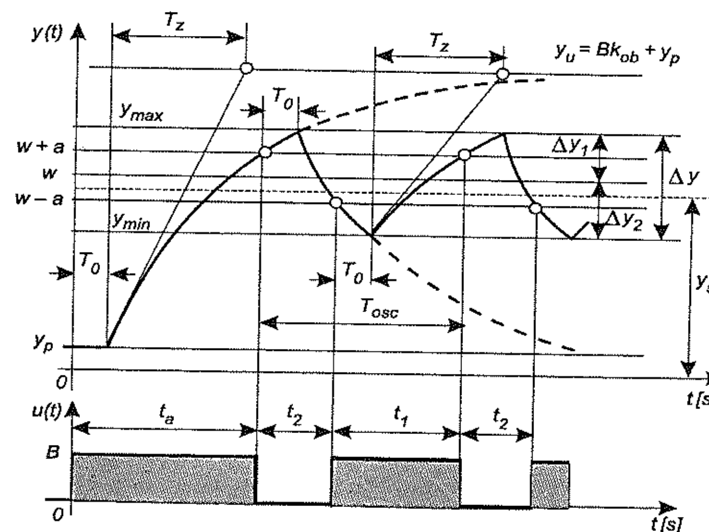
Uproszczony schemat blokowy układu regulacji z regulatorem dwustawnym (**układu regulacji dwustawnej**) z obiektem statycznym w postaci członu inercyjnego z opóźnieniem przedstawiono na rys. 14.1.

Działanie regulatora dwustawnego odpowiada zachowaniu się przekaźnika dwupołożeniowego z histerezą. Rzeczywista realizacja regulatora dwustawnego zależy od rodzaju zespołu wykonawczego zastosowanego w układzie, metody pomiaru wielkości regulowanej i wykorzystywanej techniki przetwarzania informacji. Jako regulator dwustawny może być wykorzystany zarówno prosty przekaźnik stykowy, np. stykowy przekaźnik temperatury lub ciśnienia, jak i spełniający tę samą funkcję układ logiczny lub układ mikroprocesorowy.

W układzie wg rys. 14.1 pojawienie się odchyłki regulacji $e \geq a$ (przy $y = w - a$) powoduje wygenerowanie przez regulator sygnału sterującego $u = B$, co np. w przypadku regulacji temperatury powoduje włączenie dopływu energii do obiektu (energii elektrycznej lub paliwa), w przypadku regulacji poziomu cieczy – otwarcie zaworu doprowadzającego ciecz do zbiornika. Wywołany sygnałem $u = B$ dopływ do obiektu strumienia energii lub materiału powinien być na tyle duży, by przy nominalnej wartości zakłóceń powodować narastanie wielkości regulowanej powyżej wartości zadanej (w przypadku urządzeń chłodniczych jest odwrotnie). W układzie regulacji temperatury zakłóceniem jest oddziaływanie na obiekt otoczenia o innej temperaturze niż wartość zadana, wymiana czynnika ogrzewanego w obiekcie itp. W układzie regulacji poziomu cieczy zakłóceniem może być dopływ lub pobór cieczy ze zbiornika. Przebieg wielkości regulowanej po pojawieniu się sterowania $u = B$ jest odpowiedzią obiektu na sygnał skokowy o wartości $B$.

W trakcie wzrostu wielkości regulowanej pod wpływem sterowania $u = B$, gdy odchyłka regulacji osiągnie wartość $e = -a$ (przy $y = w + a$), sygnał sterujący zmienia wartość na $u = 0$, co powoduje odłączenie dopływu do obiektu strumienia energii lub materiału. Przebieg wielkości regulowanej w tej sytuacji należy traktować jako odpowiedź obiektu na dwa sygnały skokowe: pierwszy o wartości $B$ i drugi, późniejszy, o wartości $-B$, dążącą do stanu początkowego. Jednakże, gdy odchyłka regulacji osiągnie wartość $e = a$ (przy $y = w - a$), sygnał sterujący zmienia ponownie wartość na $u = B$ itd.

Przebieg wielkości regulowanej i sygnału sterującego w układzie regulacji dwustawnej z obiektem statycznym o właściwościach członu inercyjnego z czystym opóźnieniem (wg rys. 14.1) przedstawiono na rys. 14.2, przy założeniu, że wartość zakłócenia działającego na obiekt się nie zmienia.




Rys. 14.2. Przebiegi wielkości regulowanej $y(t)$ i sygnału wyjściowego regulatora $u(t)$ w układzie regulacji dwustawnej z obiektem statycznym

Rozważany jest układ regulacji temperatury, w którym wartość zadana $w$ jest znacznie większa od temperatury otoczenia. Zatem początkową wartością $y_p$ wielkości regulowanej, tj. wartością w chwili zamknięcia pętli sprzężenia zwrotnego, jest temperatura otoczenia. Przyjęto, że szerokość pętli histerezy regulatora jest $2a$, a punkty przełączania regulatora są symetrycznie ustawione w stosunku do zerowej wartości odchyłki. Po zamknięciu pętli regulacyjnej, tj. w chwili $t = 0$, w układzie powstaje odchyłka regulacji $e = w - y_p > a$, co powoduje wygenerowanie przez regulator sygnału $u = B$, wywołującego ciągły dopływ energii do obiektu. Ze względu na opóźnienie $T_0$ obiektu, wielkość regulowana wzrasta dopiero w czasie $t > T_0$, zgodnie z równaniem

$$y(t) = y_p + (y_u - y_p)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-T_0}{T_z}}\right) \tag{14.1}$$

gdzie: $y_u$ – hipotetyczna wartość wielkości regulowanej, jaka ustaliłaby się pod wpływem ciągłego działania na obiekt sygnału $u = B$, a więc $y_u = Bk_{\mathrm{ob}} + y_p$; $k_{\mathrm{ob}}$, $T_0$, $T_z$ – parametry obiektu.

Jeżeli przyjmie się jako początkową wartość wielkości regulowanej $y_p = 0$, to równanie (14.1) przybierze postać

$$y(t) = y_u\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-T_0}{T_z}}\right) \tag{14.2}$$

Wzrost wielkości regulowanej powoduje zmniejszanie się odchyłki regulacji. Po przekroczeniu przez wielkość regulowaną wartości równej $w$, odchyłka przybiera wartości ujemne. Po przekroczeniu przez wielkość regulowaną wartości $y = w + a$, odchyłka przybiera wartości $e = -a$, co powoduje zanik sygnału sterującego i odcięcie dopływu energii do obiektu. Ze względu na opóźnienie $T_0$ obiektu, przez czas $T_0$ od chwili zaniku sygnału sterującego wielkość regulowana w dalszym ciągu narasta, osiągając maksymalną wartość $y_{\max}$.

Czas $t_a$ trwania sygnału sterującego o wartości $B$ można wyznaczyć z równania (14.2), podstawiając $y(t) = y(t_a) = w + a$. Wyrażając wartość zadaną $w$ jako $w = my_u$, otrzymuje się

$$t_a = T_0 + T_z \ln\frac{y_u}{y_u(1-m) - a} \tag{14.3}$$

Maksymalną wartość $y_{\max}$ wielkości regulowanej wyraża zależność

$$y_{\max} = (y_u - w - a)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T_0}{T_z}}\right) + my_u + a = \left[y_u(1-m) - a\right]\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T_0}{T_z}}\right) + my_u + a \tag{14.4}$$



Po osiągnięciu wartości maksymalnej, wielkość regulowana maleje przez okres równy $t_2$, przy czym w początkowej fazie regulator jest wyłączony. Z chwilą przekroczenia przez wielkość regulowaną wartości $w - a$ następuje ponowne włączenie regulatora. Zmniejszanie wartości wielkości regulowanej trwa jeszcze przez czas opóźnienia $T_0$, do wartości minimalnej $y_{\min}$, po czym rozpoczyna się kolejna faza narastania wielkości regulowanej pod wpływem sterowania $u = B$, trwająca przez czas równy $t_1$.

Wartość $y_{\min}$ można wyrazić jako

$$y_{\min} = y_{\max}\,\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{T_z}} = \left[y_u(1-m) - a\right]\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T_0}{T_z}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{T_z}} + (my_u + a)\,\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{T_z}} \tag{14.5}$$

lub

$$y_{\min} = (my_u - a)\,\mathrm{e}^{-\frac{T_0}{T_z}} \tag{14.6}$$

Na podstawie przebiegu kolejnej fazy narastania wielkości regulowanej, wartość $y_{\max}$ można wyrazić w postaci

$$y_{\max} = (y_u - y_{\min})\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{T_z}}\right) + y_{\min} = y_u - (y_u - y_{\min})\,\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{T_z}} \tag{14.7}$$

Z równań (14.4) i (14.7) wyznaczany jest czas $t_1$

$$t_1 = T_0 + T_z \ln\frac{y_u - (my_u - a)\,\mathrm{e}^{-T_0/T_z}}{y_u(1-m) - a} \tag{14.8}$$

z równań (14.5) i (14.6) – czas $t_2$

$$t_2 = T_0 + T_z \ln\frac{y_u - \left[y_u(1-m) - a\right]\mathrm{e}^{-T_0/T_z}}{my_u - a} \tag{14.9}$$

Z zależności (14.8) i (14.9) wynika, że dla $m = 0{,}5$, tj. gdy $w = 0{,}5y_u$ otrzymuje się $t_1 = t_2$; wtedy też okres oscylacji $T_{\mathrm{osc}} = t_1 + t_2$ jest najkrótszy.

Czas $t_1$ nazywany jest **czasem załączania** (włączenia dopływu energii do obiektu), czas $t_2$ – **czasem wyłączania** (odcięcia dopływu energii do obiektu).

Stosunek $\frac{t_1}{t_1 + t_2}$ nazywany jest **współczynnikiem wypełnienia impulsów**, a $T_{\mathrm{osc}}$ – **okresem impulsowania**.

Do opisu procesu regulacji wykorzystuje się także następujące wskaźniki:

– **wartość średnią wielkości regulowanej**

$$y_{śr} = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \tag{14.10}$$

– **amplitudę oscylacji ustalonych**

$$\Delta y = y_{max} - y_{min} \tag{14.11}$$

– **średnią odchyłkę regulacji**

$$e_{śr} = w - y_{śr} \tag{14.12}$$

W przypadku rozpatrywanego układu z obiektem statycznym, wartość średnią wielkości regulowanej oraz amplitudę oscylacji ustalonych wyznacza się, korzystając z zależności (14.4) i (14.6)

$$y_{śr} = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = y_u[0,5 + (m-0,5)\,e^{T_0/T_z}] \tag{14.13}$$

$$\Delta y = y_{max} - y_{min} = y_u(1 - e^{-T_0/T_z}) + 2a e^{-T_0/T_z} \tag{14.14}$$

Średnią odchyłkę regulacji otrzymuje się z (14.11) i (14.13), uwzględniając, że $w = my_u$

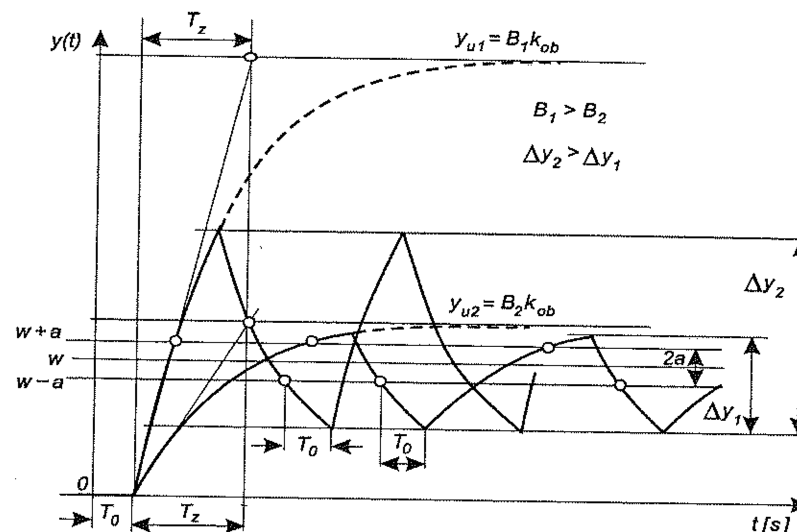
$$e_{śr} = w - y_{śr} = y_u(m-0,5)(1 - e^{-T_0/T_z}) \tag{14.15}$$

Z zależności (14.15) wynika, że w rozpatrywanym układzie regulacji średnia odchyłka regulacji osiąga wartość zero tylko wtedy, gdy wartość zadana $w = 0,5y_u$, tj. gdy $m = 0,5$. Wartości ekstremalne odchyłka średnia osiąga przy $m = 0,25$ i przy $m = 0,75$. Odchyłka średnia nie zależy bezpośrednio od szerokości pętli histerezy regulatora. Natomiast od szerokości pętli histerezy regulatora zależy dopuszczalny zakres zmian wartości zadanej, a więc i zakres zmian współczynnika $m$. Z rys. 14.2 wynika, że wartość zadana może przybierać wartości tylko z zakresu $y_p + a < w < y_u - a$, co oznacza, że przy $y_p = 0$ współczynnik $m$ może przybierać tylko wartości $a/y_u < m < (y_u - a)/y_u$, przy czym, co wynika z wzoru (14.14), wartość $m$, a więc i wartość zadana, nie ma wpływu na amplitudę oscylacji ustalonych wielkości regulowanej (przy danej wartości $y_u$).

W celu uzyskania zerowej wartości średniej odchyłki regulacji dla założonej wartości zadanej, należy tak dostosować wielkość dostarczanego do obiektu strumienia materiału lub energii, gdy regulator jest włączony (gdy $u = B$), aby uzyskać $m = 0,5$, czyli $y_u = 2w$.



Ze wzoru (14.14) wynika, że zwiększanie tego strumienia (a więc i zwiększanie wartości $y_u$) powoduje wzrost amplitudy oscylacji ustalonych wielkości regulowanej (rys. 14.3), przy czym należy zaznaczyć, że jednocześnie zwiększa zakres możliwych nastaw wartości zadanej $w$ w danym układzie.




Rys. 14.3. Wpływ wielkości dostarczanego do obiektu strumienia materiału lub energii w układzie regulacji dwustawnej na przebieg zmian wielkości regulowanej

Wzrost opóźnienia $T_0$ obiektu regulacji wydłuża okres oscylacji i powoduje wzrost amplitudy oscylacji ustalonych wielkości regulowanej (rys. 14.4). Przedstawione przebiegi wielkości regulowanej układów regulacji dwustawnej ilustrują zachowanie tych układów przy założeniu, że właściwości tworzących je elementów odpowiadają przyjętym wyidealizowanym modelom matematycznym tych elementów i przy niezmiennej wartości zakłóceń. Obserwowane w praktyce przebiegi zależą od rzeczywistych właściwości elementów tworzących dany układ i charakteru działających na układ zakłóceń.

Z powyższych rozważań wynika, że wzrost czasu opóźnienia $T_0$ obiektu regulacji niekorzystnie wpływa na jakość regulacji – powoduje zwiększenie amplitudy wahań wielkości regulowanej. Dlatego regulacja dwustawna zapewnia dobre wyniki jedynie w przypadku obiektów o małym stosunku czasu opóźnienia $T_0$ do stałej czasowej $T_z$. Przy stosunku stosunku $T_0/T_z > 0,2$ regulacja dwustawna jest nieefektywna.

Układy regulacji z regulatorami dwustawnymi, w których zastosowano środki powodujące polepszenie jakości regulacji, przez co w tym przypadku rozumie się

Do opisu procesu regulacji wykorzystuje się także następujące wskaźniki:

- **wartość średnią wielkości regulowanej**

$$y_{śr} = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \tag{14.10}$$

- **amplitudę oscylacji ustalonych**

$$\Delta y = y_{\max} - y_{\min} \tag{14.11}$$

- **średnią odchyłkę regulacji**

$$e_{śr} = w - y_{śr} \tag{14.12}$$

W przypadku rozpatrywanego układu z obiektem statycznym, wartość średnią wielkości regulowanej oraz amplitudę oscylacji ustalonych wyznacza się, korzystając z zależności (14.4) i (14.6)

$$y_{śr} = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = y_u[0{,}5 + (m - 0{,}5)\,\mathrm{e}^{T_0/T_z}] \tag{14.13}$$

$$\Delta y = y_{\max} - y_{\min} = y_u(1 - \mathrm{e}^{-T_0/T_z}) + 2a\mathrm{e}^{-T_0/T_z} \tag{14.14}$$

Średnią odchyłkę regulacji otrzymuje się z (14.11) i (14.13), uwzględniając, że $w = my_u$

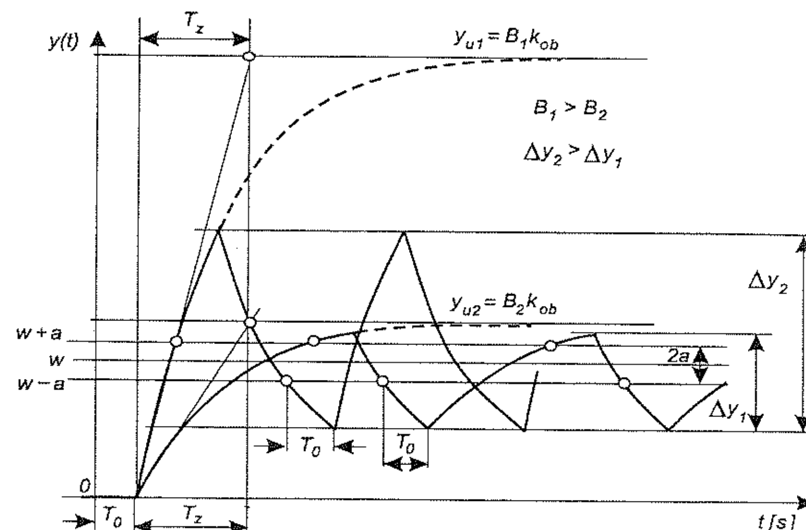
$$e_{śr} = w - y_{śr} = y_u(m - 0{,}5)(1 - \mathrm{e}^{-T_0/T_z}) \tag{14.15}$$

Z zależności (14.15) wynika, że w rozpatrywanym układzie regulacji średnia odchyłka regulacji osiąga wartość zero tylko wtedy, gdy wartość zadana $w = 0{,}5y_u$, tj. gdy $m = 0{,}5$. Wartości ekstremalne odchyłka średnia osiąga przy $m = 0{,}25$ i przy $m = 0{,}75$. Odchyłka średnia nie zależy bezpośrednio od szerokości pętli histerezy regulatora. Natomiast od szerokości pętli histerezy regulatora zależy dopuszczalny zakres zmian wartości zadanej, a więc i zakres zmian współczynnika $m$. Z rys. 14.2 wynika, że wartość zadana może przybierać wartości tylko z zakresu $y_p + a < w < y_u - a$, co oznacza, że przy $y_p = 0$ współczynnik $m$ może przybierać tylko wartości $a/y_u < m < (y_u - a)/y_u$, przy czym, co wynika z wzoru (14.14), wartość $m$, a więc i wartość zadana, nie ma wpływu na amplitudę oscylacji ustalonych wielkości regulowanej (przy danej wartości $y_u$).

W celu uzyskania zerowej wartości średniej odchyłki regulacji dla założonej wartości zadanej, należy tak dostosować wielkość dostarczanego do obiektu strumienia materiału lub energii, gdy regulator jest włączony (gdy $u = B$), aby uzyskać $m = 0{,}5$, czyli $y_u = 2w$.



Ze wzoru (14.14) wynika, że zwiększanie tego strumienia (a więc i zwiększanie wartości $y_u$) powoduje wzrost amplitudy oscylacji ustalonych wielkości regulowanej (rys. 14.3), przy czym należy zaznaczyć, że jednocześnie zwiększa zakres możliwych nastaw wartości zadanej $w$ w danym układzie.



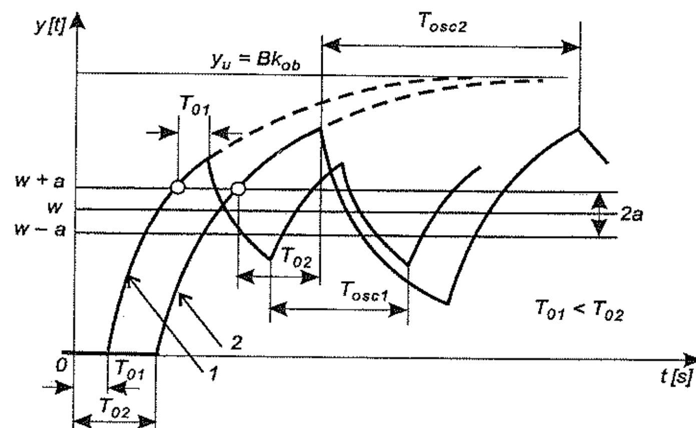

Rys. 14.3. Wpływ wielkości dostarczanego do obiektu strumienia materiału lub energii w układzie regulacji dwustawnej na przebieg zmian wielkości regulowanej

Wzrost opóźnienia $T_0$ obiektu regulacji wydłuża okres oscylacji i powoduje wzrost amplitudy oscylacji ustalonych wielkości regulowanej (rys. 14.4). Przedstawione przebiegi wielkości regulowanej układów regulacji dwustawnej ilustrują zachowanie tych układów przy założeniu, że właściwości tworzących je elementów odpowiadają przyjętym wyidealizowanym modelom matematycznym tych elementów i przy niezmiennej wartości zakłóceń. Obserwowane w praktyce przebiegi zależą od rzeczywistych właściwości elementów tworzących dany układ i charakteru działających na układ zakłóceń.

Z powyższych rozważań wynika, że wzrost czasu opóźnienia $T_0$ obiektu regulacji niekorzystnie wpływa na jakość regulacji – powoduje zwiększenie amplitudy wahań wielkości regulowanej. Dlatego regulacja dwustawna zapewnia dobre wyniki jedynie w przypadku obiektów o małym stosunku czasu opóźnienia $T_0$ do stałej czasowej $T_z$. Przy stosunku stosunku $T_0/T_z > 0{,}2$ regulacja dwustawna jest nieefektywna.

Układy regulacji z regulatorami dwustawnymi, w których zastosowano środki powodujące polepszenie jakości regulacji, przez co w tym przypadku rozumie się

zmniejszenie amplitudy wahań wielkości regulowanej, nazywane są układami regulacji dwustawnej z korekcją. Stosowane metody korekcji nazywane są:
- korekcją przez podział mocy,
- korekcją przez sprzężenie zwrotne.




Rys. 14.4. Wpływ opóźnienia $T_0$ obiektu regulacji na przebieg zmian wielkości regulowanej w układzie regulacji dwustawnej; 1 – przebieg w układzie z obiektem o opóźnieniu $T_{01}$, 2 – przebieg w układzie z obiektem o opóźnieniu $T_{02} > T_{01}$

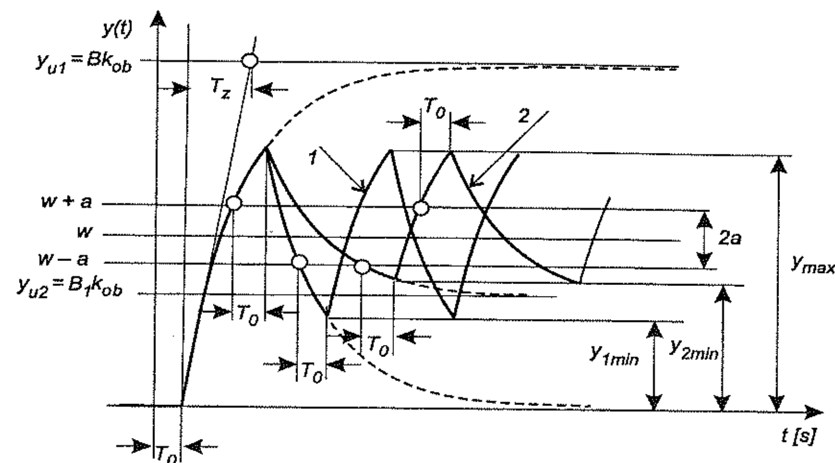
## 14.2. REGULACJA DWUSTAWNA Z KOREKCJĄ PRZEZ PODZIAŁ MOCY

Prostym sposobem zmniejszenia amplitudy wahań wielkości regulowanej w układach regulacji dwustawnej, a więc poprawy jakości regulacji, jest podział dostarczanego do procesu strumienia energii lub materiałów o wartości $B$ na część $B_1$ dostarczaną stale i część $B_2$ dostarczaną pod wpływem regulatora, co określane jest jako podział mocy. Wpływ zastosowania tego rodzaju korekcji na przebieg wielkości regulowanej przedstawiono na rys. 14.5.

Uzyskuje się, w porównaniu z układem bez korekcji, nie tylko zmniejszenie amplitudy wahań wielkości regulowanej lecz także zmniejszenie częstotliwości załączeń (wydłużenie okresu wahań), dzięki czemu wydłuża się czas bezawaryjnej pracy układu. Wadą metody jest ograniczenie zakresu zmian wartości zadanej.



Łatwo zauważyć, że podobny efekt, jak podział mocy, spowodowałoby zmniejszenie sumarycznej wartości $B$ strumienia energii lub materiałów, co jednak byłoby niekorzystne ze względu na ograniczenie możliwości kompensacji zwiększonych zakłóceń.




Rys. 14.5. Przebiegi wielkości regulowanej w układach regulacji dwustawnej ze statycznym obiektem regulacji: 1 – w układzie bez korekcji, 2 – w układzie z korekcją przez podział mocy

## 14.3. REGULACJA DWUSTAWNA Z KOREKCJĄ PRZEZ SPRZĘŻENIE ZWROTNE

Przykładowy schemat blokowy układu regulacji dwustawnej z korekcją przez sprzężenie zwrotne przedstawiono na rys. 14.6. W układzie tym regulator dwustawny z członem korekcyjnym w postaci elementu inercyjnego tworzą obwód ujemnego sprzężenia zwrotnego. Istotne jest spełnienie warunków

$$k_1 << k_{ob} \tag{14.16}$$

oraz

$$T_1 << T_z \tag{14.17}$$

W początkowej fazie pracy układu regulacji, kiedy wielkość regulowana jest dużo mniejsza od wartości zadanej (jak na rys. 14.2), odchyłka regulacji $e$ ma dużą

wartość dodatnią. Ze względu na warunek (14.16), sygnał $u_1 = Bk_1$ powoduje tylko niewielkie zmniejszenie wartości sygnału $e'$ w stosunku do sygnału $e$. Zatem przy dużej odchyłce $e$ do obiektu regulacji stale podawany jest sygnał sterujący o wartości $u = B$, tak jak w zwykłym układzie bez korekcji, powodując ciągły wzrost wielkości regulowanej i zmniejszanie wartości odchyłki $e$.

Pierwsze wyłączenie regulatora występuje z chwilą osiągnięcia przez sygnał $e'$ wartości $e' = e - u_1 = e - Bk_1 = -a$, a więc z chwilą osiągnięcia przez wielkość regulowaną wartości $y = w + a - Bk_1$. Ze względu na małą stałą czasową $T_1$ członu inercyjnego następuje szybkie zmniejszanie wartości sygnału $u_1$ i wzrost sygnału $e'$ do wartości $+a$, co powoduje ponowne załączenie regulatora (niezbędne jest spełnienie warunku $Bk_1 > 2a$). Rozpoczyna się ciąg oscylacji sygnału $e'$ o amplitudzie $2a$ i związany z tym ciąg włączeń i wyłączeń regulatora o częstotliwości znacznie wyższej, ze względu na warunek (14.17), niż w układzie bez korekcji. Porównując fragment schematu na rys. 14.6 oznaczony jako „regulator" ze schematem na rys. 14.1, można zauważyć, że ten sam fragment stanowi układ regulacji dwustawnej bez korekcji, w którym wartością zadaną jest sygnał $e$ (odchyłka regulacji rozważanego układu z korekcją), a wielkością regulowaną – sygnał wyjściowy $u_1$ elementu inercyjnego. W wyniku działania tego układu generowany jest ciąg impulsów sygnału sterującego $u$.

Rys. 14.6. Schemat blokowy układu regulacji dwustawnej z regulatorem z korekcyjnym sprzężeniem inercyjnym

Rozważmy zależność sygnału sterującego $u$ od sygnału odchyłki $e$. W stanach, kiedy regulator jest włączony, można go traktować jako element bezinercyjny o dużym współczynniku wzmocnienia $B$. W przypadku takich stanów można wyznaczyć transmitancję

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{B}{1 + B\dfrac{k_1}{T_1 s + 1}} = \frac{1}{k_1}\,\frac{T_1 s + 1}{\dfrac{T_1}{Bk_1}s + 1} \approx \frac{1}{k_1}(T_1 s + 1) \tag{14.18}$$

z której wynika zależność w dziedzinie czasu

$$u(t) \approx \frac{1}{k_1}\left[e(t) + T_1\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{14.19}$$



Równanie (14.19) wyraża charakter zależności sygnału sterującego $u$ od sygnału odchyłki $e$ w stanach, kiedy $u = B$, tj. w okresach trwania impulsów sygnału $u$.

Można sobie wyobrazić, że zamiast ciągu impulsów sygnału $u$ o amplitudzie $B$, na obiekt regulacji działa równoważny sygnał ciągły w czasie, o mniejszej wartości niż $B$, nazywany uśrednionym sygnałem sterującym $u_{śr}$. Wykorzystując oznaczenia z rys. 14.2, można wartość uśrednionego sygnału sterującego dla jednego okresu sygnału impulsowego określić jako

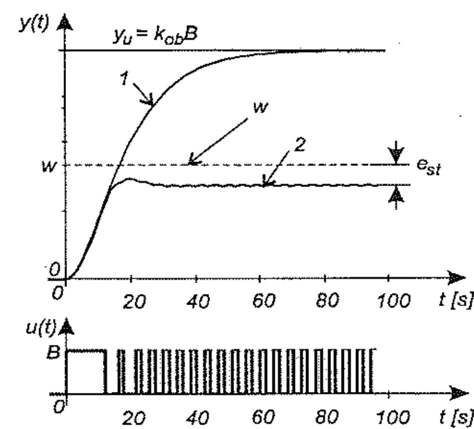
$$u_{śr} = \frac{B\,t_1}{t_1 + t_2} \tag{14.20}$$

Zatem dla regulatora dwustawnego z korekcją w postaci członu inercyjnego otrzymuje się zależność

$$u_{śr} = \frac{Bt_1}{t_1 + t_2} \tag{14.21}$$

W tym przypadku regulator dwustawny z korektorem tworzy zespół o działaniu odpowiadającym zachowaniu się regulatora PD o nastawach $k_p = 1/k_1$ i $T_d = T_1$, nazywany dwustawnym regulatorem o algorytmie PD.

Charakter przebiegów wielkości regulowanej i sygnału sterującego w układzie regulacji z obiektem statycznym i regulatorem dwustawnym o algorytmie PD przedstawiono na rys. 14.7. Jak widać, amplituda wahań wielkości regulowanej, w wyniku zwiększenia częstotliwości przełączeń regulatora, zmniejszyła się tak, że sygnał wyjściowy układu można traktować jako quasi-ciągły. Ze względu na realizowany przez regulator algorytm PD, w układzie powstaje odchyłka statyczna $e_{st}$, której wartość zależy od parametrów sprzężenia korekcyjnego.




Rys. 14.7. Przebiegi sygnałów w układzie regulacji ze statycznym obiektem regulacji i dwustawnym regulatorem o algorytmie PD: 1 – przebieg wielkości regulowanej w układzie otwartym (np. krzywa nagrzewania), 2 – przebieg wielkości regulowanej w układzie z regulatorem; $w$ – wartość zadana

Jeżeli w układzie regulacji dwustawnej zastosuje się dwa elementy korekcyjne, jak na rys. 14.8, to zespół oznaczony jako „regulator" będzie realizował algorytm PID, zgodnie z równaniem

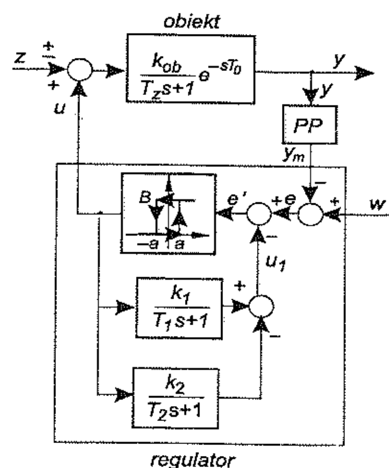
$$u_{śr}(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \tag{14.22}$$

gdzie:

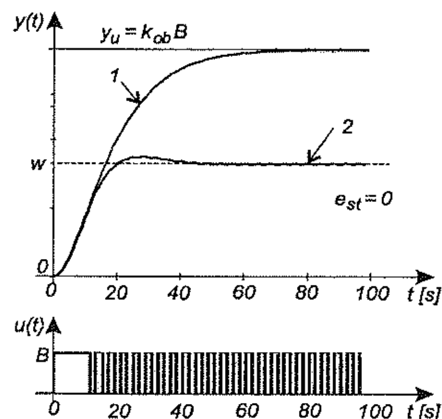
$$k_p = \frac{1}{k_1 k_2} \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1}, \quad T_i = T_1 + T_2, \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

Zespół ten jest więc dwustawnym regulatorem o algorytmie PID.

Przykładowe przebiegi wielkości regulowanej i sygnału sterującego w układzie regulacji z obiektem statycznym i regulatorem dwustawnym o algorytmie PID przedstawiono na rys. 14.9. Uzyskiwana jakość regulacji jest analogiczna, jak w układzie z ciągłym regulatorem PID; ze względu na realizowany przez regulator algorytm, odchyłki statyczne mają wartość zero.




Rys. 14.8. Schemat blokowy układu regulacji ze statycznym obiektem regulacji i dwustawnym regulatorem o algorytmie PID




Rys. 14.9. Przebiegi sygnałów w układzie regulacji ze statycznym obiektem regulacji i dwustawnym regulatorem o algorytmie PID: 1 – przebieg wielkości regulowanej w układzie otwartym, 2 – przebieg wielkości regulowanej w układzie z regulatorem; $w$ – wartość zadana

Sygnał wyjściowy omawianych regulatorów dwustawnych z członami korekcyjnymi jest ciągiem impulsów o współczynniku wypełnienia zależnym od stałych



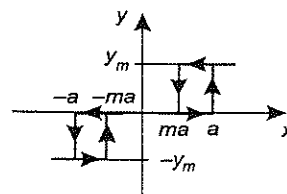
czasowych tych członów. Przy małych stałych czasowych członów korekcyjnych uzyskuje się dużą częstotliwość załączeń regulatora, co powoduje, że ze względu na dużą inercję obiektów regulacji wielkość regulowana w czasie procesów przejściowych zmienia się w sposób płynny i osiąga stan ustalony, jak w przypadku zastosowania regulatorów o działaniu ciągłym. Nastawy regulatorów dwustawnych z korekcją dobiera się analogicznie jak w przypadku regulatorów o działaniu ciągłym.

W przypadku przekaźnikowych regulatorów dwustawnych wykorzystywanych w procesach grzewczych, inercyjne elementy korekcyjne realizuje się przez dołączenie do obwodu, w którym znajduje się cewka przekaźnika, dodatkowego zespołu termicznego, np. termoelementu lub termorezystora.

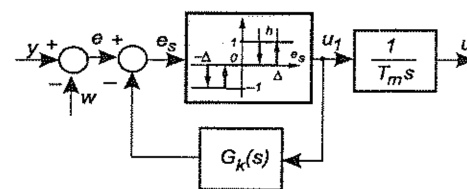
## 14.4. REGULACJA TRÓJSTAWNA – REGULATORY TRÓJSTAWNE

Przekaźnik trójpołożeniowy o charakterystyce statycznej $y(x)$ jak na rys. 14.10 w rzeczywistości jest urządzeniem, które, w zależności od wartości wielkości wejściowej, łączy wyjście $y$ z jednym z trzech źródeł sygnału o wartościach oznaczanych umownie $y_m$, 0 i $-y_m$.

Bezpośrednio w takiej formie przekaźniki trójpołożeniowe nie znalazły szerszego zastosowania w układach regulacji. Natomiast praktyczne znaczenie takich przekaźników wynika z ich przydatności do sterowania zespołami wykonawczymi z silnikami rewersyjnymi. Wprowadzając jako wartości $y_m$ i $-y_m$ sygnały o przeciwnej biegunowości, uzyskuje się uzależnienie kierunku ruchu silnika i stanu spoczynku od wartości sygnału wejściowego przekaźnika. Wykorzystując przekaźnik trójpołożeniowy do sterowania silnikiem rewersyjnym (którego dynamika odpowiada zachowaniu się członu całkującego) i obejmując przekaźnik pętlą sprzężenia zwrotnego (rys. 14.11), podobnie jak w układach regulacji dwustawnej z korekcją przez sprzężenie zwrotne, tworzy się regulatory o różnych właściwościach dynamicznych, zwane regulatorami trójstawnymi.




Rys. 14.10. Charakterystyka statyczna przekaźnika trójpołożeniowego




Rys. 14.11. Schemat blokowy regulatora trójstawnego ze sprzężeniem korekcyjnym

Celem wprowadzenia sprzężenia $G_k(s)$ jest wywołanie ciągu na przemian dodatnich i ujemnych impulsów sygnału $u_1$, które z kolei wywołują piłokształtne oscylacje sygnału wyjściowego $u$ regulatora, o wartości średniej w określony sposób zależnej od sygnału odchyłki regulacji $e$.

W przypadku powolnych zmian odchyłki regulacji $e(t)$ zależność średniej wartości $u_{śr}(t)$ od odchyłki wyraża transmitancja

$$\frac{U_{śr}(s)}{E(s)} \approx \frac{1}{G_k(s)} \frac{1}{T_m s} \tag{14.23}$$

Jeżeli w torze sprzężenia zwrotnego znajduje się człon inercyjny o transmitancji

$$G_k(s) = \frac{k}{T_i s + 1}$$

to

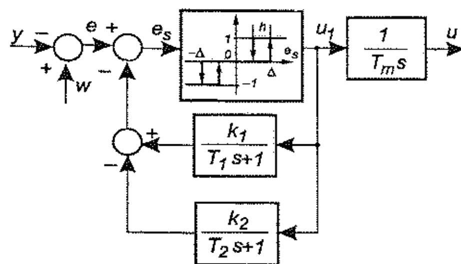
$$\frac{U_{śr}(s)}{E(s)} \approx \frac{T_i s + 1}{k} \frac{1}{T_m s} = \frac{T_i}{kT_m}\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \tag{14.24}$$

Zatem regulator taki realizuje algorytm PI o wzmocnieniu $k_p = T_i / kT_m$ i czasie zdwojenia $T_i$. Podobnie, po zastosowaniu dwóch członów inercyjnych w torze sprzężenia korekcyjnego (rys. 14.12) otrzymuje się algorytm PID o transmitancji operatorowej

$$\frac{U_{śr}(s)}{E(s)} \approx k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{k_d} s + 1}\right) \tag{14.25}$$

gdzie:

$$k_p = \frac{T_1}{k_1 T_m}, \qquad T_i = T_1, \qquad T_d = T_2 \frac{k_2}{k_1} \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}}, \qquad k_d = \frac{k_2}{k_1 - k_2}$$




Rys. 14.12. Schemat blokowy regulatora trójstawnego o działaniu PID



Zgodnie z tą strukturą budowane były regulatory przekaźnikowe analogowe. We wzorach (14.24) i (14.25) stała czasowa $T_m$ członu całkującego określa czas przestawienia zespołu wykonawczego sterowanego silnikiem z jednego krańcowego położenia w drugie, tzn. czas wykonania pełnego skoku trzpienia tego zespołu. Nastawy regulatora dobiera się tak, jak w przypadku regulatorów o działaniu ciągłym.

## 14.5. REGULATORY MIKROPROCESOROWE DWUSTAWNE (REGULATORY 2P) I TRÓJSTAWNE (REGULATORY 3P)

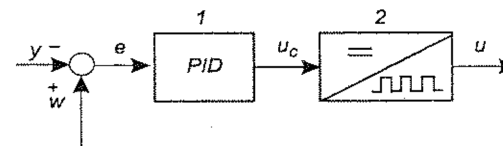
Jak wspomniano, w regulatorach dwustawnych z korekcją przez sprzężenie zwrotne (rys. 14.6 i 14.8) sygnał sterujący $u$ w postaci ciągu impulsów o jednakowej amplitudzie powstaje jako wynik realizacji procesu regulacji dwustawnej w obwodzie samego regulatora. Przy danych parametrach elementów tworzących regulator, zależnie od właściwości dynamicznych obiektu regulacji, pod wpływem sygnału odchyłki regulacji $e$ mogą się zmieniać zarówno czas trwania kolejnych impulsów, jak i okres impulsowania.

Kształtowanie sygnału sterującego w regulatorach dwustawnych realizowanych w technice mikroprocesorowej, zwanych regulatorami 2P, odbywa się na innej zasadzie. Sygnał ten także jest ciągiem impulsów o jednakowej amplitudzie, ale o stałym, zadeklarowanym przez użytkownika okresie impulsowania $T_{2P}$. Czas trwania $T^k_{imp}$ impulsu, rozpoczynającego się w chwili $t^k$, jest proporcjonalny do wyliczonej dla tej chwili wartości sygnału $u_c$ przez blok regulatora o wyjściu ciągłym, realizujący algorytm P, PI lub PID, zgodnie z zależnością

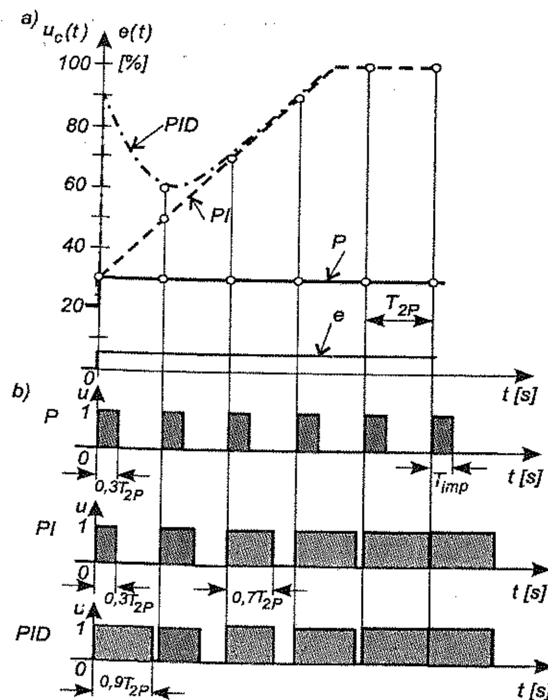
$$T^k_{imp} = T_{2P} \frac{u_c(t^k)}{100} \tag{14.26}$$

gdzie $u_c(t^k)$ jest wartością wyrażoną w procentach zakresu zmian sygnału $u_c$. Sygnał wyjściowy mikroprocesorowego regulatora 2P jest więc sygnałem impulsowym zdyskretyzowanym w czasie o modulowanej szerokości impulsów.

Strukturę regulatora oraz jego odpowiedzi skokowe przedstawiono na rys. 14.13 i 14.14.




Rys. 14.13. Struktura ogólna regulatora 2P; 1 – blok o działaniu ciągłym, 2 – modulator szerokości impulsów




Rys. 14.14. Kształtowanie odpowiedzi regulatora dwustawnego 2P na skokową zmianę odchyłki regulacji: a) sygnały wyjściowe bloku o działaniu ciągłym realizującego algorytm P, PI, PID, b) odpowiadające im impulsowe sygnały wyjściowe regulatora 2P

Wykorzystując w odniesieniu do regulatora 2P pojęcie uśrednionej wartości sygnału wyjściowego w $k$-tym okresie impulsowania

$$u_{\text{śr}}^{k} = \frac{T_{\text{imp}}^{k}}{T_{2\text{P}}} = \frac{u(t^{k})[\%]}{100} \tag{14.27}$$

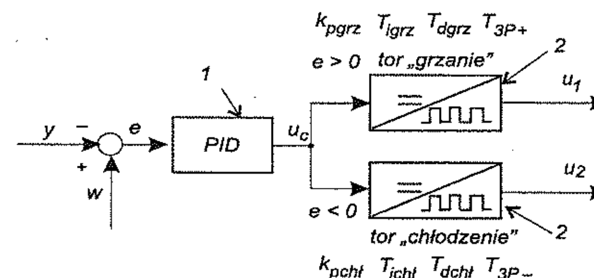
można amplitudę impulsów sygnału wyjściowego regulatora 2P traktować jako zakres zmian uśrednionej wartości sygnału wyjściowego – odpowiednik zakresu zmian sygnału wyjściowego regulatora o wyjściu ciągłym.

Nastawami regulatorów dwustawnych 2P są: $k_p$, $T_i$, $T_d$ oraz okres oscylacji $T_{2\text{P}}$ i parametr $T_{\text{wł}}$ reprezentujący histerezę regulatora wyrażoną w jednostkach czasu. Jeżeli dla danego okresu impulsowania wyliczony przez blok regulatora o działaniu ciągłym czas trwania impulsu jest krótszy od $T_{\text{wł}}$, to ten impuls się nie pojawi. Nastawy wartości $T_{2\text{P}}$ i $T_{\text{wł}}$ dobiera się eksperymentalnie w zależności od rodzaju i mocy urządzenia wykonawczego, tak aby nie dopuścić do zbyt dużej liczby załączeń, co skróciłoby czas bezawaryjnej pracy układu.



Do sterowania niektórymi procesami niezbędne są dwa przeciwstawne tory oddziaływania na wielkość regulowaną, uruchamiane w zależności od znaku odchyłki regulacji. Działanie takie jest potrzebne na przykład do regulacji temperatury pary wodnej w elektrociepłowniach, do sterowania elektrycznymi piecami okresowo nagrzewanymi grzejnikami oporowymi albo, w celu szybkiego obniżenia temperatury, chłodzonymi wentylatorami. Do sterowania takimi procesami przeznaczone są regulatory mikroprocesorowe oznaczane symbolem 3P. Regulator 3P generuje dwa sygnały wyjściowe dwuwartościowe (1, 0) i (0, –1), sterujące dwoma zespołami wykonawczymi o przeciwstawnym oddziaływaniu na proces, umownie nazwanymi torem „grzanie" i torem „chłodzenie". Stan 1 oznacza stan załączenia toru „grzanie", stan –1 oznacza stan załączenia toru „chłodzenie", a stan 0 oznacza wyłączenie obu torów. Sygnały te, podobnie jak w regulatorze 2P, są sygnałami impulsowymi o modulowanej szerokości impulsów. Odchyłka regulacji $e > 0$ wywołuje generację sygnału sterującego w torze „grzanie", odchyłka $e < 0$ – generację sygnału sterującego w torze „chłodzenie". Parametry regulatora, takie jak $k_p$, $T_i$, $T_d$ oraz okres impulsowania $T_{3\text{P}}$, dla każdego toru wprowadza się oddzielnie i parametry te mogą być różne, ponieważ najczęściej różna jest reakcja obiektu na każde z przeciwstawnych sobie oddziaływań. Zatem regulator 3P praktycznie można traktować jako połączenie dwóch regulatorów 2P oddziałujących na proces, mających wspólną wielkość regulowaną i zadaną.

Aby uniknąć równoczesnego załączania obu zespołów wykonawczych, deklaruje się czas $T_{\text{wył}}$. Jest to czas między wyłączeniem toru „grzanie" a załączeniem toru „chłodzenie". Ogólną strukturę regulatora 3P przedstawiono na rys. 14.15.




Rys. 14.15. Ogólna struktura regulatora 3P; 1 – blok o działaniu ciągłym, 2 – modulatory szerokości impulsów

Analogicznie jak w przypadku omówionego regulatora 2P, sygnał $u_c$, wyliczony w bloku o działaniu ciągłym, jest poddawany modulacji szerokości impulsów. Dla odchyłki $e > 0$ sygnał $u_c$ wyliczany jest zgodnie z algorytmem PID i nastawami zadeklarowanymi dla toru „grzanie"; sygnał ten przybiera wartości z zakresu 50÷100%. Dla odchyłki $e < 0$ sygnał $u_c$ wyliczany jest zgodnie z algo-

rytmem PID i nastawami zadeklarowanymi dla toru „chłodzenie"; przybiera wartości z zakresu 0÷50%. Dla odchyłki $e = 0$ sygnał $u_c = 50\%$. Czas trwania impulsu w torze „grzanie", rozpoczynającego się w chwili $t^k$, określony jest zależnością

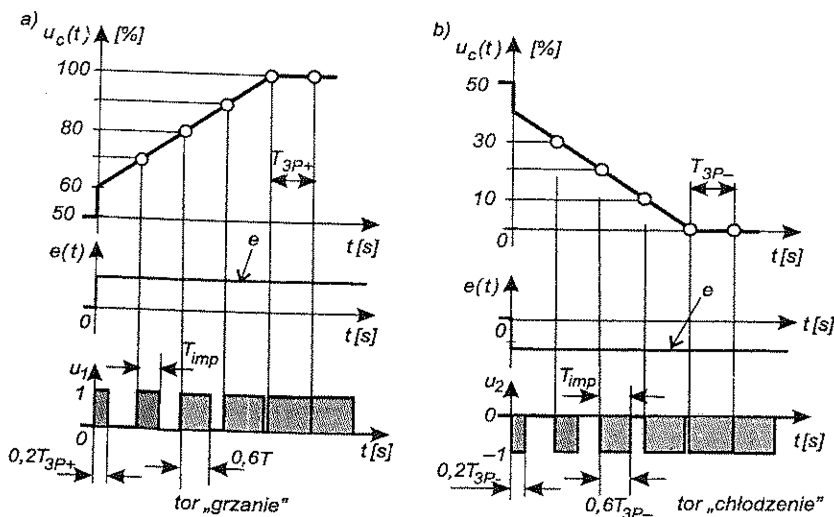
$$T_{\text{imp}}^k = 2T_{3P+}\frac{u_c(t^k)-50}{100} \tag{14.28}$$

a w torze „chłodzenie" – zależnością

$$T_{\text{imp}}^k = 2T_{3P-}\frac{50-u_c(t^k)}{100} \tag{14.29}$$

gdzie $u_c(t^k)$ – wartość sygnału $u_c$, wyrażona w procentach zakresu zmian, wyliczona w bloku PID dla chwili $t^k$.

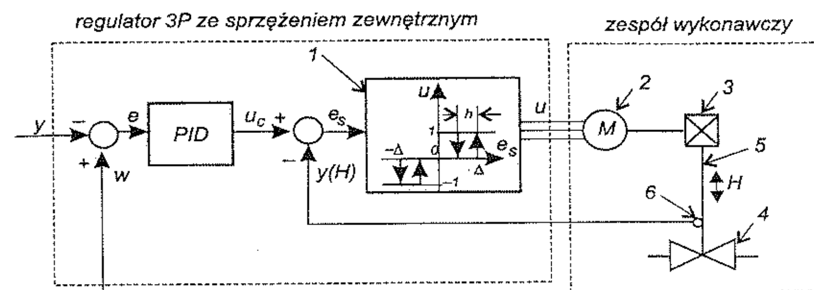
Przykładowy przebieg sygnałów wyjściowych regulatora 3P o algorytmie PI przedstawiono na rys. 14.16.




Rys. 14.16. Przykładowe odpowiedzi regulatora 3P o algorytmie PI: a) na skokową odchyłkę $e > 0$, b) na skokową odchyłkę $e < 0$

Omówiony regulator 3P nie może być stosowany do sterowania zespołami wykonawczymi z napędem w postaci silnika rewersyjnego. Do sterowania takimi zespołami stosuje się regulatory 3P ze sprzężenie zewnętrznym oraz wewnętrznym.

Regulator trójstawny 3P ze sprzężeniem zewnętrznym przystosowany jest do sterowania siłownikiem wyposażonym w silnik nawrotny oraz nadajnik potencjometryczny lub prądowy (w nowszych wersjach) przesunięcia trzpienia siłownika. Regulator ten można traktować jako połączenie tradycyjnego regulatora PID i przekaźnikowego ustawnika pozycyjnego (regulatora położenia trzpienia siłownika) – rys. 14.17.




Rys. 14.17. Schemat połączenia regulatora 3P z zespołem wykonawczym: $h$, $\Delta$ – strefa histerezy i nieczułość przekaźnika trójpołożeniowego, $H$ – położenie trzpienia siłownika, 1 – przekaźnik trójpołożeniowy, 2 – silnik rewersyjny stałoprędkościowy, 3 – przekładnia ruchu obrotowego na posuwisto-zwrotny, 4 – zawór regulacyjny, 5 – trzpień siłownika, 6 – nadajnik położenia

W wyniku porównania wielkości regulowanej $y$ z wartością zadaną $w$, powstaje odchyłka regulacji $e$, na podstawie której, zgodnie z algorytmem PID o zadeklarowanych przez użytkownika nastawach $k_p$, $T_i$, $T_d$, wyliczany jest sygnał $u_c$, stanowiący wartość zadaną dla ustawnika. Jeżeli wyliczona wartość tego sygnału wynosi np. 60%, oznacza to, że trzpień siłownika powinien zajmować pozycję odpowiadającą 60% swojego skoku. Wyliczona wartość $u_c$ pozycji trzpienia siłownika porównywana jest z generowaną przez nadajnik położenia wartością $y(H)$. Odchyłka położenia $e_s > \Delta$ wywoła generację sygnału $u = 1$ i obroty silnika np. w prawo, z czym związany jest ruch trzpienia siłownika umownie „do przodu" tak długo, aż zostanie osiągnięta wyliczona wartość położenia trzpienia z odchyłką $e_s < \Delta - h$; odchyłka $e_s < -\Delta$ wywoła generację sygnału $u = -1$ i ruch trzpienia w kierunku przeciwnym. Zatem przesunięcie trzpienia siłownika nie osiąga wyliczonej przez regulator wartości; powstaje trwała odchyłka o wartości z przedziału $(-\Delta + h,\ \ \Delta - h)$. Zmniejszanie strefy nieczułości ma ograniczoną skuteczność, albowiem łatwo doprowadzić do przebiegu oscylacyjnego o stałej amplitudzie wahań wokół strefy nieczułości.

Aby zabezpieczyć silnik przed uszkodzeniem, oprócz parametrów $k_p$, $T_i$, $T_d$, $\Delta$, $h$ regulatora, należy dodatkowo doświadczalnie dobrać minimalny czas wyłączania $T_{\text{wył}}$ siłownika przy zmianie kierunku obrotów.

Regulator 3P ze sprzężeniem zwrotnym wewnętrznym przeznaczony jest także do współpracy z siłownikiem wyposażonym w rewersyjny silnik elektryczny. Zasada pracy regulatora jest analogiczna, jak wcześniej opisanego regulatora ze

sprzężeniem zewnętrznym. Rolę sprzężenia od położenia trzpienia siłownika pełni człon całkujący o stałej czasowej $T_{100}$, zadeklarowanej przez użytkownika jako czas potrzebny na wykonanie pełnego skoku siłownika. Czas ten określany jest na podstawie pomiarów lub odczytywany z danych technicznych.

Wybór regulatora 3P ze sprzężeniem zwrotnym zewnętrznym wiąże się z kosztem zainstalowania na siłowniku nadajnika przemieszczenia liniowego o standardowym prądowym sygnale wyjściowym, a także udostępnienia jednego z wejść analogowych regulatora w celu wprowadzenia tego sygnału. Decyzja wyboru należy do projektanta.

Jako silniki rewersyjne mogą być stosowane silniki jednofazowe lub trójfazowe. Te ostatnie należy wyposażyć w zestaw przekaźników do tzw. krzyżowania faz. Zmiana ruchu obrotowego na liniowy ruch trzpienia zaworu odbywa się za pośrednictwem dwu przekładni: jednej redukującej obroty, np. z 1400 obr/min na 20 obr/min, oraz drugiej, zamieniającej ruch obrotowy na liniowy.



# 15. UKŁADY NIELINIOWE

## 15.1. NIELINIOWOŚCI W UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Analizując w poprzednich rozdziałach właściwości układów, w istocie analizie poddawano przyporządkowane tym układom odpowiednie modele matematyczne. Układy, którym zostały przyporządkowane modele liniowe, sformułowane np. w postaci liniowych równań algebraicznych lub różniczkowych, nazywane są układami liniowymi. Charakterystyczną właściwością modelu liniowego jest spełnianie zasady superpozycji. Układy, którym zostały przyporządkowane modele nieliniowe, tj. modele niespełniające zasady superpozycji, nazywane są układami nieliniowymi. Każdy model, zarówno liniowy jak i nieliniowy, jest tylko przybliżonym opisem właściwości rzeczywistego układu i wyraża te właściwości w ograniczonym zakresie zmian wielkości wejściowych i wyjściowych układu. W zależności od wymaganej dokładności, z jaką model powinien odpowiadać zachowaniu się układu rzeczywistego w analizowanym zakresie zmian wielkości wejściowych i wyjściowych, temu samemu układowi rzeczywistemu mogą być przyporządkowane zarówno modele liniowe jak i nieliniowe. Na przykład, dla zbiornika otwartego z wypływem swobodnym (przykład 7.1) utworzono model nieliniowy w postaci równania dynamiki (7.6), a także metodą linearyzacji równania nieliniowego – model liniowy w postaci równania (7.11). Na podstawie nieliniowego równania dynamiki (7.6) wyznaczono charakterystykę statyczną układu (równanie (7.7)), która w tym przypadku ma postać funkcji gładkiej i ciągłej; ciągłe są także pochodne tej charakterystyki statycznej. Nieliniowość o charakterystyce statycznej w postaci funkcji gładkiej i ciągłej wraz z pochodnymi nazywa się **nieliniowością analityczną** lub **nieliniowością gładką**.

Modele z nieliniowością analityczną można linearyzować. Uzyskany w wyniku linearyzacji model liniowy służy do analizy właściwości układu tylko w wąskim obszarze zmian wielkości wejściowych i wyjściowych – w otoczeniu wybranego punktu charakterystyki statycznej (punktu pracy układu), względem którego przeprowadzona została linearyzacja. Celowość posługiwania się modelami liniowymi wynika z faktu, że umożliwiają one badanie zachowania się układu (np. badanie stabilności) w wybranym obszarze pracy stosunkowo prostymi metodami,

wynikającymi z teorii układów liniowych. Ogólnie, model liniowy jest mniej dokładnym opisem działania układu rzeczywistego niż model nieliniowy i zwykle dotyczy zawężonego obszaru pracy układu.

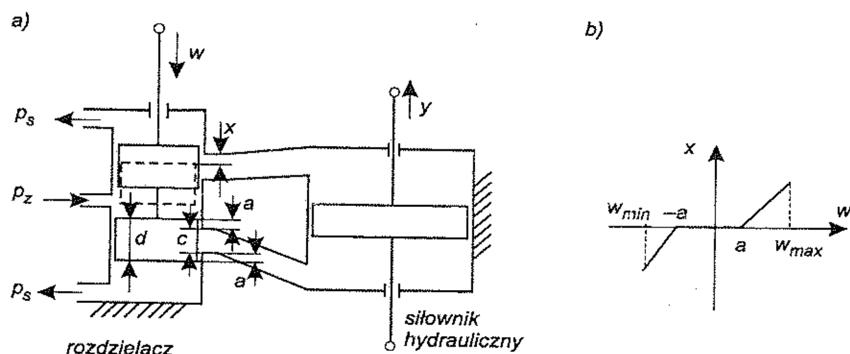
Uwzględnienie w modelu układu nieliniowości nieanalitycznych uniemożliwia jego linearyzację i badanie jego właściwości metodami stosowanymi w przypadku modeli liniowych.

Różnorodność nieliniowości nieanalitycznych stwarza trudności związane zarówno z tworzeniem matematycznego opisu takich układów, jak i – wobec braku jednolitej metodyki rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych – z analizą właściwości utworzonych modeli matematycznych.

W przypadku układu (modelu) liniowego istnieje jednoznaczny związek między sygnałem wyjściowym i wejściowym, wyrażony np. przez równanie dynamiki lub transmitancję operatorową. W układach nieliniowych relacja między sygnałem wyjściowym i wejściowym zależy od parametrów sygnału wejściowego lub od punktu pracy układu.

Układem nieliniowym jest układ zawierający chociaż jeden element nieliniowy. Nieliniowe są elementy o działaniu przekaźnikowym, z ogranicznikami sygnałów, elementy, w działaniu których istotną rolę odgrywają takie zjawiska, jak tarcie suche, strefa martwa, histereza, nasycenie.

Wśród elementów nieliniowych z nieliniowością nieanalityczną, można wyróżnić elementy w przybliżeniu bezinercyjne, których właściwości definiuje ich charakterystyka statyczna, i elementy nieliniowe dynamiczne, których model przedstawia się jako szeregowe połączenie bezinercyjnego elementu nieliniowego i liniowej części dynamicznej. Charakterystykę bezinercyjnej części nieliniowej można wyznaczać analitycznie lub eksperymentalnie. Jako przykład rozpatrzone zostanie działanie serwomotoru hydraulicznego z rozdzielaczem z tzw. przekryciem, co oznacza, że długość tłoczków rozdzielacza jest większa niż wysokość otworów korpusu (wymiar $d > c$, rys. 15.1).




Rys. 15.1. Nieliniowy serwomotor hydrauliczny: a) schemat funkcjonalny, b) charakterystyka statyczna części nieliniowej



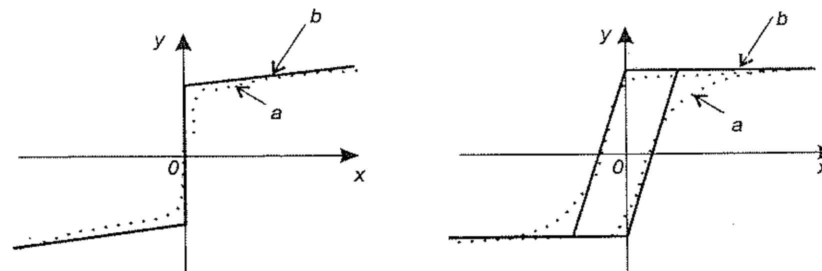
W przykładzie 5.8 analizowano zachowanie się serwomotoru hydraulicznego z rozdzielaczem bez przekrycia (długość tłoczków rozdzielacza jest równa wysokości otworów korpusu rozdzielacza, rys. 5.5a), którego sygnałem wejściowym jest przesunięcie $x$ tłoczków rozdzielacza względem pozycji początkowej jak na rysunku, a sygnałem wyjściowym – przemieszczenie tłoka siłownika. Stwierdzono, że serwomotor ten w ograniczonym zakresie zmian sygnału wejściowego i wyjściowego można traktować jako element całkujący, przy czym zauważono, że właściwym sygnałem wejściowym elementu jest szerokość $x$ tworzących się w wyniku przemieszczania tłoczków szczelin przepływowych, która w przypadku rozdzielacza bez przekrycia jest równa przemieszczeniu tłoczków względem pozycji początkowej.

W rozdzielaczu z przekryciem, jak na rys. 15.1a, szerokość $x$ szczelin przepływowych nie jest równa przemieszczeniu $w$ tłoczków rozdzielacza względem pozycji początkowej. Zależność $x(w)$ wyraża nieliniowa charakterystyka przedstawiona na rys. 15.1b. Zatem serwomotor ten, w określonym obszarze zmian sygnału wejściowego i wyjściowego, można traktować jako szeregowe połączenie nieliniowego bezinercyjnego elementu o charakterystyce jak na rys. 15.1b, opisanej równaniami

$$\begin{aligned} &\text{dla} \quad w_{\min} \le w \le -a \quad && x = w + a \\ &\text{dla} \quad -a < w < a \quad && x = 0 \\ &\text{dla} \quad a \le w \le w_{\max} \quad && x = w - a \end{aligned} \tag{15.1}$$

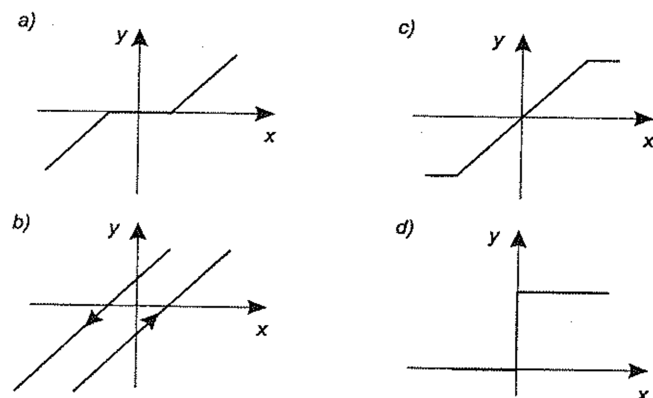
i elementu całkującego o transmitancji $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{Ts}$.

Charakterystyki statyczne elementów lub układów nieliniowych wyznaczane eksperymentalnie zwykle są charakterystykami krzywoliniowymi (rys. 15.2). Do celów analizy takie rzeczywiste charakterystyki aproksymuje się typowymi charakterystykami złożonymi z odcinków prostych.

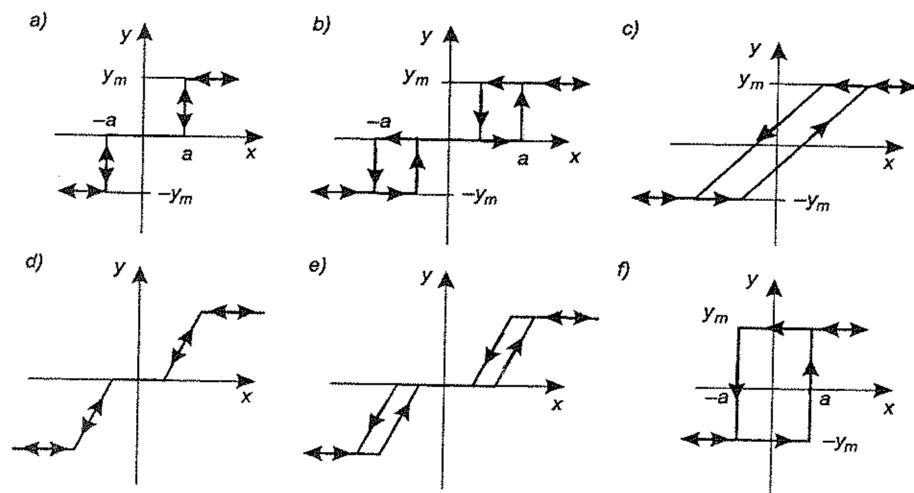



Rys. 15.2. Wyznaczone eksperymentalnie charakterystyki statyczne elementów nieliniowych – $a$ oraz ich aproksymacje – $b$

Charakterystyki statyczne modeli elementów bezinercyjnych z elementarnymi formami nieliniowości przedstawiono na rys. 15.3. Uwzględniając jednoczesne występowanie kilku rodzajów nieliniowości, można tworzyć szereg typowych charakterystyk (rys. 15.4), wykorzystywanych do aproksymacji charakterystyk rzeczywistych.




Rys. 15.3. Charakterystyki statyczne modeli elementów bezinercyjnych z elementarnymi formami nieliniowości: a) element ze strefą nieczułości, b) element z nasyceniem, c) element z histerezą, d) element o działaniu przekaźnikowym (przekaźnik dwupołożeniowy)

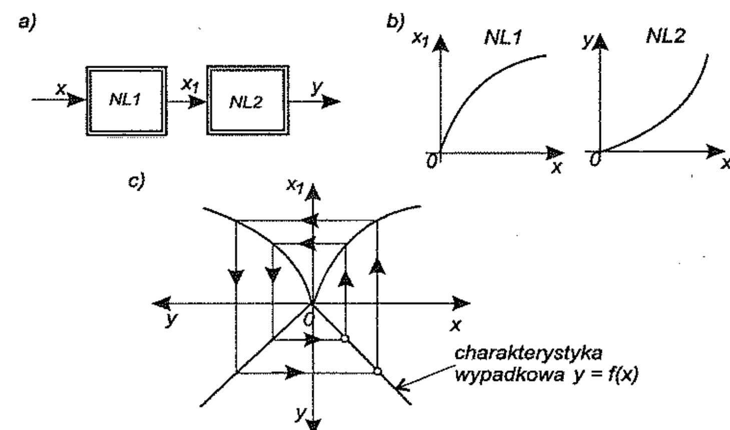



Rys. 15.4. Charakterystyki statyczne modeli elementów bezinercyjnych z kilkoma rodzajami nieliniowości elementarnych: a) element o działaniu przekaźnikowym ze strefą nieczułości (przekaźnik trójpołożeniowy), b) przekaźnik trójpołożeniowy z histerezą, c) element z nasyceniem i histerezą, d) element ze strefą nieczułości i nasyceniem, e) element ze strefą nieczułości, nasyceniem i histerezą, f) przekaźnik dwupołożeniowy z histerezą

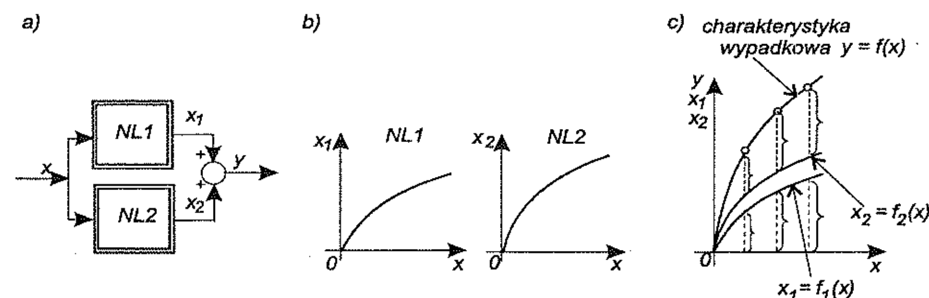


Charakterystyki statyczne elementów nieliniowych bez histerezy nazywane są **charakterystykami jednoznacznymi**, z histerezą – **charakterystykami niejednoznacznymi**. Praktycznie wszystkie elementy rzeczywiste mają histerezę. Dlatego charakterystyki jednoznaczne są mniej dokładnym przedstawieniem rzeczywistych właściwości elementu nieliniowego.

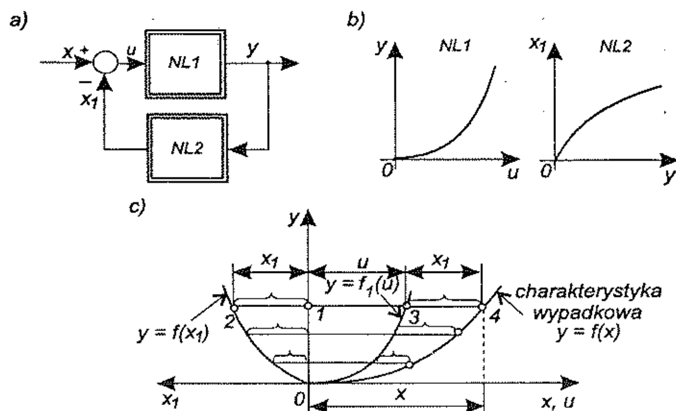
W układach mogą występować połączenia kilku elementów nieliniowych. Takie układy można traktować jako jeden element, wyznaczając jego charakterystykę zastępczą. Metodykę wyznaczania charakterystyk statycznych połączeń elementów bezinercyjnych przedstawiają rys. 15.5–15.7. Charakterystyki statyczne elementów składowych powinny być określone we współrzędnych absolutnych, a nie przyrostowych.




Rys. 15.5. Wyznaczanie charakterystyki statycznej szeregowego połączenia dwóch elementów nieliniowych: a) schemat blokowy układu, b) charakterystyki statyczne elementów składowych, c) ilustracja sposobu wyznaczania charakterystyki wypadkowej




Rys. 15.6. Wyznaczanie charakterystyki statycznej połączenia równoległego elementów nieliniowych




Rys. 15.7. Wyznaczanie charakterystyki statycznej układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym: a) schemat blokowy, b) charakterystyki statyczne elementów składowych, c) konstrukcja charakterystyki wypadkowej

Charakterystykę statyczną szeregowego połączenia elementów liniowych lub nieliniowych wyznacza się tzw. metodą czworoboku (rys. 15.5).

Charakterystykę statyczną połączenia równoległego wyznacza się, sumując, z uwzględnieniem znaków, charakterystyki statyczne elementów składowych (rys. 15.6), co wynika z istoty połączenia równoległego.

Sposób wyznaczania charakterystyki statycznej układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym przedstawiono na rys. 15.7. Polega on na założeniu wartości wielkości wyjściowej $y$ układu i odtworzeniu wielkości wejściowej $x$, zgodnie z zależnością $x = u + x_1$.

W przypadku układu z dodatnim sprzężeniem zwrotnym, sposób konstruowania charakterystyki wypadkowej polega na wykorzystaniu zależności $x = u - x_1$.

## 15.2. STABILNOŚĆ UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Pojęcie stabilności związane jest z oceną zachowania się układu dynamicznego wytrąconego ze stanu równowagi, po zaniku oddziaływania (wymuszenia), które ten układ ze stanu równowagi wytrąciło.

Układy liniowe wykazujące zdolność do powracania do stanu równowagi po takim wytrąceniu ze stanu równowagi nazwano układami stabilnymi, niepowracające do stanu równowagi – układami niestabilnymi. Jeżeli po wytrąceniu ze stanu równowagi układ liniowy generuje drgania niegasnące – znajduje się on na granicy stabilności.

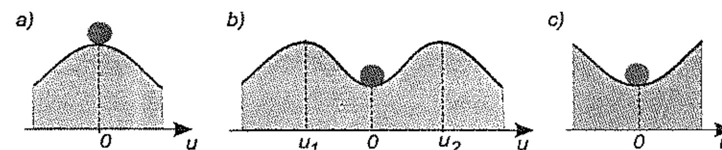


Z prawa superpozycji, któremu podlegają układy liniowe, wynika, że charakter przebiegu wielkości wyjściowej układu liniowego (ruchu swobodnego) nie zmienia się, niezależnie od tego, jak bardzo układ został odchylony od stanu równowagi. Zatem, ocena układu liniowego ze względu na stabilność, a właściwie – liniowego modelu matematycznego tego układu, jest jednoznaczna i nie zależy od punktu pracy (punktu równowagi) układu.

Układy nieliniowe nie podlegają prawu superpozycji. Zatem, na podstawie zachowania się układu po niewielkim wytrąceniu go ze stanu równowagi nie można sądzić o zachowaniu się układu w przypadku większych wychyleń od stanu równowagi, ani odwrotnie.

Właściwości układu nieliniowego mogą zmieniać się także wraz ze zmianą punktu równowagi (punktu pracy). Dlatego w przypadku układów nieliniowych ocenia się stabilność względem określonego punktu równowagi – jest to ocena stabilności punktu równowagi (a nie stabilności układu).

Układ nieliniowy w przypadku niewielkich odchyleń od danego stanu równowagi może zachowywać się jak liniowy układ stabilny, w przypadku odchyleń większych – jak niestabilny; o takim punkcie równowagi mówi się, że jest **stabilny lokalnie**. Względem danego punktu równowagi układ nieliniowy może zachowywać się jak liniowy układ stabilny, niezależnie od wartości wychylenia od stanu równowagi; taki punkt równowagi nazywa się **globalnie stabilnym**. Punkt równowagi układu nieliniowego może być także **globalnie niestabilny**. Poglądową ilustracją stabilności globalnej i lokalnej oraz globalnej niestabilności punktu równowagi układu jest rys. 15.8. Możliwą formą zachowania się układu nieliniowego wytrąconego ze stanu równowagi jest także przejście w fazę niegasnących oscylacji względem punktu równowagi; taki stan pracy układu nieliniowego nazywany jest **cyklem granicznym**.




Rys. 15.8. Ilustracja stabilności punktu równowagi: a) niestabilności globalnej, b) stabilności lokalnej c) globalnej stabilności

Na ocenę stabilności układu nie ma wpływu sposób wyprowadzania układu ze stanu równowagi, tylko zachowanie układu wytrąconego ze stanu równowagi po zaniku oddziaływania (wymuszenia), które ten układ ze stanu równowagi wytrąciło – tzw. ruch swobodny układu. Stabilność układu dynamicznego określa się więc na podstawie zachowania się układu bez oddziaływań zewnętrznych (ruch

swobodny), przy warunkach początkowych układu różnych od stanu równowagi. Zatem bezpośrednim sposobem oceny stabilności danego punktu równowagi matematycznego modelu układu nieliniowego jest wyznaczanie swobodnych przebiegów wielkości wyjściowej w przewidywanym zakresie warunków początkowych. Przebiegi takie mogą być wyznaczane metodami analitycznymi, metodą symulacji cyfrowej (np. za pomocą pakietu MATLAB/SIMULINK) lub metodą modelowania analogowego. Możliwości wykorzystania metod analitycznych są ograniczone ze względu na trudności związane z rozwiązywaniem nieliniowych równań różniczkowych. Metodą analityczną użyteczną w przypadku układów opisanych równaniami różniczkowymi pierwszego lub drugiego rzędu jest **metoda płaszczyzny fazowej** (rozdz. 15.3). Do metod pośrednich badania stabilności, tj. niewymagających wyznaczania przebiegów wielkości wyjściowej, należą tzw. **metoda funkcji opisującej** (rozdz. 15.4) oraz metody Lapunowa [14].

## 15.3. METODA PŁASZCZYZNY FAZOWEJ

Płaszczyznę fazową tworzy układ współrzędnych, w którym na osi rzędnych odkłada się wartości funkcji czasu, na osi odciętych – wartości pochodnej tej funkcji względem czasu. Płaszczyzna fazowa służy do graficznego przedstawiania rozwiązań równań różniczkowych pierwszego rzędu typu

$$F(y,\dot{y})=0 \tag{15.2}$$

oraz rozwiązań równań różniczkowych drugiego rzędu

$$F(y,\dot{y},\ddot{y})=0 \tag{15.3}$$

dających się rozwikłać względem drugiej pochodnej, tj. przedstawić w postaci

$$\ddot{y}=\frac{d\dot{y}}{dt}=P(y,\dot{y}) \tag{15.4}$$

gdzie

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt} \tag{15.5}$$

Dzieląc stronami równania (15.4) i (15.5), eliminuje się czas $t$ i otrzymuje postać dogodną do przedstawienia na płaszczyźnie fazowej

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=\frac{P(y,\dot{y})}{\dot{y}} \tag{15.6}$$



Rozwiązania równań (15.2) i (15.3) opisują ruch swobodny układów dynamicznych przy założonych warunkach początkowych. Graficzna forma takiego rozwiązania przedstawiona na płaszczyźnie fazowej nazywa się **trajektorią fazową** lub **krzywą całkową**. Zbiór trajektorii fazowych wyznaczonych dla szeregu różnych warunków początkowych tworzy **portret fazowy**. Portret fazowy może być wykorzystany do przedstawienia zachowania się zarówno układów liniowych, jak i nieliniowych.

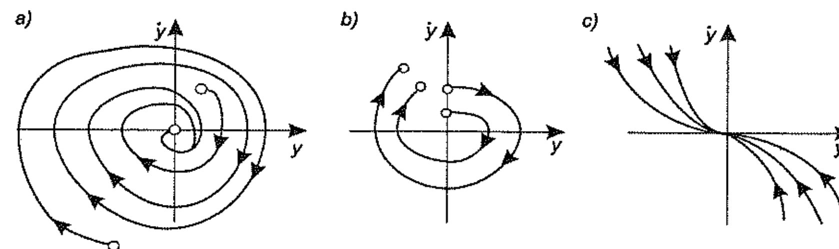
Z twierdzenia Cauchy'ego o jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego przy różnych warunkach początkowych wynika, że przez jeden punkt płaszczyzny fazowej $(y, \dot{y})$ może przechodzić tylko jedna krzywa całkowa $\dot{y}=f(y)$. Wyjątek stanowią tzw. **punkty osobliwe**, w których jednocześnie

$$P(y,\dot{y})=0 \quad \text{i} \quad \dot{y}=0 \tag{15.7}$$

czyli

$$\frac{d\dot{y}}{dt}=0 \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dt}=0 \tag{15.8}$$

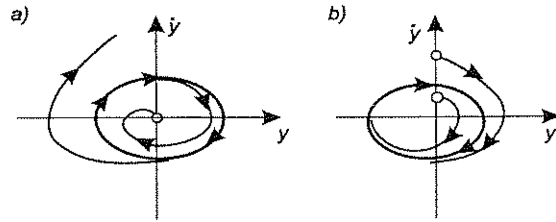
Zatem, w takich punktach stosunek $d\dot{y}/dy=0/0$, z czego wynika, że tangens nachylenia stycznej do krzywej całkowej w tych punktach jest nieoznaczony. Przez punkty osobliwe może przechodzić wiele krzywych całkowych albo żadna. Punkty osobliwe reprezentują punkty równowagi. Przykłady kilku różnych punktów osobliwych przedstawiono na rys. 15.9.




Rys. 15.9. Przykłady punktów osobliwych $y=0$, $\dot{y}=0$: a) ognisko stabilne, b) ognisko niestabilne, c) węzeł stabilny

Jak wspomniano, jedną z możliwych form zachowania się układu nieliniowego wytrąconego ze stanu równowagi jest także przejście w fazę niegasnących oscylacji względem punktu równowagi; taki stan pracy układu nieliniowego nazywany jest **cyklem granicznym**. W przypadku wystąpienia cyklu granicznego krzywa całkowa nie dochodzi do punktu równowagi, lecz przechodzi w krzywą zamkniętą otaczającą ten punkt. Jeżeli trajektorie fazowe obustronnie dochodzą do krzywej zamkniętej, to taki cykl graniczny nazywa się stabilnym, jeżeli obustronnie odchodzą – niestabilnym (rys. 15.10). Możliwe są także przypadki, kie-

dy z jednej strony krzywej zamkniętej trajektorie do niej dochodzą, a z drugiej odchodzą.




Rys. 15.10. Przykłady cykli granicznych: a) cykl graniczny niestabilny, b) cykl graniczny stabilny

Wzrost czasu $t$ związany jest z przesuwaniem się wzdłuż trajektorii fazowej zawsze w kierunku zgodnym z kierunkiem wskazówek zegara (rys. 15.11), gdyż na podstawie równania (15.5) mamy

$$dt = \frac{dy}{\dot{y}} \tag{15.9}$$

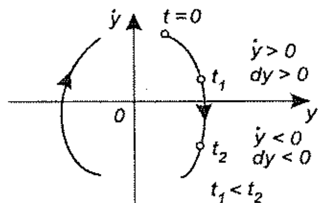
Skoro zawsze $dt > 0$, to w konsekwencji

$$dy > 0, \quad \text{gdy} \quad \dot{y} > 0 \tag{15.10}$$

lub

$$dy < 0, \quad \text{gdy} \quad \dot{y} < 0 \tag{15.11}$$

Trajektorie fazowe przecinają oś rzędnych zawsze pod kątem prostym, gdyż wtedy $\dot{y} = dy/dt = 0$.




Rys. 15.11. Wyznaczanie kierunku wzrostu czasu na trajektorii fazowej

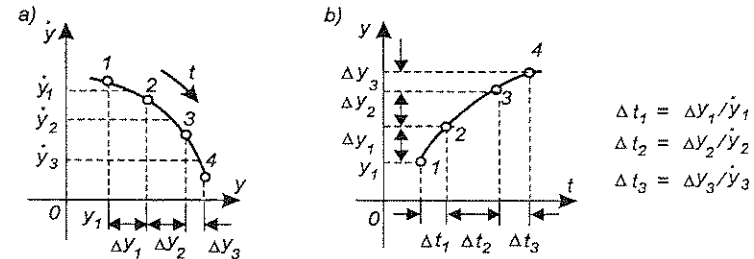
Dla analizy zachowania się układu dynamicznego wytrąconego ze stanu równowagi wystarczająca jest znajomość przebiegu trajektorii fazowej, reprezentującej zależność $\dot{y}(y)$, w której czas $t$ nie występuje w postaci jawnej. Na podstawie równania trajektorii fazowej możliwe jest wyznaczenie czasowego przebiegu funkcji $y$.



Wyznaczanie charakterystyki czasowej na podstawie trajektorii fazowej może być przeprowadzane w różny sposób. Jeżeli dana jest postać analityczna trajektorii fazowej, to na podstawie zależności (15.5) można wyznaczyć czas, jaki upływa na przejście od chwili $t_1$ do chwili $t_2$ (rys. 15.11)

$$t_2 - t_1 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\dot{y}(y)} \tag{15.12}$$

Gdy znana jest tylko graficzna postać trajektorii, posługujemy się metodą przyrostową, opartą na zależności wyrażającej przyrost czasu $\Delta t = \Delta y/\dot{y}$. Należy zatem zakres zmian wartości funkcji $y$ podzielić na przedziały o szerokości $\Delta y$ i dla każdego przedziału znaleźć wartość średnią prędkości $\dot{y}_{śr}$; przyrost czasu odpowiadający danemu przedziałowi wynosi $\Delta t = \Delta y/\dot{y}_{śr}$. Sposób postępowania przedstawiono na rys. 15.12.




Rys. 15.12. Metoda wyznaczania przebiegu czasowego na podstawie trajektorii fazowej: a) trajektoria fazowa $\dot{y}(y)$, b) przebieg czasowy $y(t)$

Trajektorie fazowe, podobnie jak przebiegi czasowe, mogą być wyznaczane metodami analitycznymi, metodą symulacji cyfrowej lub metodą modelowania analogowego.

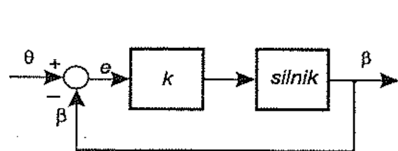
Analiza właściwości układu metodą płaszczyzny fazowej jest mało uzasadniona, jeżeli można w prosty analityczny sposób uzyskać rozwiązanie danego równania różniczkowego w dziedzinie czasu. Celowość jej stosowania jest natomiast zasadna szczególnie w przypadkach syntezy układów nieliniowych, a także w przypadku gdy istnieje podejrzenie wystąpienia w układzie cyklu granicznego.

W niektórych przypadkach, kiedy bezpośrednie analityczne wyznaczenie trajektorii fazowych jest trudne, pomocna może być metoda graficzno-analityczna – tzw. metoda izoklin.

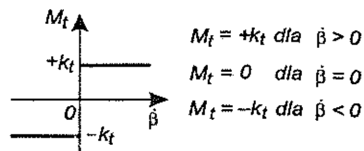
Przedstawiona zostanie procedura wyznaczania trajektorii fazowej przykładowego układu nieliniowego metodą bezpośrednią oraz metodą izoklin.

**Przykład 15.1**

Wielkością regulowaną serwomechanizmu elektrycznego (rys. 15.13) jest położenie kątowe $\beta$ wału silnika, obciążonego momentem bezwładności $I$, wartością zadaną jest kąt $\theta$. Do sterowania zastosowano regulator proporcjonalny (wzmacniacz) o wzmocnieniu $k$. Wyznaczyć trajektorię fazową układu po wprowadzeniu skokowej zmiany wartości zadanej o 10° oraz odpowiedź na to wymuszenie, zakładając, że w silniku występuje tarcie suche, którego moment ma wartość bezwzględną $k_t$ (rys. 15.14); przyjąć wartości: $k_t/I = 2$ oraz $k/I = 1$.




Rys. 15.13. Schemat blokowy serwomechanizmu elektrycznego




Rys. 15.14. Charakterystyka tarcia suchego

*Rozwiązanie*

Równanie równowagi momentów na wale silnika ma postać

$$ke = I\ddot\beta + k_t \operatorname{sign}\dot\beta \tag{15.13}$$

gdzie: $ke$ – moment napędowy silnika, $I\ddot\beta$ – moment bezwładności, $k_t \operatorname{sign}\dot\beta$ – moment tarcia suchego.

Po wprowadzeniu wymuszenia skokowego wartość zadana $\theta$ nie zmienia się; zatem z równania węzła sumacyjnego

$$e = \theta - \beta \tag{15.14}$$

wynika, że

$$\dot e = -\dot\beta, \quad \ddot e = -\ddot\beta \tag{15.15}$$

Wykorzystując zależności (15.15), z równania (15.13) można wyeliminować zmienną $\beta$:

$$ke = -I\ddot e - k_t \operatorname{sign}\dot e \tag{15.16}$$

Korzystając z tożsamości

$$\ddot e = \frac{d\dot e}{dt} = \frac{de}{dt}\frac{d\dot e}{de} = \dot e\frac{d\dot e}{de} \tag{15.17}$$

równanie (15.16) można wyrazić w postaci

$$ke = -I\dot e\frac{d\dot e}{de} - k_t \operatorname{sign}\dot e \tag{15.18}$$



Po rozwikłaniu otrzymuje się postać dogodną do wyznaczenia trajektorii fazowej dla zadanych warunków początkowych

$$\frac{d\dot e}{de} = -\frac{\frac{k_t}{I}\operatorname{sign}\dot e + \frac{k}{I}e}{\dot e} \tag{15.19}$$

Po wprowadzeniu do równania (15.19) wartości liczbowych $k_t/I = 2$ i $k/I = 1$ otrzymuje się

$$\frac{d\dot e}{de} = -\frac{e + 2\operatorname{sign}\dot e}{\dot e} \tag{15.20}$$

i po przekształceniu

$$\dot e d\dot e = -(e + 2\operatorname{sign}\dot e)\,de \tag{15.21}$$

Trajektorię fazową opisaną równaniem (15.21) wykreślimy, wykorzystując metodę bezpośrednią oraz metodę izoklin.

**METODA BEZPOŚREDNIA**

Początkiem trajektorii jest punkt określony przez warunki początkowe: $e(0) = 10^0$, $\dot e(0) = 0$. Ponieważ trajektoria przebiega zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara, jej początkowy fragment znajduje się na dolnej półpłaszczyźnie, gdzie $\dot e < 0$, a więc $\operatorname{sign}\dot e = -1$. Zatem dla początkowego fragmentu trajektorii na dolnej półpłaszczyźnie równanie (15.21) przybiera postać

$$\dot e d\dot e = -e de + 2de \tag{15.22}$$

Po obustronnym scałkowaniu zależności (15.22) otrzymuje się równanie trajektorii fazowej

$$\frac{\dot e^2}{2} = -\frac{e^2}{2} + 2e + C_1 \tag{15.23}$$

i po przekształceniu

$$\dot e^2 + (e-2)^2 = 4 + 2C_1 \tag{15.24}$$

gdzie $C_1$ – stała całkowania. Z równania (15.24) i warunków początkowych wynika $C_1 = 30$. Ostatecznie równanie trajektorii fazowej w półpłaszczyźnie $\dot e < 0$ ma postać

$$\dot e^2 + (e-2)^2 = 8^2 \tag{15.25}$$

Jest to równanie półokręgu o promieniu 8 (linia a na rys. 15.16) i środku w punkcie $C$. Zatem trajektoria dochodzi do osi rzędnych w punkcie $E$. Punkt ten jest początkiem trajektorii przebiegającej w górnej półpłaszczyźnie. Dla półpłaszczyzny $\dot e > 0$, przyjmując $\operatorname{sign}\dot e = 1$, z równania (15.21) otrzymuje się

$$\dot e d\dot e = -e de - 2de \tag{15.26}$$

Po poddaniu równania (15.26) operacji całkowania

$$\frac{\dot{e}^2}{2} = -\frac{e^2}{2} - 2e + C_2$$

$$\dot{e}^2 + (e+2)^2 = 4 + 2C_2 \qquad (15.27)$$

Dla warunków początkowych $\dot{e} = 0$ i $e = -6$ otrzymuje się $C_2 = 6$. Zatem równanie dalszego ciągu trajektorii w półpłaszczyźnie $\dot{e} > 0$ ma postać

$$\dot{e}^2 + (e+2)^2 = 4^2 \qquad (15.28)$$

Jest to równanie półokręgu o promieniu 4 i środku w punkcie $B$. Zatem trajektoria ponownie osiąga oś rzędnych w punkcie $C$. Punkt ten jest końcem trajektorii, ponieważ równanie (15.24) dla półpłaszczyzny $\dot{e} < 0$, przy warunkach początkowych $e = 2$ i $\dot{e} = 0$, spełnione jest tylko w tym punkcie. Układ osiągnął więc stan ustalony z odchyłką regulacji $e = 2°$; wał silnika zamiast obrócić się o kąt 10°, wskutek istnienia tarcia suchego obróci się tylko o kąt $\beta = 8°$.

Ze względu na obecność tarcia suchego, w zależności od warunków początkowych i wartości wymuszeń, odchyłki statyczne układu mogą osiągać wartości w zakresie $-2° < e_{st} < 2°$. W przypadkach szczególnych, np. przy warunkach początkowych odpowiadających punktowi $A$ (rys. 15.16), odchyłka statyczna będzie zerowa.

**METODA IZOKLIN**

Metoda ta polega na pokryciu płaszczyzny fazowej siatką krzywych (izoklin) będących miejscem geometrycznym punktów, w których styczna do trajektorii fazowej ma określone stałe nachylenie względem osi rzędnych. W wielu przypadkach, pomimo że analitycznie nie udaje się wyznaczyć równania trajektorii fazowej, to jednak jest możliwe znalezienie równania rodziny izoklin, przy czym każdej izoklinie z tej rodziny będzie odpowiadało inne nachylenie trajektorii fazowej. Podstawą metody jest równanie (15.6), które wyraża tangens kąta nachylenia stycznej do trajektorii w każdym jej punkcie. Równanie to dla zmiennej $e$ ma postać

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{P(e,\dot{e})}{\dot{e}} = \operatorname{tg}\alpha = C \qquad (15.29)$$

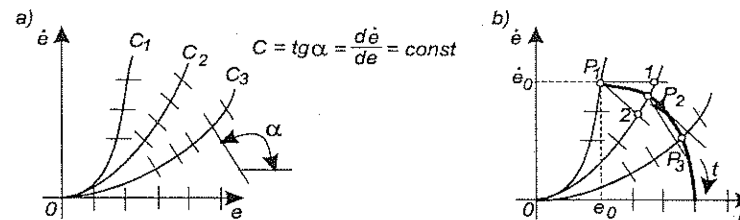
Zakładając wartość kąta $\alpha$, a więc i wartość stałej $C$, uzyskuje się równanie krzywej (izokliny)

$$\dot{e} = f(e, C) \qquad (15.30)$$

wzdłuż której styczne do trajektorii mają jednakowe nachylenie względem osi poziomej.



Wyznaczając funkcje (15.30) dla szeregu wartości kąta $\alpha$, otrzymuje się rodzinę izoklin odpowiednio gęsto pokrywających płaszczyznę fazową. Po wykreśleniu izoklin, nanosimy odpowiednio na nie odcinki (znaczniki) nachylone pod kątem $\alpha = \operatorname{arctg} C$ (rys. 15.15a). Sposób konstruowania trajektorii fazowej ilustruje rys. 15.15b. Mając pokrytą izoklinami płaszczyznę fazową, rozpoczynamy konstruowanie trajektorii fazowej, wychodząc z początkowego punktu $P_1$, określonego przez warunki początkowe $(e_0, \dot{e}_0)$ danego równania różniczkowego. Z punktu $P_1$ rysujemy dwie proste o kącie nachylenia określonym przez znaczniki na danej izoklinie i sąsiedniej. Proste te przecinają izoklinę sąsiednią w dwóch punktach 1 i 2. Nowy punkt trajektorii $P_2$ leży w środku krzywej między tymi punktami. Analogicznie postępuje się, tworząc kolejne punkty trajektorii fazowej.




Rys. 15.15. Ilustracja metody izoklin: a) izokliny ze znacznikami, b) sposób konstruowania trajektorii fazowej przy warunkach początkowych $(e_0, \dot{e}_0)$

W rozważanym przykładzie dla półpłaszczyzny $\dot{e} > 0$ rodzinę izoklin opisuje, na podstawie zależności (5.26), równanie

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{e+2}{\dot{e}} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (15.31)$$

a dla półpłaszczyzny $\dot{e} < 0$, na podstawie zależności (5.22), równanie

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{-e+2}{\dot{e}} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (15.32)$$

Równania poszczególnych izoklin wyznaczamy dla szeregu kątów w zakresie $0° \le \alpha < 180°$.

Wyznaczmy na podstawie zależności (15.31) równania izoklin dla półpłaszczyzny $\dot{e} > 0$, dla kątów nachylenia $\alpha = 0°$ i $\alpha = 45°$.

Dla $\alpha = 0°$

$$-\frac{e+2}{\dot{e}} = \operatorname{tg} 0° = 0$$

skąd wynika równanie izokliny $e = -2$.

Jest to równanie prostej równoległej do osi $\dot{e}$ i przechodzącej przez punkt o współrzędnych $e=-2$, $\dot{e}=0$ (punkt $B$ na rys. 15.16). Na prostej tej kreślimy krótkie odcinki o nachyleniu 0° względem osi rzędnych, w dowolnych odstępach.

Dla $\alpha=45°$

$$\frac{e+2}{\dot{e}}=\mathrm{tg}\,45°=1$$

skąd wynika równanie izokliny $\dot{e}=-e-2$.

Jest to równanie prostej również przechodzącej przez punkt $B$, nachylonej pod kątem 135° względem dodatniego kierunku osi $e$. Na prostej tej kreślimy krótkie odcinki o nachyleniu 45° względem osi rzędnych. Są one prostopadłe do izokliny.

Dalsze izokliny półpłaszczyzny $\dot{e}>0$ są prostymi wychodzącymi promieniście z punktu $B$.

Wyznaczmy na podstawie zależności (15.32) równania izoklin dla półpłaszczyzny $\dot{e}<0$, dla kątów nachylenia $\alpha=0°$ i $\alpha=45°$.

Dla $\alpha=0°$

$$\frac{-e+2}{\dot{e}}=\mathrm{tg}\,0°=0$$

skąd wynika równanie izokliny $e=2$.

Dla $\alpha=45°$

$$\frac{-e+2}{\dot{e}}=\mathrm{tg}\,45°=1$$

skąd wynika równanie izokliny $\dot{e}=-e+2$.

Obie te izokliny i wszystkie inne dla półpłaszczyzny $\dot{e}<0$ są prostymi wychodzącymi promieniście z punktu o współrzędnych $e=2$, $\dot{e}=0$ (punkt $C$ na rys. 15.16).

Mając izokliny, kreślimy trajektorię fazową wychodzącą z punktu początkowego o współrzędnych $e=10$, $\dot{e}=0$ (punkt $D$ na rys. 15.16). Kreślimy ją tak, aby trajektoria fazowa, przecinając izokliny, była styczna do znaczników danej izokliny.

Aby na podstawie trajektorii fazowej wyznaczyć odpowiedź na wymuszenie skokowe, należy wyskalować trajektorię w jednostkach czasu. Obliczmy tylko czas trwania procesu osiągania stanu ustalonego.

Na podstawie wzoru (15.12) i równania (15.25) wyznaczamy czas przejścia z punktu $D$ do $E$

$$t_{DE}=\int_{10}^{-6}\frac{de}{\dot{e}}=\int_{10}^{-6}\frac{de}{\sqrt{8^2-(e-2)^2}} \tag{15.33}$$



Po scałkowaniu

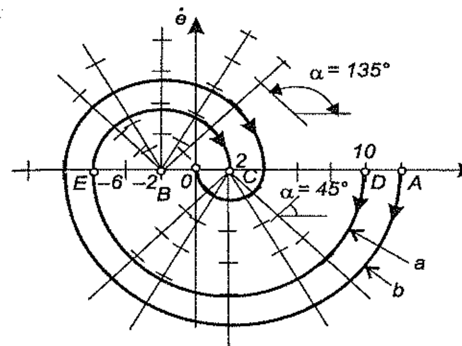
$$t_{DE}=\arcsin\left(\frac{e-2}{8}\right)\Bigg|_{10}^{-6}=\pi \tag{15.34}$$

Analogicznie, na podstawie wzoru (15.12) i równania (15.28), otrzymuje się czas przejścia z punktu $E$ do $C$

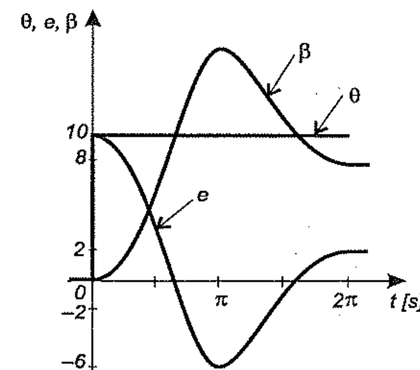
$$t_{EC}=\int_{-6}^{2}\frac{de}{\dot{e}}=\int_{-6}^{2}\frac{de}{\sqrt{4^2-(e+2)^2}} \tag{15.35}$$

$$t_{EC}=\arcsin\left(\frac{e+2}{4}\right)\Bigg|_{-6}^{2}=\pi \tag{15.36}$$

Przebieg odchyłki $e(t)$, odpowiadający wyznaczonej trajektorii fazowej, oraz odpowiedź $\beta(t)$ serwomechanizmu na wymuszenie skokowe $\theta=10°\cdot 1(t)$ przedstawiono na rys. 15.17.



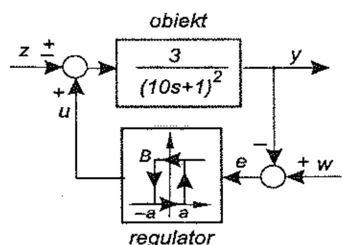
Rys. 15.16. Trajektorie fazowe do przykładu 15.1: a – trajektoria fazowa dla warunków początkowych określonych współrzędnymi punktu $D$, b – trajektoria fazowa dla warunków początkowych określonych współrzędnymi punktu $A$



Rys. 15.17. Odpowiedź $\beta(t)$ serwomechanizmu i przebieg odchyłki regulacji $e(t)$ wywołane skokowym wymuszeniem $\theta=10°\cdot 1(t)$

**Przykład 15.2**

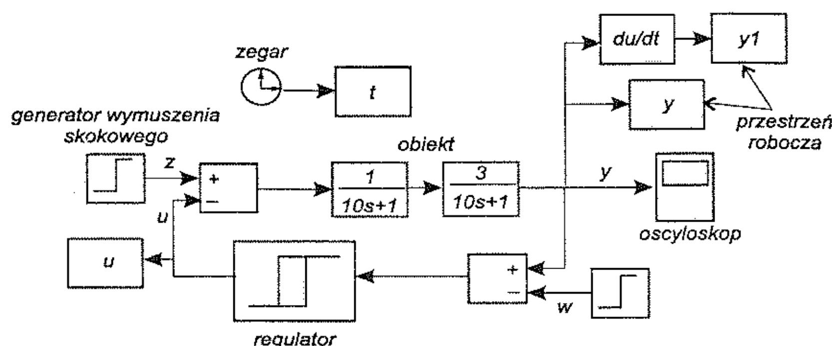
Dla układu regulacji dwustawnej o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 15.18 wyznaczyć metodą symulacji w środowisku MATLAB/SIMULINK trajektorię fazową układu po wprowadzeniu skokowej zmiany wartości zadanej $w=2\cdot 1(t)$ oraz odpowiedź układu na to wymuszenie, przyjmując wartości: $B=1$, $a=0{,}05$, $z=0$.




Rys. 15.18. Schemat blokowy do przykładu 15.2

*Rozwiązanie*

Za pomocą edytora pakietu MATLAB/SIMULINK utworzono schemat do badań symulacyjnych, przedstawiony na rys. 15.19.




Rys. 15.19. Schemat blokowy do badań symulacyjnych do przykładu 15.2

Zostały przyjęte następujące parametry symulacji:

metoda: Rungego-Kutty 5, Min. step size: 0.001,
Start time: 0, Max. step size: 0.001,
Stop time: 100, Tolerance: 1e-4.

Wykonując polecenie

```
plot(t,y,t,u);
grid
```

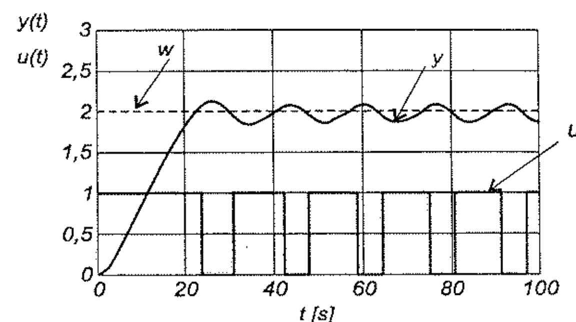
otrzymuje się wykres odpowiedzi skokowej $y(t)$ i sterowania $u(t)$ układu na zmianę wartości zadanej $w$, przedstawiony na rys. 15.20.

Natomiast po wykonaniu polecenia

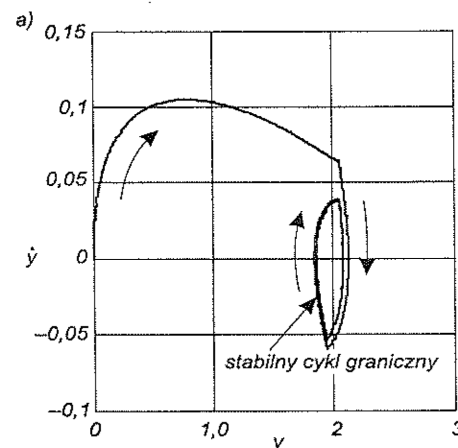
```
plot(y,y1);
grid
```

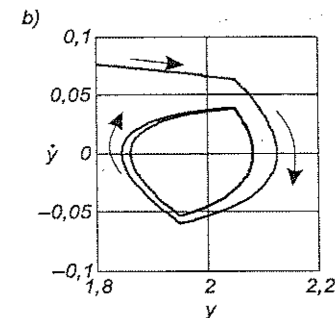
otrzymuje się trajektorię fazową układu (rys. 15.21).






Rys. 15.20. Przebiegi wielkości regulowanej $y(t)$ i sygnału wyjściowego $u(t)$ regulatora w układzie wg rys. 15.18



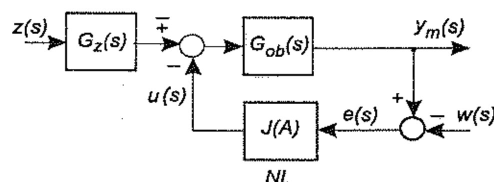




Rys. 15.21. a) Trajektoria fazowa do przykładu 15.2, b) powiększony fragment trajektorii z cyklem granicznym stabilnym

## 15.4. METODA FUNKCJI OPISUJĄCEJ

Metodę funkcji opisującej, zwaną również metodą linearyzacji harmonicznej, wykorzystuje się jako stosunkowo proste narzędzie do badania stabilności układów nieliniowych o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 15.22, w przypadku gdy element nieliniowy (najczęściej jest nim regulator) jest elementem beziner-

cyjnym o nieliniowej charakterystyce statycznej, symetrycznej względem początku układu współrzędnych, współpracującym z elementem liniowym o właściwościach członu inercyjnego wyższego rzędu, będącym najczęściej obiektem regulacji. Element liniowy o takich właściwościach jest filtrem dolnoprzepustowym.




Rys. 15.22. Schemat blokowy nieliniowego układu regulacji

Jeżeli na wejście bezinercyjnego elementu nieliniowego podane zostanie wymuszenie sinusoidalne $e(t) = A\sin\omega t$, to w stanie ustalonym na wyjściu tego elementu otrzymamy odpowiedź okresową (periodyczną) $u(t)$ o takiej samej pulsacji, ale nie sinusoidalną (w przypadku elementów ze strefą nieczułości, odpowiedź pojawia się, gdy amplituda sygnału wejściowego jest większa od strefy nieczułości). Odpowiedź $u(t) = \Phi(A\sin\omega t)$ elementu nieliniowego, jako elementu bezinercyjnego, nie zależy od pulsacji $\omega$ sygnału wejściowego, jak w przypadku elementów dynamicznych; zależeć może tylko od amplitudy $A$ sygnału wejściowego. Przebieg $u(t)$ można rozłożyć w szereg Fouriera jako sumę harmonicznych. Jeżeli liniowa część układu ma właściwości filtru dolnoprzepustowego, to można przyjąć, że sygnał okresowy, ale nie sinusoidalny $u(t)$, jest z wystarczającą dokładnością reprezentowany przez swoją pierwszą harmoniczną. Zatem

$$u(t) \cong \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(\omega t + \varphi) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t \tag{15.37}$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(A\sin\omega t)\sin\omega t \, d(\omega t) \tag{15.38}$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(A\sin\omega t)\cos\omega t \, d(\omega t) \tag{15.39}$$

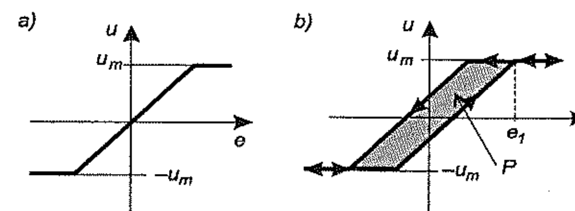
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{C_2}{C_1} \tag{15.40}$$



Ponieważ $\cos\omega t \, d(\omega t) = d(\sin\omega t)$, więc współczynnik $C_2$ można przedstawić jako

$$C_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} \Phi(A\sin\omega t)\, d(\sin\omega t) = \frac{1}{\pi A}\int_{e(0)}^{e(2\pi)} u(e)\, de \tag{15.41}$$

Całka $\int_{e(0)}^{e(2\pi)} u(e)\, de$ odpowiada polu powierzchni $P$ (rys. 15.23b) zamkniętej przez charakterystykę $u(e)$, podczas zmiany sygnału wejściowego $e$ o cały okres, przy amplitudzie wymuszenia $A \geq e_1$ (dla $A < e_1$ pole to jest odpowiednio mniejsze). Jeżeli charakterystyka statyczna elementu nieliniowego jest jednoznaczna (bez histerezy), to $P = 0$, a więc także $C_2 = 0$. Zatem, jeżeli element nieliniowy ma jednoznaczną charakterystykę, to pierwsza harmoniczna jego sygnału wyjściowego jest zgodna w fazie z sinusoidalnym sygnałem wejściowym.




Rys. 15.23. Przykładowe charakterystyki statyczne elementów nieliniowych: a) charakterystyka jednoznaczna, b) charakterystyka niejednoznaczna (z histerezą)

**Funkcja opisująca** bezinercyjnego elementu nieliniowego, oznaczana jako $J(A)$, jest odpowiednikiem transmitancji widmowej elementu liniowego; jest to w ogólnym przypadku funkcja zespolona, której moduł jest równy stosunkowi amplitudy pierwszej harmonicznej sygnału wyjściowego do amplitudy sinusoidalnego sygnału wejściowego, a argument jest przesunięciem fazowym pierwszej harmonicznej sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego. Ponieważ funkcja $J(A)$ opisuje właściwości elementu bezinercyjnego, więc ani moduł, ani argument funkcji opisującej nie zależą od pulsacji $\omega$ sygnału wejściowego; mogą zależeć tylko od amplitudy $A$ tego sygnału. Funkcję opisującą, podobnie jak transmitancję widmową, można przedstawić w postaci wykładniczej

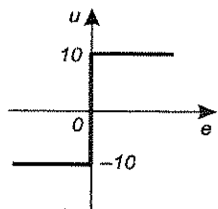
$$J(A) = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{A} e^{j\varphi(A)} \tag{15.42}$$

lub w postaci sumy części rzeczywistej i urojonej

$$J(A)=\frac{C_1}{A}+j\frac{C_2}{A} \tag{15.43}$$

Procedurę wyznaczania funkcji opisującej elementów nieliniowych przedstawiono na przykładach.

**Przykład 15.3**




Wyznaczyć funkcję opisującą przekaźnika dwupołożeniowego o charakterystyce jak na rys. 15.24.

Rys. 15.24. Charakterystyka do przykładu 15.3

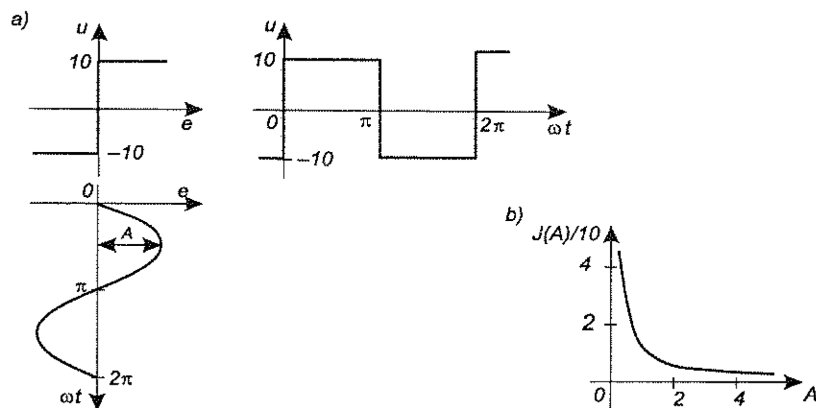
*Rozwiązanie*

Charakterystyka statyczna przekaźnika jest jednoznaczna, zatem $C_2=0$. Zgodnie ze wzorem (15.38) otrzymamy

$$J(A)=\frac{C_1}{A}=\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}\Phi(A\sin\omega t)\sin\omega t\, d(\omega t) \tag{15.44}$$

dla $e<0$ $\Phi(A\sin\omega t)=-10$,

dla $e>0$ $\Phi(A\sin\omega t)=10$.




Rys. 15.25. a) Wyznaczanie odpowiedzi przekaźnika dwupołożeniowego na sinusoidalny sygnał wejściowy, b) wykres funkcji opisującej przekaźnika



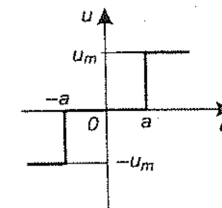
Wyznaczanie odpowiedzi przekaźnika dwupołożeniowego na sygnał wejściowy $e(t)=A\sin\omega t$ przedstawiono na rys. 15.25a. Zgodnie z tym rysunkiem

$$J(A)=\frac{1}{\pi A}\int_0^{\pi}10\sin\omega t\, d(\omega t)+\frac{1}{\pi A}\int_{\pi}^{2\pi}-10\sin\omega t\, d(\omega t)=$$
$$=\frac{10}{\pi A}(-\cos\omega t)_0^{\pi}-\frac{10}{\pi A}(-\cos\omega t)_{\pi}^{2\pi}=\frac{40}{\pi A} \tag{15.45}$$

Graficzny obraz funkcji opisującej przekaźnika przedstawiono na rys. 15.25b.

**Przykład 15.4**

Wyznaczyć funkcję opisującą przekaźnika trójpołożeniowego o charakterystyce statycznej jak na rys. 15.26.




Rys. 15.26. Charakterystyka statyczna przekaźnika trójpołożeniowego do przykładu 15.4

*Rozwiązanie*

Podobnie jak w przykładzie 15.3, wyznaczamy odpowiedź przekaźnika na sygnał wejściowy $e(t)=A\sin\omega t$ (rys. 15.27). Wykorzystując oznaczenia z rys. 15.26 i zależność (15.44), mamy

$$J(A)=\frac{C_1}{A}=\frac{1}{\pi A}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}u_m\sin\omega t\, d(\omega t)+\frac{1}{\pi A}\int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha}-u_m\sin\omega t\, d(\omega t)=$$
$$=\frac{u_m}{\pi A}(-\cos\omega t)_{\alpha}^{\pi-\alpha}-\frac{u_m}{\pi A}(-\cos\omega t)_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha}= \tag{15.46}$$
$$=\frac{4u_m}{\pi A}(-\cos\omega t)_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4u_m}{\pi A}\cos\alpha$$

Ponieważ $A\sin\alpha=a$ (rys. 15.27), więc

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} \tag{15.47}$$

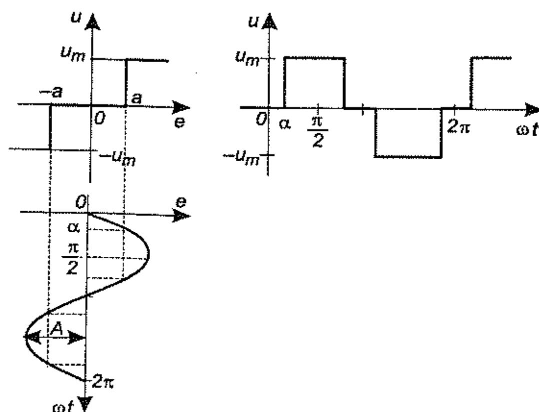
Z równań (15.46) i (15.47) otrzymuje się

$$J(A)=\frac{4u_m}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}=\frac{u_m}{a}J_0 \tag{15.48}$$

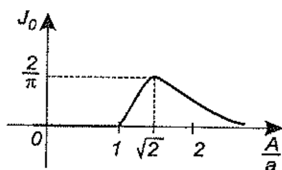
gdzie

$$J_0=\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{(A/a)^2-1}{(A/a)^4}} \tag{15.49}$$

Przebieg funkcji $J_0$ przedstawiono na rys. 15.28.




Rys. 15.27. Wyznaczanie odpowiedzi przekaźnika trójpołożeniowego na sinusoidalny sygnał wejściowy




Rys. 15.28. Wykres składowej $J_0$ funkcji opisującej przekaźnika trójpołożeniowego

Do badania stabilności układów nieliniowych nie wykorzystuje się opisu właściwości elementów nieliniowych bezpośrednio w postaci funkcji opisującej, tylko w postaci tzw. **wykresu krytycznego**, oznaczanego jako $K(A)$, związanego z funkcją opisującą zależnością

$$K(A)=-\frac{1}{J(A)} \tag{15.50}$$

Funkcje opisujące i odpowiadające im wykresy krytyczne dla szeregu podstawowych nieliniowości zestawiono w tabl. 15.1.





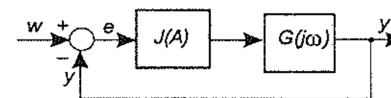
**Funkcje opisujące $J(A)$ i odpowiadające im wykresy krytyczne $K(A)$ typowych nieliniowości**

| Charakterystyka elementu | Wykres funkcji opisującej $J(A)$ (we współrzędnych bezwymiarowych) | Wykres krytyczny $K(A)=-\frac{1}{J(A)}$ |
|---|---|---|
| | $J(A)=\frac{4y_m}{\pi A}$ | $A=\infty$, $A=0$ |
| | dla $A>a$ $J(A)=\frac{4y_m}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$ | $A=0$, $A=\sqrt{2}a$, $\frac{\pi a}{2y_m}$ |
| | $k=\frac{y_m}{a}$ dla $A>a$ $J(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{y_m}{Ak}+\frac{y_m}{Ak}\sqrt{1-\left(\frac{y_m}{Ak}\right)^2}\right]$ | $A=\infty$, $A\le a$, $-\frac{1}{k}$ |

Tablica 15.1, cd.

| Charakterystyka elementu | Wykres funkcji opisującej $J(A)$ (we współrzędnych bezwymiarowych) | Wykres krytyczny $K(A) = -\dfrac{1}{J(A)}$ |
|---|---|---|
| $y$, $-a$, $a$, $x$, arctg$k$ | $\frac{J(A)}{k}$ 1; 0,6; 0,2; 0 1 2 3 4 5 6 $A/a$<br>dla $A > a$<br>$J(A) = k - \dfrac{2k}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{a}{A} + \dfrac{a}{A}\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}\right]$ | $Im$, $Re$, $A = 0$, $A = \infty$, $-\frac{1}{k}$ |
| $y$, $y_m$, $-a$, $a$, $x$, $-y_m$ | dla $A < a$<br>$J(A) = 0$<br>dla $A > a$<br>$J(A) = \dfrac{4y_m}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2} - j\dfrac{a}{A}\right] =$<br>$= B(A)\,e^{j\varphi(A)}$<br>$\varphi(A) = -\arcsin A/a$<br>$B(A)\frac{a}{y_m}$ $4/\pi$; 1; $2/\pi$; 0,5; $1/\pi$; 0 1 2 3 4 5 $A/a$<br>$\varphi(A)$ 0; $-45°$; $-90°$; 0 1 2 3 4 5 $A/a$ | $Im$, $Re$, 0, $A = \infty$, $A = a$, $-\frac{\pi a}{4y_m}$ |

Do przedstawienia metodyki badania stabilności nieliniowego układu regulacji posłużymy się schematem przedstawionym na rys. 15.29, będącym uproszczeniem schematu z rys. 15.22. Właściwości bezinercyjnego elementu nieliniowego określa funkcja opisująca $J(A)$, natomiast właściwości elementu liniowego – transmitancja widmowa $G(j\omega)$.




Rys. 15.29. Uproszczony schemat blokowy nieliniowego układu regulacji

W przypadku bezinercyjnego elementu nieliniowego o jednoznacznej charakterystyce, jego funkcja opisująca wyraża stosunek amplitudy pierwszej harmonicznej sygnału wyjściowego do amplitudy sinusoidalnego sygnału wejściowego. Zatem, jeżeli taki element nieliniowy współpracuje z częścią liniową silnie tłumiącą wyższe harmoniczne, to wykorzystując częstotliwościowy opis układu, można funkcję opisującą traktować jako funkcję wyrażającą wartość wzmocnienia proporcjonalnego elementu nieliniowego.

W przypadku elementu nieliniowego o charakterystyce niejednoznacznej, funkcja opisująca wyraża dodatkowo wartość przesunięcia fazowego wnoszonego przez ten element. Zatem, jeżeli część liniowa analizowanego układu z elementem nieliniowym jest stabilna i dostatecznie silnie tłumi wyższe harmoniczne, to układ ten można traktować jak liniowy i wykorzystać do badania stabilności kryterium Nyquista.

Dla analizowanego układu regulacji transmitancja układu otwartego ma postać

$$G_0(j\omega) = J(A)\,G(j\omega) \tag{15.51}$$

Zgodnie z kryterium Nyquista, w układzie zamkniętym powstają niegasnące oscylacje (układ będzie na granicy stabilności), gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przechodzi przez punkt krytyczny $(-1, j0)$, czyli gdy będzie spełniona zależność

$$G_0(j\omega) = -1 \tag{15.52}$$

czyli, w przypadku rozważanego układu, gdy

$$J(A)\,G(j\omega) = -1 \tag{15.53}$$

Z równania (15.53) wynika warunek powstawania w nieliniowym układzie zamkniętym niegasnących oscylacji

$$G(j\omega) = -\frac{1}{J(A)} = K(A) \tag{15.54}$$

Zatem, w układzie nieliniowym mogą powstać niegasnące oscylacje, jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa liniowej części układu ma punkty wspólne

z wykresem krytycznym części nieliniowej. Parametry tych oscylacji są określone przez te punkty.

Rozważmy możliwe przypadki usytuowania wykresu krytycznego względem charakterystyki amplitudowo-fazowej liniowej części układu (rys. 15.30).

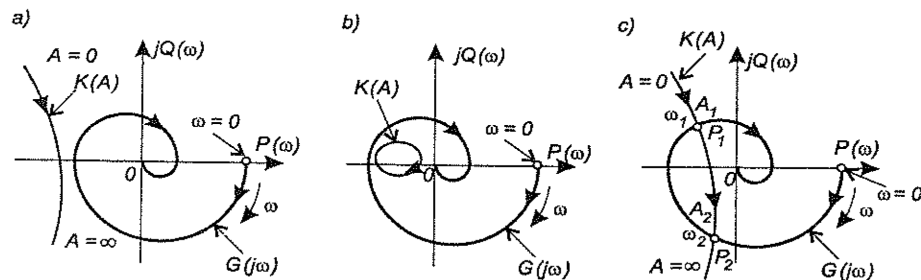
Jeżeli wykres krytyczny leży całkowicie poza charakterystyką $G(j\omega)$ części liniowej (rys. 15.30a), to dla każdej amplitudy oscylacji mamy

$$|K(A)| > |G(j\omega)|$$

$$\left|-\frac{1}{J(A)}\right| > |G(j\omega)|$$

$$|J(A)||G(j\omega)| < 1 \tag{15.55}$$

co oznacza, że pojawiające się w układzie zamkniętym oscylacje o każdej wartości amplitudy $A$ będą tłumione; układ taki jest więc stabilny globalnie.




Rys. 15.30. Przykłady usytuowania wykresu krytycznego $K(A)$ elementu nieliniowego względem charakterystyki amplitudowo-fazowej $G(j\omega)$ liniowej części układu

Jeżeli charakterystyka $G(j\omega)$ części liniowej obejmuje całkowicie wykres krytyczny (rys. 15.30b), to dla każdej amplitudy oscylacji mamy

$$|K(A)| < |G(j\omega)|$$

$$\left|-\frac{1}{J(A)}\right| < |G(j\omega)|$$

$$|J(A)||G(j\omega)| > 1 \tag{15.56}$$



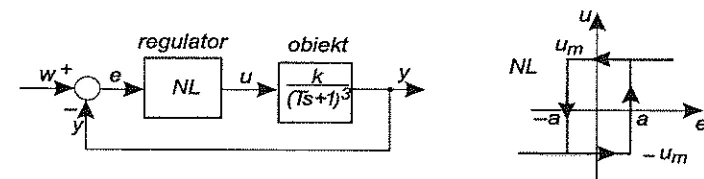
zatem w układzie zamkniętym amplituda oscylacji będzie wzrastać; układ jest globalnie niestabilny.

Przecinanie się wykresu krytycznego z charakterystyką $G(j\omega)$ części liniowej (rys. 15.30c) świadczy o występowaniu w układzie cykli granicznych. Punkt $P_1$ odpowiada oscylacjom o amplitudzie $A_1$ i pulsacji $\omega_1$, punkt $P_2$ – oscylacjom o amplitudzie $A_2$ i pulsacji $\omega_2$. Dla amplitud mniejszych od $A_1$ spełniony jest warunek (15.55), zatem oscylacje o takich amplitudach będą wygasać. Dla amplitud większych od $A_1$ spełniony jest warunek (15.56), zatem oscylacje będą miały wzrastającą amplitudę aż do wartości $A_2$. Dla amplitud większych od $A_2$ ponownie jest spełniony warunek (15.55), zatem amplituda oscylacji będzie maleć do wartości $A_2$. Zatem punkt $P_1$ określa parametry niestabilnego cyklu granicznego, punkt $P_2$ – parametry cyklu stabilnego.

Metoda funkcji opisującej zastosowana do badania stabilności układu nieliniowego jest metodą stosunkowo efektywną, umożliwiającą poznanie właściwości nieliniowego układu, ale trzeba pamiętać, że jest to metoda przybliżona, tym dokładniejsza, im bardziej część liniowa układu tłumi wyższe harmoniczne. Jest ona skuteczna i prostsza niż metoda płaszczyzny fazowej. Pozwala badać układy wyższego rzędu, co nie jest możliwe w przypadku metody płaszczyzny fazowej.

### Przykład 15.5

Wykorzystując metodę funkcji opisującej, zbadać stabilność układu regulacji przedstawionego na rys. 15.31.




Rys. 15.31. Schemat blokowy układu regulacji oraz charakterystyka statyczna regulatora

*Rozwiązanie*

Zgodnie z tabl. 15.1, funkcja opisująca $J(A)$ przekaźnika dwupołożeniowego z histerezą ma postać:

$$J(A) = \frac{4y_m}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} - j\frac{a}{A}\right] \tag{15.57}$$

Funkcja ta, a także odpowiadający jej wykres krytyczny, ma fizyczny sens dla $A \geq a$. Wykres krytyczny $K(A)$ wykorzystanego w układzie regulatora nieliniowego o sygnale wyjściowym $u$ jest opisany równaniem

$$K(A) = -\frac{1}{J(A)} = -\frac{\pi a}{4u_m}\left[\frac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}{\frac{a}{A}} + j\right] \tag{15.58}$$

Funkcja $K(A)$ ma stałą ujemną część urojoną

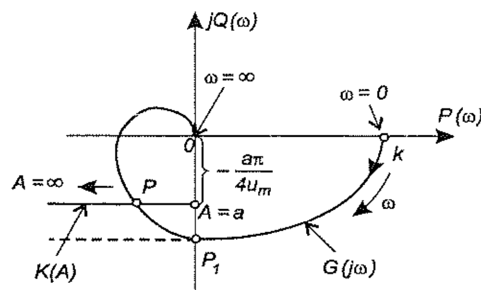
$$\operatorname{Im} K(A) = -\frac{a\pi}{4u_m} \tag{15.59}$$

oraz ujemną część rzeczywistą

$$\operatorname{Re} K(A) = -\frac{\pi a}{4u_m}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}{\frac{a}{A}} \tag{15.60}$$

Dla $A = a$ $\operatorname{Re} K(A) = 0$; $\lim_{A\to\infty} \operatorname{Re} K(A) = -\infty$.

Wykres krytyczny $K(A)$ regulatora i charakterystykę amplitudowo-fazową $G(j\omega)$ liniowej części układu przedstawiono na rys. 15.32. Jak widać, wykres krytyczny może mieć z charakterystyką amplitudowo-fazową tylko jeden punkt wspólny. Jeżeli będzie to punkt $P$, to oscylacje o amplitudach większych od amplitudy odpowiadającej punktowi $P$ będą gasnące; oscylacje o amplitudach mniejszych niż w punkcie $P$ będą wzrastać. Zatem punkt $P$ określa parametry stabilnego cyklu granicznego. Wewnątrz tego cyklu układ jest lokalnie niestabilny, na zewnątrz – lokalnie stabilny.




Rys. 15.32. Charakterystyki $K(A)$ i $G(j\omega)$ do przykładu 15.5



Wyznaczmy warunki, przy których charakterystyki $K(A)$ i $G(j\omega)$ będą miały wspólny punkt $P_1$. Pulsację $\omega_0$ odpowiadającą punktowi $P_1$ otrzymujemy z równania

$$\arg G(j\omega_0) = -3 \operatorname{arctg} T\omega_0 = -\frac{\pi}{2} \tag{15.61}$$

skąd

$$\omega_0 = \frac{1}{T\sqrt{3}} \tag{15.62}$$

$$\operatorname{Im} G(j\omega_0) = -\frac{k}{(\sqrt{T^2\omega_0^2 + 1})^3} = -\frac{3^{3/2}}{8}k \tag{15.63}$$

Z równości $\operatorname{Im} G(j\omega_0) = \operatorname{Im} K(A)$ otrzymujemy wzmocnienie części liniowej $k_{kryt}$, przy którym wspólnym punktem charakterystyk $K(A)$ i $G(j\omega)$ jest punkt $P_1$

$$k_{kryt} = \frac{2\pi a}{3^{3/2} u_m} \tag{15.64}$$

Zatem dla $k < k_{kryt}$ w układzie nie wystąpi cykl graniczny; układ będzie stabilny. Nie oznacza to jednak, że taki układ jest praktycznie użyteczny. Z zależności (15.64) wynika, że

$$k_{kryt}\, u_m = \frac{2\pi}{3^{3/2}} a \approx 1{,}2a \tag{15.65}$$

czyli nawet bardzo duża odchyłka regulacji $e$ nie spowoduje zmian sygnału wyjściowego większych niż około $1{,}2a$. Aby układ był w stanie nadążać za zmianami wartości zadanej w odpowiednio szerokim zakresie, wzmocnienie układu otwartego powinno być dużo większe niż $k_{kryt}$. Zatem, istotą poprawności działania tego układu, ze względu na właściwości zastosowanego elementu nieliniowego o charakterystyce przekaźnika dwupołożeniowego z histerezą, jest stałe załączanie i wyłączanie sterowanego obiektu, a więc występowanie cyklu granicznego, którego parametry określa punkt $P$.

# 16. SYMBOLE I OZNACZENIA NA SCHEMATACH FUNKCJONALNYCH UKŁADÓW REGULACJI

W rozdziale tym omówione zostaną podstawy pewnego rodzaju języka – języka graficznego automatyków. Wyrazami w tym języku są znormalizowane symbole graficzne wraz z przynależnymi do nich oznaczeniami. Symbole te, odpowiednio połączone i opisane, tworzą schemat układu automatyki zawierający informacje, których przekazanie w inny sposób byłoby w wielu przypadkach niemożliwe, a w większości przypadków dużo trudniejsze.

Ustalenia podane w normach nie są wyrazem osobistych poglądów niektórych fachowców, lecz wynikiem dyskusji międzynarodowych zespołów specjalistów, reprezentujących większość rozwiniętych krajów świata. Dlatego też dokumentacja techniczna układu automatyki wykonana przy użyciu znormalizowanych symboli jest zrozumiała na całym świecie. Do zrozumienia działania i obsługi tych instalacji, nawet najprostszych, niezbędna jest znajomość stosowanych symboli graficznych.

Symbole graficzne i oznaczenia na schematach podane są w polskich normach PN-89/M-42007/01, PN-90/M-42007/02, PN-89/M-42007/03 i PN--89/M-42007/04. Normy te są adaptacją do warunków polskich normy ISO 3511, stąd oznaczenia literowe stosowane w dokumentacji projektowej oparte są na nazewnictwie angielskim.

Podstawowym elementem dokumentacji projektowej układu regulacji jest schemat automatyzowanego procesu technologicznego wraz z naniesionymi symbolami graficznymi i oznaczeniami literowo-cyfrowymi miejsc, w których następuje pobór informacji o przebiegu procesu, oraz miejsc oddziaływania sterowania na proces. W miejscach tych znajdują się układy pomiarowe lub układy sterowania, których symbole graficzne nazywane są punktem PA (pomiary i automatyka). Zestaw przyrządów pomiarowych lub sterujących połączonych między sobą w celu odbierania informacji i oddziaływania na proces tworzy obwód PA, a graficzna reprezentacja obwodu PA nazywa się schematem obwodowym. Wykaz wybranych symboli oraz oznaczeń literowo-cyfrowych stosowanych na schematach automatyzacji i schematach obwodowych przedstawiono w tabl. 16.1 i 16.2.



Tablica 16.1

**Wybrane symbole graficzne stosowane na schematach automatyzacji [39, 42]**

| Nazwa symbolu | Symbol graficzny punktu PA sygnał analogowy | Nazwa symbolu | Symbol graficzny punktu PA sygnał cyfrowy |
|---|---|---|---|
| Punkt PA miejscowy | | Punkt PA z urządzeniem programowalnym z jednodostępem | |
| Punkt zdalny PA (pomiar w sterowni) | | Punkt PA wyłącznie z komputerem procesowym | |
| Punkt PA współpracujący | | Punkt PA z komputerem procesowym z dostępem ze sterowni | |
| Punkt PA z dodatkowym wyposażeniem, dodatkowymi funkcjami i powiązaniami | | Punkt PA z komputerem procesowym z dostępem z pulpitu lokalnego | |
| Zespół wykonawczy NO o działaniu otwierającym przy zaniku sygnału sterującego | | Punkt PA – system komputerowy połączony z urządzeniem analogowym | |
| Zespół wykonawczy NC o działaniu zamykającym przy zaniku sygnału sterującego | | Punkt PA – system rozproszony wyłącznie z systemem procesorowym | |
| Zespół wykonawczy z blokadą pozycji przy zaniku sygnału sterującego | | Punkt PA – system rozproszony wyłącznie z systemem procesorowym z dostępem ze sterowni | |
| Linia sygnałowa | lub | Punkt PA – system rozproszony wyłącznie z systemem procesorowym z dostępem z pulpitu lokalnego | |

Tablica 16.2

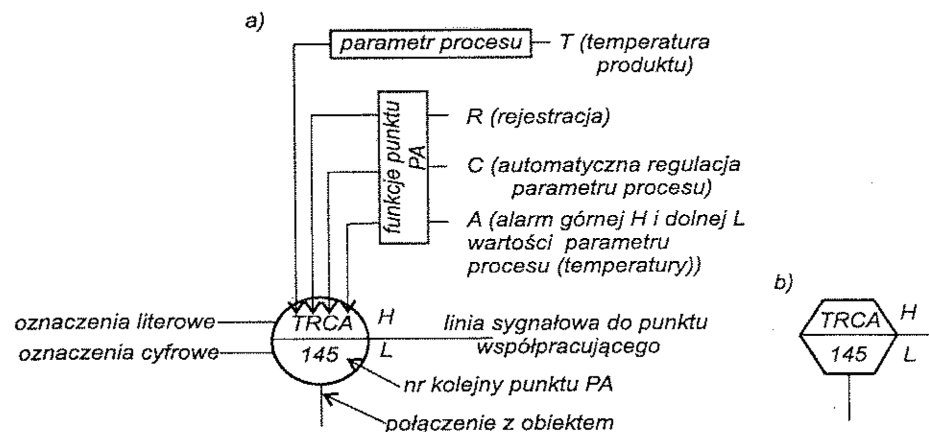
**Wybrane oznaczenia literowe stosowane na schematach automatyzacji [39]**

| Litera | Wielkość mierzona lub sterowana, lub rodzaj sterowania | | Funkcje wykonywane (następne litery) |
|---|---|---|---|
| | oznaczenie podstawowe (pierwsza litera) | oznaczenie uzupełniające (druga litera) | |
| A | | | sygnalizacja[1] |
| C | | | sterowanie automatyczne |
| D | Gęstość, masa właściwa | różnica | |
| E | Wielkość elektryczna | | czujnik |
| F | Strumień objętości lub masy | iloraz (stosunek) | |
| G | Wymiar, położenie | | |
| H | Sterowanie ręczne | | |
| I | | | wskazanie |
| K | Czas, program | | |
| L | Poziom | | |
| M | Wilgotność (bezwzględna lub względna) | | |
| P | Ciśnienie, próżnia | | |
| Q | Jakość i parametry środowiska, koncentracja, pH itp. | całkowanie lub zliczanie | całkowanie lub sumowanie |
| R | Radioaktywność | | rejestracja |
| S | Prędkość lub częstotliwość | | przełączanie |
| T | Temperatura | | przetwarzanie, przekazywanie sygnałów |
| U | Wielkość wielu zmiennych | | działanie wielofunkcyjne |
| W | Siła lub masa | | |
| Z | | | działanie awaryjne, blokada |

[1] Znak H umieszczony poza konturem symbolu oznacza górną granicę zakresu, a znak L – dolną.



Przykład symbolu graficznego punktu PA z objaśnieniami znaczenia jego elementów przedstawiono na rys. 16.1.




Rys. 16.1. Przykład opisu symbolu graficznego punktu PA zdalnego z sygnałem: a) analogowym, b) cyfrowym

Opierając się na przytoczonym zestawie symboli i oznaczeń, wykonuje się także schematy synoptyczne umieszczane na tablicach sterowniczych lub w formie obrazów synoptyki na ekranach monitorów. Oznaczenia literowe i cyfrowe pozwalają na pełną identyfikację punktu PA i są powtarzane w projekcie na schematach obwodowych, w specyfikacjach obwodowych i w specyfikacjach zamówieniowych.

Przykłady przedstawiania punktów PA w instalacji technologicznej podane są w tabl. 16.3.

Tablica 16.3

**Przykłady przedstawiania punktów PA na schematach automatyzacji**

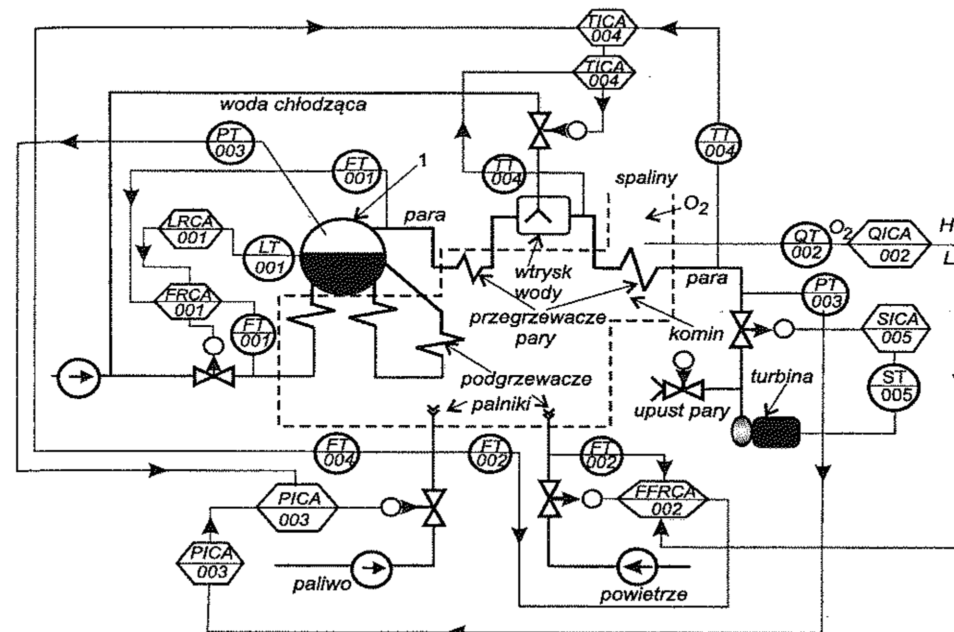
| Lp. | Schemat automatyzacji | Objaśnienia |
|---|---|---|
| 1 | FIR 03 paliwo | obwód nr 03 pomiaru przepływu paliwa w rurociągu z miejscowym wskazaniem i rejestracją |

Tablica 16.3, cd.

| Lp. | Schemat automatyzacji | Objaśnienia |
|---|---|---|
| 2 | HI 32; woda | sterowanie ręczne zaworem regulacyjnym ze zdalnym wskazaniem wartości sygnału sterującego; zanik sygnału sterującego otwiera zawór; obwód nr 32 analogowy |
| 3 | PRC 35; powietrze | jednoobwodowy układ regulacji ciśnienia powietrza ze zdalną rejestracją wartości ciśnienia; zanik sygnału sterującego otwiera zawór; obwód nr 35 analogowy |
| 4 | FRC 102; woda; LRCA 102 H L | układ automatycznej regulacji poziom/ /przepływ o strukturze kaskadowej ze zdalną rejestracją przepływu i poziomu; zanik sygnału sterującego zamyka zawór; obwód nr 102 analogowy |
| 5 | woda; LT 103; LICA 103 H L | układ automatycznej regulacji poziomu, pomiar poziomu analogowy, część centralna cyfrowa zdalna, alarm dolny i górny, dostęp ze sterowni; zanik sygnału sterującego zamyka zawór; obwód nr 103 |
| 6 | woda; LICA 103; LICA 103 | układ automatycznej regulacji poziomu, część centralna cyfrowa z równolegle włączonym rezerwowym regulatorem analogowym; zanik sygnału sterującego zamyka zawór; obwód nr 103 |



W przypadku obiektu wielowymiarowego o wielu wielkościach regulowanych schemat automatyzacji jest bardziej skomplikowany od przedstawionych w tabl. 16.3. Przykładem może być schemat automatyzacji (przedstawiony na rys. 16.2) zespołu kocioł parowy–turbina bloku energetycznego.



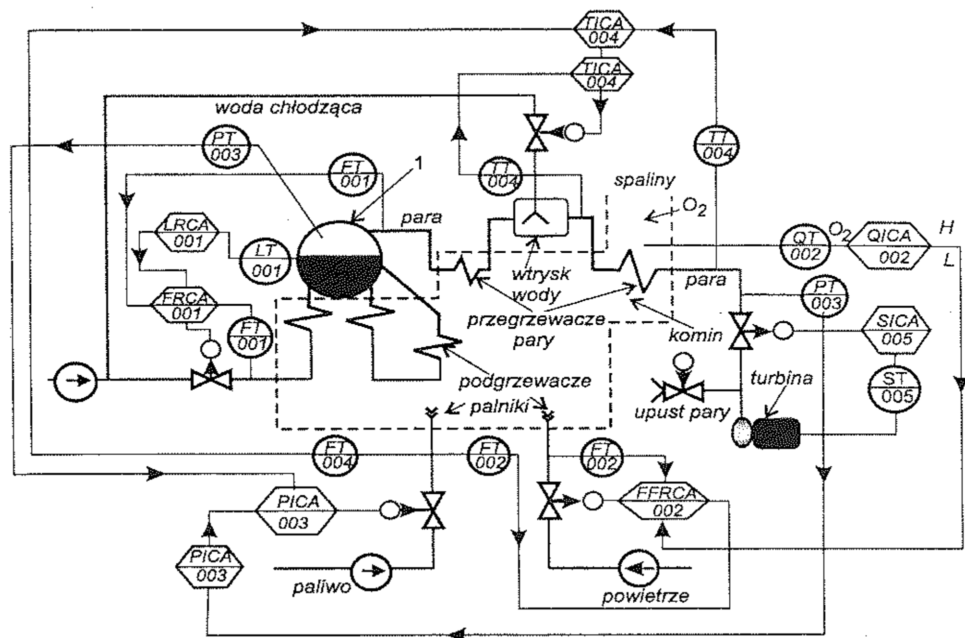

Rys. 16.2. Schemat automatyzacji zespołu kocioł parowy–turbina; część centralna punktów PA cyfrowa, część pomiarowa analogowa, punkty PA zdalne; FT, LT, PT, TT, ST, QT – przetworniki analogowe odpowiednio przepływu, poziomu, ciśnienia, temperatury, prędkości obrotowej, składu spalin; LRCA-001 – układ regulacji poziomu wody w walczaku o strukturze kaskadowej z obwodem pomocniczym FRCA-001 układu regulacji przepływu wody; rejestracja i alarm poziomu i przepływu; zespół wykonawczy NO; QICAHL-002 – układ regulacji zawartości tlenu w spalinach o strukturze kaskadowej z obwodem pomocniczym FFRCA-002 regulacji stosunku przepływ powietrza/przepływ paliwa; alarm wartości maksymalnej i minimalnej zawartości $O_2$ w spalinach; wskazanie zawartości tlenu, wskazanie i rejestracja przepływów; zespół wykonawczy NO; PICA-003 – układ regulacji ciśnienia pary podawanej do turbiny – struktura kaskadowa z obwodem pomocniczym PICA-003 od ciśnienia pary w walczaku; wskazanie ciśnień i alarm; zespół wykonawczy NC; TICA-004 – układ regulacji temperatury pary podawanej do turbiny o strukturze kaskadowej; układ pomocniczy TICA-004 od temperatury pary przed przegrzewaczem; wskazanie i alarm obu temperatur; zespół wykonawczy NC; SICA-005 – jednoobwodowy układ regulacji prędkości obrotowej wału turbiny ze wskazaniem prędkości i alarmem; zespół wykonawczy NO

Tablica 16.3, cd.

| Lp. | Schemat automatyzacji | Objaśnienia |
|---|---|---|
| 2 | HI 32; woda | sterowanie ręczne zaworem regulacyjnym ze zdalnym wskazaniem wartości sygnału sterującego; zanik sygnału sterującego otwiera zawór; obwód nr 32 analogowy |
| 3 | PRC 35; powietrze | jednoobwodowy układ regulacji ciśnienia powietrza ze zdalną rejestracją wartości ciśnienia; zanik sygnału sterującego otwiera zawór; obwód nr 35 analogowy |
| 4 | FRC 102; woda; LRCA 102 H L | układ automatycznej regulacji poziom/ /przepływ o strukturze kaskadowej ze zdalną rejestracją przepływu i poziomu; zanik sygnału sterującego zamyka zawór; obwód nr 102 analogowy |
| 5 | woda; LT 103; LICA 103 H L | układ automatycznej regulacji poziomu, pomiar poziomu analogowy, część centralna cyfrowa zdalna, alarm dolny i górny, dostęp ze sterowni; zanik sygnału sterującego zamyka zawór; obwód nr 103 |
| 6 | woda; LICA 103; LICA 103 | układ automatycznej regulacji poziomu, część centralna cyfrowa z równolegle włączonym rezerwowym regulatorem analogowym; zanik sygnału sterującego zamyka zawór; obwód nr 103 |



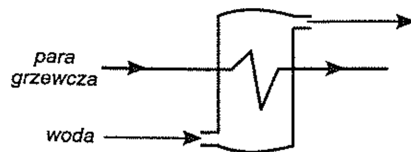
W przypadku obiektu wielowymiarowego o wielu wielkościach regulowanych schemat automatyzacji jest bardziej skomplikowany od przedstawionych w tabl. 16.3. Przykładem może być schemat automatyzacji (przedstawiony na rys. 16.2) zespołu kocioł parowy–turbina bloku energetycznego.




Rys. 16.2. Schemat automatyzacji zespołu kocioł parowy–turbina; część centralna punktów PA cyfrowa, część pomiarowa analogowa, punkty PA zdalne; FT, LT, PT, TT, ST, QT – przetworniki analogowe odpowiednio przepływu, poziomu, ciśnienia, temperatury, prędkości obrotowej, składu spalin; LRCA-001 – układ regulacji poziomu wody w walczaku o strukturze kaskadowej z obwodem pomocniczym FRCA-001 układu regulacji przepływu wody; rejestracja i alarm poziomu i przepływu; zespół wykonawczy NO; QICAHL-002 – układ regulacji zawartości tlenu w spalinach o strukturze kaskadowej z obwodem pomocniczym FFRCA-002 regulacji stosunku przepływ powietrza/przepływ paliwa; alarm wartości maksymalnej i minimalnej zawartości $O_2$ w spalinach; wskazanie zawartości tlenu, wskazanie i rejestracja przepływów; zespół wykonawczy NO; PICA-003 – układ regulacji ciśnienia pary podawanej do turbiny – struktura kaskadowa z obwodem pomocniczym PICA-003 od ciśnienia pary w walczaku; wskazanie ciśnień i alarm; zespół wykonawczy NC; TICA-004 – układ regulacji temperatury pary podawanej do turbiny o strukturze kaskadowej; układ pomocniczy TICA-004 od temperatury pary przed przegrzewaczem; wskazanie i alarm obu temperatur; zespół wykonawczy NC; SICA-005 – jednoobwodowy układ regulacji prędkości obrotowej wału turbiny ze wskazaniem prędkości i alarmem; zespół wykonawczy NO

### Ćwiczenie 16.1

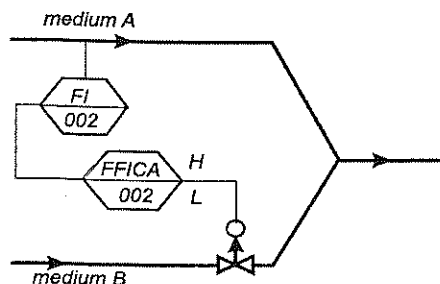
Narysować schemat automatyzacji instalacji pokazanej na rys. 16.3. Wielkością regulowaną jest temperatura wody na wyjściu z wymiennika ciepła. W układzie regulacji zastosować regulator mikroprocesorowy.




Rys. 16.3. Schemat wymiennika ciepła do ćwiczenia 16.1

### Ćwiczenie 16.2

Jaką strukturę ma układ przedstawiony na rys. 16.4?




Rys. 16.4. Schemat do ćwiczenia 16.2



# 17. OPIS ŚRODOWISKA MATLAB/SIMULINK STOSOWANEGO DO SYMULACJI ELEMENTÓW I UKŁADÓW REGULACJI

Oprogramowanie MATLAB[1] zostało opracowane przez firmę The MathWorks Inc. (USA). Składa się ono ze standardowych i wyspecjalizowanych podkatalogów (*Toolboxes*), pozwalających użytkownikom w prosty sposób rozwiązać nawet najbardziej złożone zadania obliczeniowe. Z punktu widzenia inżyniera automatyka do najważniejszych podkatalogów zaliczyć można:

- SIMULINK – program do modelowania i symulacji układów dynamicznych ciągłych, dyskretnych i dyskretno-ciągłych. SIMULINK jest środowiskiem graficznym, w którym symulację układów wykonuje się na podstawie schematu blokowego budowanego z wykorzystaniem predefiniowanych bloków bibliotecznych. Pakiet SIMULINK jako nakładka oprogramowania MATLAB nie może być używany bez zainstalowania pakietu MATLAB.
- CONTROL SYSTEM TOOLBOX – zestaw programów umożliwiających analizę i syntezę układów sterowania w dziedzinie czasu i częstotliwości z uwzględnieniem opisu za pomocą zmiennych stanu.
- SYSTEM IDENTIFICATION TOOLBOX – zestaw programów dotyczących modelowania parametrycznego i identyfikacji systemów. Umożliwia estymację modeli systemu na podstawie danych z pomiaru.
- OPTIMIZATION TOOLBOX – program rozwiązujący problemy optymalizacji dowolnej nieliniowej funkcji celu z dowolnego typu ograniczeniami, zawiera także procedury do rozwiązywania układów równań nieliniowych.
- NEURAL NETWORK TOOLBOX – zbiór programów do uczenia i testowania sztucznych sieci neuronowych.

MATLAB ma bardzo wygodny interfejs graficzny, pozwalający nie tylko na graficzną wizualizację wyników, ale również na tworzenie własnych wyspecjalizowanych interfejsów użytkownika [15, 26, 27]. Zakres zastosowania środowiska MATLAB/SIMULINK obejmuje różne dziedziny nauki i techniki: telekomunika-

[1] Wprowadzony tu opis dotyczy wersji MATLAB 7.1.

cję, automatykę, elektronikę, mechanikę i wiele innych. Właściwości interakcyjne oprogramowania pozwalają użytkownikowi na swobodną obróbkę danych zapisywanych w postaci macierzy z elementami rzeczywistymi lub zespolonymi i ich wizualizację.

MATLAB ma rozbudowany i zorganizowany tematycznie wielopoziomowy system pomocy (*Help*) oraz bogatą bibliotekę graficzną, pozwalającą na tworzenie wykresów dwu- i trójwymiarowych, na ich opisywanie i wprowadzenie dodatkowych transformacji.

Obecnie MATLAB jest jednym z bardziej rozpowszechnionych programów na świecie i znajduje się w wyposażeniu systemów komputerowych praktycznie każdej uczelni technicznej.

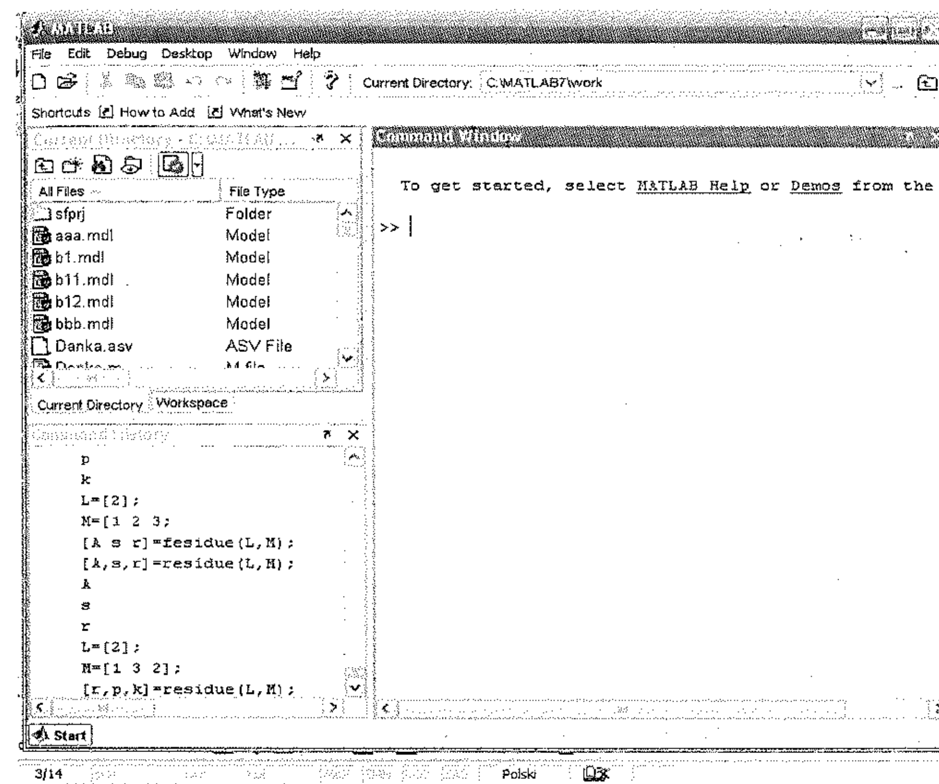
## 17.1. OPIS ŚRODOWISKA MATLAB

### 17.1.1. URUCHOMIENIE PROGRAMU

Inicjalizacja programu MATLAB w systemach Windows następuje przez kliknięcie na ikonę z nazwą programu. Na ekranie monitora pojawia się okno dialogowe podzielone na trzy części, przedstawione na rys. 17.1. Główna część (z prawej strony) jest oknem komend (*Command Window*), w którym wpisuje się wszystkie komendy uruchamiające obliczenia. Obszar okna z lewej strony podzielony jest na część dolną, zawierającą historię wpisywanych komend, oraz część górną, przełączaną albo na podgląd obszaru roboczego (*Workspace*) pokazującego aktualne zmienne, albo na podgląd zawartości aktualnego folderu roboczego (*Current Directory*). Możliwe jest odłączenie okna komend od pozostałej części okna dialogowego przez wybór z menu okna głównego opcji *View → Undock Command Window*. Ponowne połączenie obu okien realizuje się po wybraniu opcji *View → Dock Command Window*.

Po uruchomieniu programu MATLAB pojawia się w oknie dialogowym znak gotowości >>, za którym wprowadza się dane wejściowe. Dane te mogą mieć postać określonych poleceń pisanych bezpośrednio z klawiatury i natychmiast przez program wykonywanych lub mogą to być sekwencje poleceń zapisanych i zapamiętanych w tzw. m-pliku, nazywanym tak dlatego, że ma rozszerzenie nazwy *.m. Jest on zbiorem instrukcji napisanych w języku wewnętrznym MATLAB-a, jak i w innych językach, np. C, FORTRAN, JAVA, $C^{++}$. Do przygotowania takiego pliku używa się edytora programu wywoływanego albo komendą *Edit*, albo z menu głównego *File → Open* przy otwieraniu pliku już istniejącego, albo *File → New* przy tworzeniu nowego pliku. Aby uruchomić realizację poleceń zapisanych w m-pliku, wystarczy napisać jego nazwę po znaku gotowości. Większość działań i operacji dostępnych jest jednak w postaci tzw. m-plików funkcyjnych, które oprócz poleceń zawierają funkcje z możliwością wywołania parametrów. Znajdują się one w katalogu głównym, natomiast pliki do określonych zastosowań umieszczone są w podkatalogach tematycznych.






Rys. 17.1. Wygląd podstawowego okna dialogowego programu MATLAB

Zakończenie sesji obliczeniowej następuje po napisaniu komendy *quit* bądź *exe* lub zamknięciu okna dialogowego. Zamknięcie sesji powoduje, że wszystkie dane i uzyskane wyniki są tracone, zatem przed zamknięciem należy je zapamiętać komendą *save_nazwa pliku.mat*. Przy zapamiętywaniu jedynie wybranych zmiennych należy po nazwie pliku dodać ich nazwy.

## 17.1.2. MODELE DYNAMICZNE W PROGRAMIE MATLAB

W tym rozdziale zostanie podany opis kilku najważniejszych funkcji potrzebnych do tworzenia i analizowania modeli dynamicznych elementów i układów automatyki w programie MATLAB. Oprócz tych funkcji, istnieją również funkcje, które ze względu na ich dużą liczbę, nie będą omawiane.

Modele dynamiczne w MATLAB-ie definiuje się za pomocą następujących funkcji:

**Funkcja SS**

SYS=SS(A,B,C,D) generuje ciągły liniowy model SYS zmiennych stanu z macierzami równań stanu i wyjść **A**, **B**, **C**, **D**.

Przy wprowadzaniu macierzy, elementy wiersza oddziela się spacją, natomiast wiersze oddziela się średnikiem. Listę elementów macierzy zawiera się w nawiasach prostokątnych, np. macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 12 & 8 \\ 15 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

zostanie wprowadzona z klawiatury komendą

A=[1 2 3 4;0 3 12 8;15 3 9 1;2 10 8 7]

SYS=SS2TF(A,B,C,D) przetwarza zapis w przestrzeni stanu na zapis w postaci transmitancji.

**Funkcja ZPK**

SYS=ZPK(Z,P,K) generuje ciągły liniowy model SYS, w którym określone są zera (Z), bieguny (P) i wzmocnienie (K). Obiekt SYS jest typu ZPK.

**Funkcja TF**

SYS=TF(NUM,DEN) generuje ciągły liniowy model SYS opisany transmitancją operatorową z wielomianem w liczniku i wielomianem w mianowniku. Wielomiany NUM i DEN są wektorami wierszowymi, zawierającymi współczynniki odpowiednio licznika (NUM) i mianownika (DEN) transmitancji operatorowej, ustawione wg malejących potęg zmiennej $s$. Transmitancja operatorowa członu inercyjnego o stałej czasowej $T = 10$ s i wzmocnieniu $k = 10$, wywołana funkcją SYS=TF([0 10],[10 1]), ma postać

```
Transfer function
 10
------
10s+1
```

[A,B,C,D]=TF2SS(NUM,DEN) – generuje model dynamiczny zapisany we współrzędnych stanu, obliczając macierze równań stanu i wyjść **A,B,C,D** na podstawie transmitancji operatorowej.

**Funkcja STEP**

STEP(SYS) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się wykresu odpowiedzi na wymuszenie skokowe o amplitudzie 1 modelu SYS typu TF lub SS. Moment wystąpienia skoku jednostkowego ma miejsce zawsze dla $t = 0$, a przedział czasowy dobierany jest automatycznie. W przypadku układu o wielu wejściach wymuszenie skokowe jest stosowane oddzielnie dla każdego wejścia.

STEP(SYS,TFINAL) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się wykresu odpowiedzi na wymuszenie skokowe modelu SYS typu TF lub SS w przedziale czasowym od 0 do zadeklarowanej chwili oznaczonej w składni funkcji przez TFINAL.

IMPULSE(SYS) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się wykresu odpowiedzi impulsowej modelu SYS typu TF lub SS w przedziale czasowym dobieranym automatycznie przez program.

IMPULSE(SYS,TFINAL) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się wykresu odpowiedzi impulsowej modelu SYS typu TF lub SS w przedziale czasowym od 0 do TFINAL.

**Funkcja BODE**

BODE(SYS) – funkcja ta wywołuje obliczone przez program wykresy logarytmicznych charakterystyk: amplitudowej i fazowej modelu liniowego SYS, który może być dowolnego typu (SS, TF, ZPK). Zakres częstotliwości dobierany jest automatycznie.

BODE(SYS,W) – funkcja ta generuje charakterystyki logarytmiczne dla pulsacji podanych w wektorze W.

BODE(SYS1,SYS2,...,W) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się obliczonych przez program charakterystyk logarytmicznych kilku modeli na jednym

wykresie dla pulsacji podanych w wektorze W. Do każdego wykresu można przypisać inny kolor i rodzaj linii za pomocą następującego wyrażenia:

```
bode(sys1,'r',sys2,'y--',sys3,'gx')
```

co oznacza, że wykres 1 będzie rysowany czerwoną linią ciągłą, wykres 2 – linią żółtą przerywaną, a wykres 3 – linią kropka-kreska w kolorze zielonym.

[MAG,PHASE]=BODE[SYS,W] – funkcja ta oblicza moduł i przesunięcie fazowe modelu liniowego SYS dla pulsacji zadeklarowanych w wektorze W. Po wywołaniu tej funkcji wykresy się nie pojawiają. W celu uzyskania modułu w decybelach należy dołączyć dodatkowe polecenie: MAGDB=20*log10(MAG).

**Funkcja NYQUIST**

NYQUIST(SYS) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się na ekranie obliczonej charakterystyki amplitudowo-fazowej modelu liniowego SYS dowolnego typu. Zakres częstotliwości dobierany jest automatycznie.

NYQUIST(SYS,W) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się na ekranie obliczonej charakterystyki amplitudowo-fazowej modelu liniowego SYS dowolnego typu dla częstotliwości zadeklarowanej w wektorze W.

**Funkcja MARGIN**

MARGIN(SYS) – wywołanie tej funkcji powoduje pojawienie się na ekranie obliczonych logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej modelu liniowego SYS dowolnego typu otwartego układu regulacji wraz z zaznaczeniem na tych charakterystykach zapasu modułu i fazy, jakie układ ten będzie miał po zamknięciu. Zakres częstotliwości dobierany jest automatycznie.

[delta M,delta Fi,omegaminusPi,omegap]=MARGIN(SYS) wyznacza zapas modułu $\Delta M$ (delta M) i fazy $\Delta\varphi$ (delta Fi) oraz pulsacje: $\omega_{-\pi}$ (omegaminusPi), oraz $\omega_p$ (omegap) zamkniętego układu regulacji, którego układ otwarty opisany jest modelem SYS dowolnego typu. Zapas modułu $\Delta M$ jest liczbą niemianowaną

$$\Delta M = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})}$$

Aby określić zapas modułu wyrażony w decybelach, podaną wyżej funkcję MARGIN należy uzupełnić wyrażeniem: delta L= 20*log10delta M. Zapas fazy określany jest w stopniach. Wykresy charakterystyk logarytmicznych nie pojawiają się.



Opisane wyżej funkcje mają zastosowanie do analizy liniowych układów dynamicznych, opisanych modelami zawierającymi skończoną liczbę biegunów i zer. Modelem, który nie spełnia tego wymagania, jest człon opóźniający o transmitancji operatorowej $G(s) = e^{-T_0 s}$. Aby móc skorzystać z funkcji programu MATLAB do tworzenia i analizowania modeli czasowych członów opóźniających, należy funkcję $e^{-T_0 s}$ rozłożyć w szereg o skończonej liczbie elementów. W tym celu najczęściej stosuje się aproksymację Padégo rzędu $n$. Dla $n=1$ aproksymacja transmitancji operatorowej członu opóźniającego ma postać:

$$G(s) = e^{-T_0 s} \approx \frac{1 - \frac{T_0}{2}s}{1 + \frac{T_0}{2}s} \qquad (17.1)$$

Aproksymację członu opóźniającego w programie MATLAB realizują polecenia: [L,M]=pade($T_0$,n) lub pade($T_0$,n). Polecenia te otwierają okno graficzne, w którym zostanie umieszczona odpowiedź jednostkowa członu opóźniającego dla wybranej aproksymacji.

Omówione funkcje czasowe są także dostępne w przeglądarce modeli układów dynamicznych programu MATLAB o nazwie LTIVIEW, która dzięki swej funkcjonalności sprowadza do minimum wymagania dotyczące znajomości środowiska MATLAB. Funkcja LTIVIEW otwiera przeglądarkę lub interfejs graficzny użytkownika, ułatwiający sporządzanie charakterystyk czasowych i częstotliwościowych różnych modeli dynamicznych. Wywołanie pożądanej charakterystyki realizują następujące polecenia:

LTIVIEW(SYS1,SYS2,...,SYSN) – otwiera przeglądarkę zawierającą przedstawione w jednym oknie odpowiedzi skokowe modeli SYS1, SYS2,...,SYSN.

LTIVIEW(PLOTTYPE, SYS1,SYS2,...,SYSN) – otwiera przeglądarkę zawierającą przedstawione na jednym wykresie charakterystyki modeli SYS1, SYS2,...,SYSN, których rodzaj jest określony przez PLOTTYPE. Rodzaje charakterystyk określone przez PLOTTYPE są następujące:

step – odpowiedź skokowa,
impuls – odpowiedź impulsowa,
bode – logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa,
bodemag – logarytmiczna charakterystyka amplitudowa,
nyquist – charakterystyka amplitudowo-fazowa,
pzmap – wykres zer i biegunów.

Uzyskane z przeglądarki wykresy mają komentarze w języku angielskim i standardowo opisane osie. Uzyskanie napisów w języku polskim oraz uzupełnienie wy-

kresu o dodatkowe informacje jest możliwe ze zwykłego okna MATLAB-a, do którego można skopiować wykresy z przeglądarki LTIVIEW za pomocą opcji *Print to Figure* z menu *Files*. W oknie tym ręcznie ustawia się wymagane opcje wykresu.

**Przykład 17.1**

Stosując funkcję LTIVIEW, wyznaczyć odpowiedź skokową i impulsową, logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową (wykres Bodego) oraz charakterystykę amplitudowo-fazową (wykres Nyquista) członu oscylacyjnego o parametrach: wzmocnienie $k=2$, pulsacja drgań nietłumionych $\omega_0=10$ rad/s, współczynnik tłumienia $\xi=0,2$. Sformułować model matematyczny członu:
a) w postaci transmitancji operatorowej,
b) w postaci opisu współrzędnymi stanu.

*Rozwiązanie*

Przypadek a)

Transmitancja operatorowa członu oscylacyjnego ma postać:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}=\frac{200}{s^2+4s+100}$$

Podaną bezpośrednio z wiersza poleceń, następującą sekwencją komend

```
sys=tf([0 200],[1 4 100]);
ltiview({'step';'impulse';'bode';'nyquist'},sys);grid
```

wywołujemy funkcje TF oraz LTIVIEW.

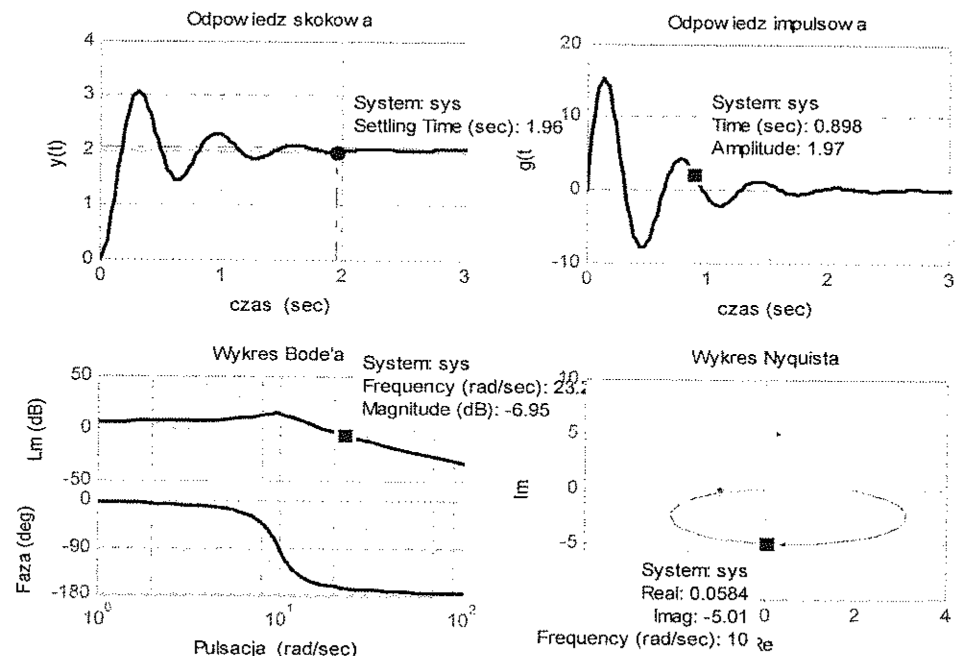
W wyniku wykonania podanej sekwencji poleceń MATLAB wygeneruje w jednym oknie charakterystyki pokazane na rys. 17.2. Dla większej czytelności korzystniej jest każdy wykres wywoływać w oddzielnym oknie za pomocą poleceń:

```
sys=tf([200],[1 4 100]);
ltiview('step',sys);grid
ltiview('impulse',sys);grid
ltiview('bode',sys);grid
ltiview('nyquist',sys);grid
```

Przeglądarka LTIVIEW dobiera automatycznie zakres wyświetlanych na osiach wartości, co często skutkuje tym, że wykresy są nieczytelne. Dlatego też poleca się skorzystanie z opcji *Print to Figure* z menu *File* przeglądarki i już w zwykłym oknie, edytując własności danego wykresu ręcznie, ustawia się opisy generowanych wykresów w języku polskim oraz zakresy wartości na osiach. Dla każdej charakterystyki umieszczonej w oknie, korzystając z opcji *Characteristic*,



można otworzyć zakładkę pozwalającą na wybór wskaźnika, którego wartość zostanie automatycznie przez program pokazana na wykresie. W przypadku odpowiedzi skokowej, w zakładce znajdują się następujące wskaźniki: *Peak Response* (wartość maksymalna odpowiedzi), *Settling Time* (czas ustalania), *Rise Ttime* (czas narastania odpowiedzi), *Steady State* (stan ustalony). Jako czas ustalania przyjęto w tym programie czas, jaki upływa od chwili wprowadzenia wymuszenia skokowego do chwili, od której odpowiedź nie wykracza poza przedział wartości $\pm\Delta$ od wartości ustalonej; wartość $\Delta$ jest deklarowana przez użytkownika jako określony procent wartości ustalonej. Można wybrać pokazanie na wykresie wartości wszystkich wskaźników lub jednego wskaźnika, np. na rys. 17.2 na wykresie odpowiedzi skokowej, w wyniku wybrania poleceń: *Characteristic* → *Settling Time*, pokazana jest wartość czasu ustalania. Na wykresie tym tolerancja $\Delta$ wynosi 2% wartości ustalonej, która to wartość, w przypadku braku deklaracji, jest wartością domyślną. Na pozostałych wykresach pokazane są wartości współrzędnych wskazanego przez użytkownika punktu danej charakterystyki. W przypadku wykresu Nyquista, dla wybranego punktu charakterystyki, pokazywane są wartości pulsacji oraz wartości części rzeczywistej i urojonej transmitancji widmowej.




Rys. 17.2. Charakterystyki członu oscylacyjnego wygenerowane przez program MATLAB i uzupełnione o informacje dostępne z przeglądarki LTIVIEW

Przypadek b)

W przypadku opisu członu oscylacyjnego w postaci równań stanu i wyjść

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}U(t)$$

$$Y(t) = \mathbf{C}X(t) + \mathbf{D}U(t)$$

zgodnie z tabl. 13.1, macierze tych równań mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} = [200 \quad 0], \mathbf{D} = [0]$$

Podaną bezpośrednio z wiersza poleceń następującą sekwencją komend:

```
sys=ss([0 1;-100 -4],[0;1],[200 0],[0]);
ltiview({,step';'impulse';'bode';'nyquist'},sys);grid
```

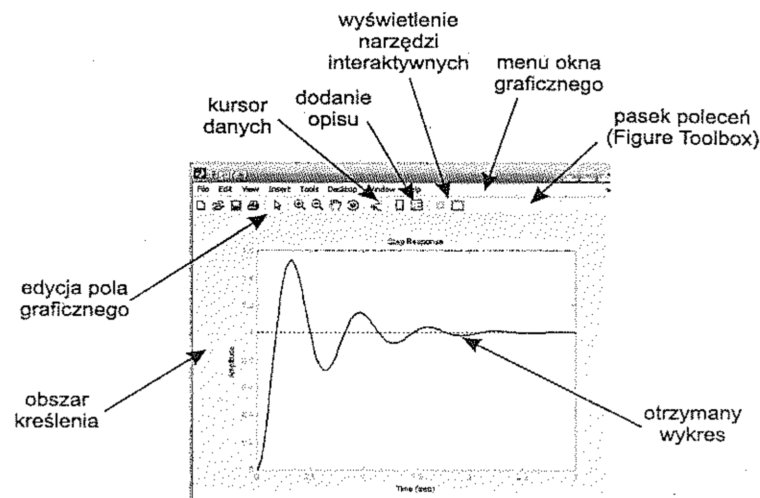
wywoływane są funkcje SS oraz LTIVIEW i w wyniku działania programu uzyskuje się charakterystyki przedstawione na rys. 17.2.

## 17.1.3. PODSTAWOWE FUNKCJE GRAFICZNE PROGRAMU MATLAB

W programie MATLAB można tworzyć wykresy funkcji, wykresy wektorowe, obrazować macierze oraz wykonywać działania na obrazach graficznych. Wszystkie operacje graficzne wykonywane są w oddzielnych oknach zwanych *Figure*. Okna te pełnić mogą dwojaką rolę: pola do rysowania grafiki oraz przestrzeni na ekranie zawierającej elementy graficznego interfejsu użytkownika GUI (*Graphical User Interface*). Wyświetlanie okna graficznego następuje automatycznie, w przypadku użycia jakiejkolwiek funkcji rysującej grafikę, bądź przez wywołanie funkcji *Figure*, otwierającej puste okno graficzne. Typowy układ okna graficznego jest przedstawiony na rys. 17.3.

Edytowanie rysunku umieszczonego w oknie graficznym rozpoczyna się po uaktywnieniu ikony [↖] *Edit Plot* w pasku narzędziowym okna *Figure* (górny pasek narzędziowy – rys. 17.3) lub wybraniu z menu tego okna opcji *Tools* → *Edit Plot*. Ikony tego paska *Insert* → *Text* → *Arrow* → *Line* uaktywniają takie możliwości, jak: wprowadzanie komentarza w miejscu wskazanym przez kursor myszy oraz rysowanie linii ze strzałką i bez strzałki. Tak więc, wykonany wcześniej rysunek można łatwo uzupełnić o dodatkowe elementy. Kolejne ikony *Zoom In*, *Zoom Out*, *Rotate* powodują odpowiednio powiększenie, pomniejszenie lub obrót rysunku.






Rys. 17.3. Okno graficzne programu MATLAB

Wyboru elementu rysunku do edytowania dokonuje się prawym przyciskiem myszy. W ten sposób zaznacza się edytowany element i otwiera menu, którego opcje umożliwiają zmianę właściwości tego elementu. Kliknięcie podwójne prawym przyciskiem myszy, gdy jej kursor wskazuje dowolną oś wykresu, powoduje otwarcie okna *Property Editor*. Zawiera ono okna edycyjne i opcje umożliwiające nadanie nazwy lub jej zmianę osiom *x*, *y*, *z*, określenie maksymalnej i minimalnej wartości na każdej osi, grubości linii i jej rodzaju (ciągła, punktowa itd.) oraz rodzaju znaczników identyfikujących dany wykres. Kliknięcie na ikonę *Data Cursor* uruchamia opcję skanowania wykresu i umożliwia wybranie rodzaju skali (liniowa lub logarytmiczna) oraz rysowanie siatki współrzędnych.

Podstawowe funkcje do rysowania wykresów dwuwymiarowych są następujące:

- *plot* – funkcja tworząca wykresy dwuwymiarowe z liniową skalą na obu osiach,
- *loglog* – funkcja tworząca wykresy dwuwymiarowe z logarytmiczną skalą na obu osiach,
- *semilogx* – funkcja tworząca wykresy dwuwymiarowe z logarytmiczną skalą na osi *x* i liniową na osi *y*,
- *semilogy* – funkcja tworząca wykresy dwuwymiarowe z liniową skalą na osi *x* i logarytmiczną skalą na osi *y*,
- *plotyy* – funkcja tworząca wykresy z dwiema skalami na osi *y*,
- *subplot* – funkcja pozwalająca na podział okna graficznego na pola uszeregowane w wierszach i kolumnach, w których umieszczane będą niezależne wykresy. Wszystkie pola są ponumerowane kolejno, zaczynając od pola znajdującego się w pierwszym rzędzie i pierwszej

kolumnie. Na przykład, polecenie *subplot* (212) oznacza, że wykresy będą umieszczone w dwóch wierszach (pierwszy parametr) i w jednej kolumnie (drugi parametr); trzeci parametr wskazuje numer kolejny pola, w który wstawiany będzie wykres aktualnie wykonywany za pomocą funkcji *plot*. Zatem będą to tylko dwa pola: górne o numerze 1 i dolne o numerze 2, czyli wykres umieszczony będzie w polu 2, znajdującym się w drugim wierszu.

Wywołanie funkcji *plot* powoduje otwarcie okna graficznego, w którym pojawia się wykres. Funkcja *plot* może być wywołana z różną liczbą argumentów wejściowych. Warianty wywołania tej funkcji są następujące:

```
plot(x,y),
plot(x,y,'typ_linii'),
plot(x1,y1,'typ_linii1',x2,y2,'typ_linii2',...).
```

gdzie:

- x, y – wektory $n$-elementowe lub wektor i macierz o wymiarach $m \times n$; w razie niezgodności wymiarów MATLAB dokonuje transpozycji wektora lub macierzy y i ponawia próbę wykonania wykresu;
- 'typ_ linii' – ciąg (łańcuch) tekstowy ujęty w apostrofy określający kolor i (lub) rodzaj linii wykresu; np. oznaczenie 'r-' oznacza, że wykres będzie wykonany linią ciągłą w kolorze czerwonym; parametr *typ_linii* można pominąć; wówczas kolory kolejnych wykresów będą w kolorze niebieskim, zielonym, czerwonym itd., zgodnie z symbolami podawanymi przez *help plot*;
- x2, y2,'typ_linii2' – parametry kolejnych wykresów.

Do opisu wykresów służą następujące polecenia:

*xlabel* – opis osi $x$,
*ylabel* – opis osi $y$,
*title* – tytuł umieszczany nad wykresem,
*text* – umieszczanie tekstu na aktualnym rysunku w miejscu określonym przez współrzędne $x$, $y$,
*grid* – nałożenie siatki współrzędnych na wykres,
*legend* – opis krzywych na wykresie.

W opisach wykresów istnieje możliwość zmiany wielkości i kroju czcionek poprzez zmianę ich parametrów, np.

```
ylabel('Cisnienie [kPa]','FontSize',14,'FontAngle','italic');
```

co oznacza, że do opisu osi pionowej użyto czcionki o kroju italic i wielkości 14 p.

Do modyfikowania rysunków służą następujące funkcje:

*axis* – określanie zakresu wartości liczbowych na osiach,
*axis auto* – skalowanie automatyczne,
*axis equal* – włączenie równych proporcji rysunku,
*axes* – określanie położenia i wyglądu osi,



*box on(off)* – tworzenie (usuwanie) tła obszaru rysunku,
*hold on* – dodanie krzywych do istniejącego wykresu,
*hold off* – wyłączenie opcji dodawania krzywych do wykresów.

**Przykład 17.2**

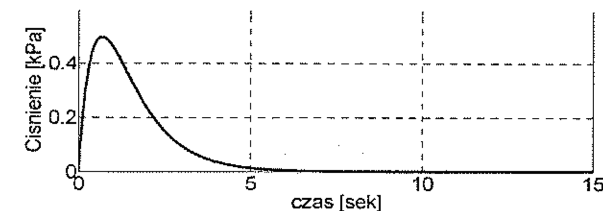
Sporządzić wykres zmian ciśnienia panującego w komorze w funkcji czasu. Ciśnienie zmienia się zgodnie z równaniem $y(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t}$.

*Rozwiązanie*

Jako wynik realizacji następujących poleceń MATLAB-a:

```
t=0:0.001:15;
y=-2*exp(-2*t)+2*exp(-t);
plot(t,y,'k-');grid;
opis='krzywa zmian cisnienia';
text(0.4,2,opis);
axis([0,15,0,0.6]);
title('Przebieg zmian cisnienia w komorze','FontSize',18);
xlabel('czas [sek]','FontSize',18);
ylabel('cisnienie [kPa]','FontSize',18);
box on;
```

otrzymuje się wykres zmian ciśnienia przedstawiony na rys. 17.4.




Rys. 17.4. Wykres funkcji $y(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t}$ opisującej proces zmian ciśnienia w komorze, wygenerowany przez program MATLAB

## 17.2. OPIS ŚRODOWISKA SIMULINK

SIMULINK jako nakładka MATLAB-a jest środowiskiem graficznym, w którym symulację układów dynamicznych wykonuje się na podstawie schematu blokowego budowanego z wykorzystaniem predefiniowanych bloków bibliotecznych.

Do zalet pakietu SIMULINK można zaliczyć:

- łatwość konstruowania schematu blokowego,
- dostępność złożonych funkcji matematycznych,
- czytelność dużych rozmiarów schematów blokowych dzięki możliwości grupowania i maskowania,
- bogata firmowa biblioteka różnorodnych programów specjalistycznych (sterowanie, statystyka itp.),
- zalety dydaktyczne,
- łatwość analizy i porównywania natychmiastowo otrzymanych wykresów przy różnych wartościach parametrów.

Opisane zostaną podstawowe zasady pracy w środowisku SIMULINK jako nakładki programu MATLAB wersja 7.1. Algorytmy numeryczne SIMULINK-a dostępne są z okna poleceń MATLAB-a (*Command Window*). Ponadto algorytmy rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych można inicjować z okna każdego modelu SIMULINK-a. Prezentację podstawowych zasad funkcjonowania tego pakietu uzyskuje się poprzez polecenie MATLAB-a: *simintro*. Polecenie *help simulink* podaje zestaw funkcji stosowanych do symulacji modeli oraz ich linearyzacji i określania punktów równowagi. Uzyskuje się także zestaw funkcji używanych przy konstruowaniu tych modeli.

Przy korzystaniu z programu SIMULINK wyróżnić można trzy podstawowe fazy:

- **definiowanie modelu** w postaci schematu blokowego odpowiadającego opisowi dynamicznemu układu poddanego analizie; schemat ten stanowi strukturę blokową odpowiadającą układowi równań różniczkowych zwyczajnych lub opisowi operatorowemu w dziedzinie zmiennej $s$ lub $z$;
- **symulacja procesu** zdefiniowanego schematem blokowym realizowana przy użyciu algorytmów numerycznych działających wyłącznie na modelach graficznych, traktowana jako analiza czasowa (rozwiązanie układu równań różniczkowych w czasie przy wykorzystaniu przybliżonych metod całkowania numerycznego); w przypadku układów liniowych możliwa jest analiza właściwości modelu z wykorzystaniem przeglądarki LTIVIEW (rozdz. 17.1.2);
- **wyświetlenie wyników** w postaci graficznej i analiza postsymulacyjna.

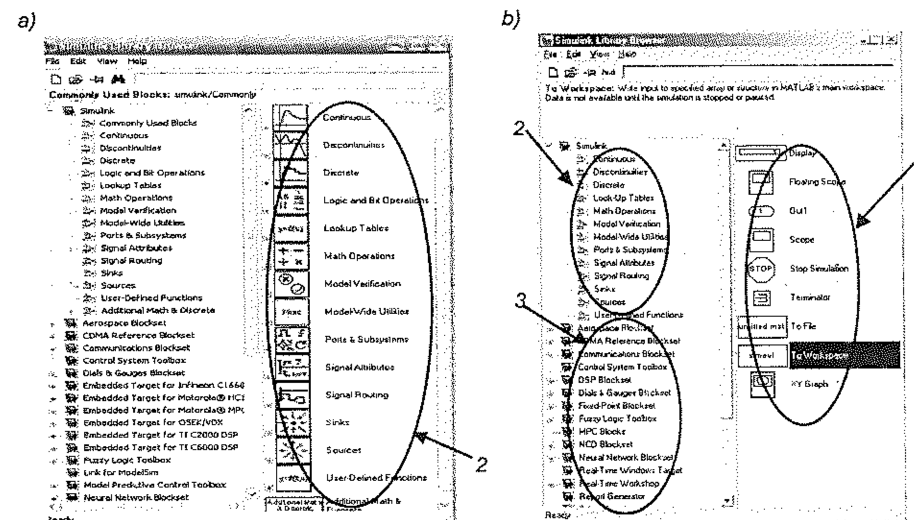
Wymienione fazy mogą przeplatać się wzajemnie. Po wstępnej analizie zbudowanego modelu możliwa jest w dowolnej chwili zmiana struktury schematu blokowego lub jego parametrów oraz warunków początkowych.

### 17.2.1. URUCHAMIANIE PROGRAMU

Pracę z pakietem SIMULINK można rozpocząć, wpisując w oknie *Command Window* polecenie *Simulink* lub klikając dwukrotnie lewym przyciskiem na ikonkę.



Wykonanie tych poleceń powoduje pojawienie się okna przeglądarki bibliotek programowych (*Simulink Library Browser*), której zawartość przedstawiona jest na rys. 17.5a, i np. po kliknięciu na wybraną bibliotekę, w prawym oknie wyświetla się zawartość wybranej biblioteki. Na rys. 17.5b przedstawiono wyświetloną bibliotekę *Sinks*, zawierającą bloki do wizualizacji rezultatów symulacji.

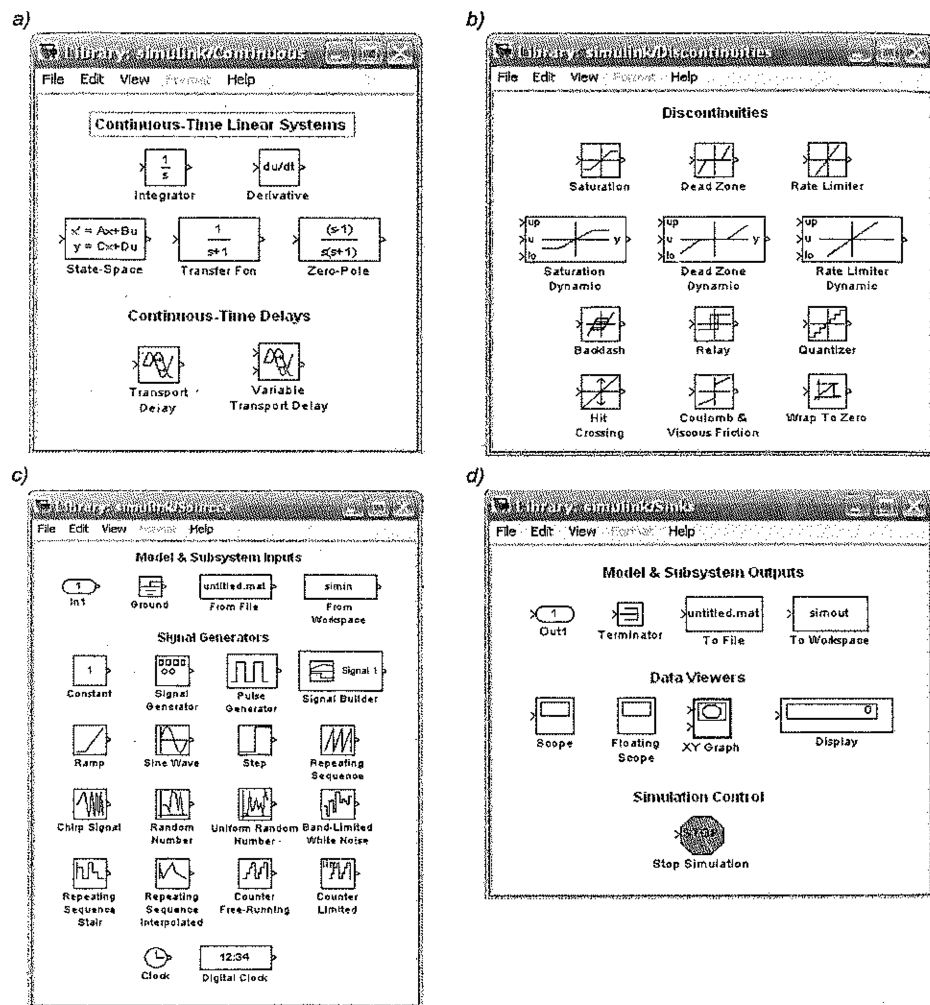



Rys. 17.5. Schemat podstawowego okna pakietu SIMULINK; 1 – zawartość biblioteki *Sinks* (odbiorniki), 2 – biblioteki standardowe podstawowych elementów schematów blokowych pakietu, 3 – predefiniowane dodatkowe moduły programowe

Program SIMULINK zawiera następujące biblioteki programowe:

- **Continuous** (*elementy liniowe ciągłe*) – podstawowy katalog elementów liniowych ciągłych stosowanych przy budowie prawie każdego modelu w SIMULINK-u (rys. 17.6a). Zawiera on następujące bloki: człon całkujący (*Integrator*) i różniczkujący (*Derivative*); blok z opisem w postaci równań stanu układu liniowego (*State-Space*), blok (*Transfer Fcn*) opisany transmitancją operatorową, określoną jako iloraz dwóch wielomianów operatora $s$; człon opóźniający (*Transport Delay*); człon opóźniający ze zmiennym opóźnieniem (*Variable Transport Delay*); blok (*Zero-Pole*) umożliwiający zadawanie transmitancji operatorowej przez podanie biegunów, zer i współczynnika wzmocnienia.

- **Discontinuities** (*elementy nieliniowe*) – katalog bloków, które realizują nieliniowe zależności typu: strefa histerezy (*Backlash*), strefa nieczułości (*Dead Zone*), nasycenie (*Saturation*) (rys. 17.6b).




Rys. 17.6. Zawartość bibliotek: a) elementów liniowych (*Continuous*), b) nieliniowych (*Discontinuities*), c) elementów definiujących wymuszenia (*Sources*), d) elementów do wizualizacji wyników symulacji (*Sinks*)



- **Sources** (*źródła*) – katalog zawierający elementy bloków definiujących wymuszenia (rys. 17.6c). Należą do nich generatory czasu ciągłego (*Clock*), dyskretnego (*Digital Clock*), wartości stałe (*Constant*) zadawane przez użytkownika, wymuszenie skokowe (*Step*) o nastawianej amplitudzie i czasie opóźnienia, generatory deterministyczne, takie jak: funkcja sinusoidalna (*Sine Wave*), generator impulsów (*Pulse Generator*), generator sinusoidalny o liniowo narastającej częstotliwości (*Chirp Signal*), generator impulsów trójkątnych (*Repeating Sequence*), elementy pozwalające na wczytywanie danych z pliku (*From File*) oraz z przestrzeni roboczej MATLAB-a (*From Workspace*).
- **Sinks** (*odbiorniki*) – katalog zawierający bloki umożliwiające graficzne przedstawienie sygnałów w odpowiednich punktach schematu blokowego, bądź zapisanie ich w przestrzeni roboczej MATLAB-a (*To Workspace*) albo w pliku z rozszerzeniem mat (*To File*) (rys. 17.6d). Bloki te zawierają jedynie wejścia bez możliwości dalszego przekazywania sygnałów. Graficzne przedstawianie danych odbywać się może w postaci wykresu czasowego lub wykresu *x–y*. Do pierwszej grupy zaliczyć można oscyloskop (*Scope*), wykres graficzny o zadanych z góry wartościach maksymalnych osi czasu *t* i osi *y* (*Graph*). Do grupy drugiej należy blok *XY GRAPH*, w którym osiom *x* i *y* przyporządkowuje się dowolne sygnały modelu. Uzupełnieniem oscyloskopu (*Scope*) jest blok graficzny (*Floating Scope*), który nigdzie nie jest podłączony. Pozwala on na obserwację przebiegu sygnałów w linii wskazywanej myszą. W katalogu *Sinks* znajduje się także wskaźnik sygnałów (*Display*), blok *Stop Simulation* pozwalający na zatrzymanie procesu symulacji przy pojawieniu się na wejściu sygnału niezerowego oraz blok *out1*, który służy do wyprowadzania sygnałów wyjściowych podsystemu do bloków zewnętrznych.
- **Signal Routing** (*przekazywanie sygnałów*) – katalog zawierający bloki wykonujące operacje na sygnałach i realizujące przekazywanie sygnałów między podsystemami znajdującymi się na różnych poziomach, umożliwiający komunikację z poszczególnymi wejściami i wyjściami podsystemu. Do tej grupy należą m.in. blok multipleksera (*Mux*), który grupuje pojedyncze sygnały w jeden wektor, blok demultipleksera (*Demux*), który realizuje operację odwrotną, pozwalając na dostęp do dowolnej składowej wektora, przełączniki (*Manual Swich*, *Multiport Swich*) i inne.
- **Math Operations** (*operacje matematyczne*) – bloki realizujące funkcje matematyczne, np. operacja mnożenia dwu sygnałów (*product*), sumowania (*sum*), funkcje trygonometryczne (*sin*), wzmacniacz (*gain*), operatory logiczne (*and*), operatory relacji (*relational operator*) i inne.

Ten spis katalogów nie wyczerpuje wszystkich bibliotek programowych. Wymieniono tylko te, które będą wykorzystane w omawianych w skrypcie przykładach i ćwiczeniach.

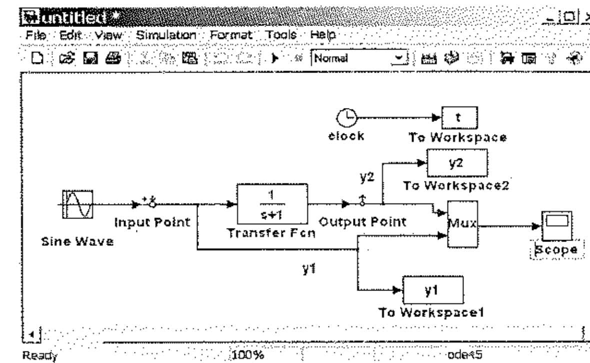
## 17.2.2. DEFINIOWANIE MODELU W ŚRODOWISKU SIMULINK

Rozpoczęcie pracy nad modelem układu wymaga wybrania z *menu* głównego MATLAB-a, z okna przeglądarki *Simulink Library Browser* lub z okna dowolnego modelu i biblioteki SIMULINK-a, opcji *File* → *New* → *Model* (otworzy się nowe puste okno z nazwą *Untitled*, w którym będzie zapisywany nowy model), bądź opcji *File* → *Open* (będzie można wczytać dowolny plik z wcześniej zapisanym modelem i zapamiętanym na dysku stałym lub zewnętrznym, z rozszerzeniem *mdl*).

Konstruowanie edycji modelu należy rozpocząć od otwarcia okna modelu z nagłówkiem *untitled*. Do tego okna „przeciąga" się odpowiednie ikony bloków umieszczone w różnych katalogach biblioteki SIMULINK-a dostępnych poprzez okno przeglądarki, a następnie łączy się je w jedną strukturę za pomocą ścieżek przesyłania sygnału. Aby połączyć bloki ze sobą, należy kliknąć lewym przyciskiem myszy na punkt początkowy linii i przeciągnąć (bez zwalniania przycisku) kursor myszy do końcówki określonego bloku. Przenoszenie i kopiowanie bloku może odbywać się nie tylko ręcznie poprzez przeciąganie, ale również za pośrednictwem komend *copy*, *cut* i *paste* z submenu *Edit*. Wielkość symbolu bloku może być regulowana przez uchwycenie kursorem myszy punktów zaczepowych bloku i przeciągnięcie go do odpowiedniego rozmiaru. Blok można obracać o kąt 90° komendą *Ctr-R* lub poleceniem *rotate block* submenu *Format*.

Na rys. 17.7 przedstawiono przykładowy schemat blokowy modelu opracowanego do badań symulacyjnych członu inercyjnego, których celem jest określenie amplitudy i przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego członu w przypadku sygnału wejściowego sinusoidalnie zmiennego o zadawanej przez źródło (generator) amplitudzie i pulsacji. Model zawiera następujące bloki: generator wymuszenia sinusoidalnego (*Sine Wave*) z biblioteki *Sources*, blok liniowy (*Transfer Fcn*) o transmitancji $G(s)=\frac{1}{s+1}$, reprezentujący człon inercyjny z biblioteki *Continuous*, generator czasu (*Clock*) z biblioteki *Sources*, oscyloskop (*Scope*) z biblioteki *Sinks*. Oscyloskop (*Scope*) ma jedno wejście, zatem aby rejestrować sygnały wejściowy $y_1$ i wyjściowy $y_2$ członu inercyjnego, zastosowano blok multiplexera (*Mux*) z biblioteki *Signal Routing*, który grupuje pojedyncze sygnały w jeden wektor. Dzięki temu oscyloskop wyświetli dwa wykresy (rys. 17.10a) przebiegu sygnału wejściowego i wyjściowego. Aby archiwizować wszystkie wyniki obliczeń i dowolnie nimi dysponować (w sensie graficznym), zastosowano bloki *Workspace* (format *Array*), w których gromadzone będą wartości czasu *t* generowane przez blok *Clock* i odpowiadające im obliczone wartości sygnału wejściowego $y_1$ i wyjściowego $y_2$. Blok *Workspace* jest bardzo wygodnym narzędziem, gdyż można do niego wprowadzać dowolne sygnały z różnych miejsc badanego modelu i dzięki temu w pełni go monitorować.



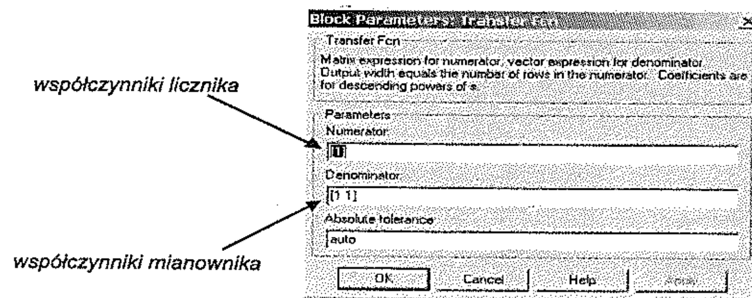



Rys. 17.7. Wygląd okna edycji układu do badania członu inercyjnego

Aby wykorzystać przeglądarkę *LTIVIEW* do graficznego sporządzenia charakterystyk członów dynamicznych występujących na schemacie blokowym, należy na schemacie blokowym zaznaczyć punkty początku (*input point*) i końca (*output point*) obszaru poddawanego analizie. Klikając prawym przyciskiem myszy na linię, na której mamy umieścić punkt początku, otwieramy submenu, z którego wybieramy opcje *Linearyzation Points* → *Input Point*. Tak samo postępujemy z punktem końca, wybierając z otwartego submenu opcje *Linearyzation Points* → *Output Point*. Zastosowanie przeglądarki LTIVIEW umożliwia, przed uruchomieniem symulacji całego układu, zweryfikowanie działania poszczególnych jego elementów.

Następnym etapem edycji jest wprowadzenie parametrów poszczególnych bloków schematu. Każdy blok ma swoje okno dialogowe otwierane poprzez podwójne kliknięcie lewym przyciskiem myszy w obrębie symbolu bloku. W oknie tym podawane są informacje dotyczące bloku i jego parametrów. Przed uruchomieniem symulacji należy, korzystając z tego okna, wpisać wartości parametrów bloków składowych modelu. Okno dialogowe bloku *Transfer Fcn* przedstawiono na rys. 17.8. Parametry tego bloku określa się poprzez transmitancję operatorową, dla której należy podać wartości współczynników licznika (*numerator*) i mianownika (*denominator*) w porządku malejących potęg operatora *s*.

Wykonany schemat blokowy można zapisać poprzez wybór opcji *File* → *Save as* jako plik z rozszerzeniem *.mdl.




Rys. 17.8. Okno dialogowe bloku *Transfer Fcn* (człon inercyjny) z rys. 17.7

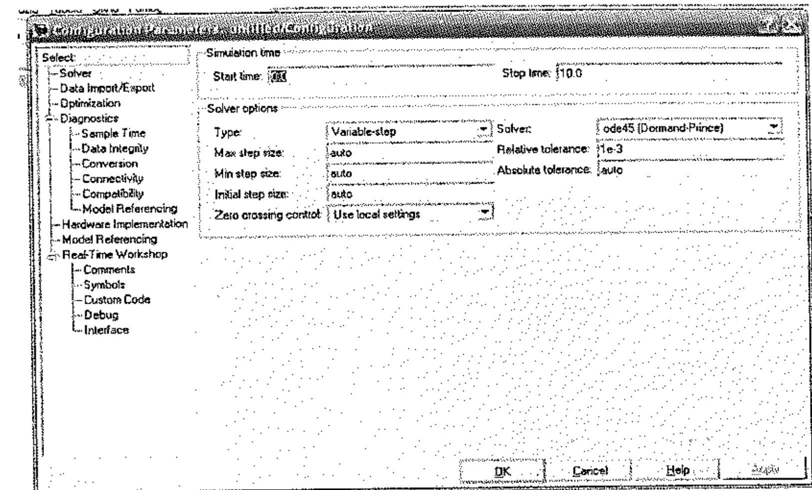
### 17.2.3. SYMULACJA ROZWIĄZANIA W DZIEDZINIE CZASU

Po zbudowaniu schematu blokowego i po określeniu parametrów bloków składowych modelu układ jest gotowy do następnej fazy – rozwiązania. Podstawowy rodzaj analizy układów polega na znalezieniu rozwiązania w dziedzinie czasu. Uzyskuje się je, rozwiązując odpowiadający mu układ równań różniczkowych (tworzony automatycznie przez program na podstawie utworzonego wcześniej schematu blokowego) przy wykorzystaniu jednego z algorytmów całkowania numerycznego. Sterowanie procesem symulacji odbywa się z poziomu okna dialogowego modelu po wybraniu opcji *Simulation* → *Configuration Parameters*. Okno tej opcji zawiera strony o nazwach:

- **Solver** – na tej stronie można ustawić czas rozpoczęcia i zakończenia symulacji (*start time*, *stop time*), wybrać algorytm numeryczny rozwiązywania równania różniczkowego i określić jego parametry, takie jak rodzaj kroku: stały (*fixed step*), zmienny (*variable step*) oraz ewentualnie minimalny (*min step size*) i maksymalny (*max step size*) krok całkowania, krok początkowy (*initial step size*) oraz tolerancje: absolutną (*absolute tolerance*) i względną (*relative tolerance*), decydujące o dokładności całkowania. Domyślnie jest przyjmowany czas początkowy równy zeru i końcowy 10 s oraz algorytm numeryczny zmiennokrokowy wg formuły Dormanda-Price'a, oznaczony symbolem ode45. Wartości domyślne, widoczne w pozostałych polach, wynikają z zastosowania tego algorytmu.
- **Diagnostics** – pozwala na wybór sposobu sygnalizowania niektórych zdarzeń zachodzących w trakcie symulacji.
- **Real Time Workshop** – pozwala na przetworzenie schematu blokowego SIMULINK-a na aplikacje w języku C, które mogą być używane do symulacji i testowania systemów czasu rzeczywistego.



Na rys. 17.9 przedstawiono wygląd okna *Configuration Parameters* w części odpowiadającej stronie *Solver*.




Rys. 17.9. Wygląd podstawowego okna *Configuration Parameters* sterującego procesem symulacji

Uruchomienie symulacji następuje po wyborze z menu opcji *Simulation* → *Start*, natomiast polecenie *Simulation* → *Stop* zatrzymuje proces. Uruchomić symulację można także z okna modelu przez naciśnięcie ikony ▶.

### 17.2.4. ANALIZA WYNIKÓW SYMULACJI

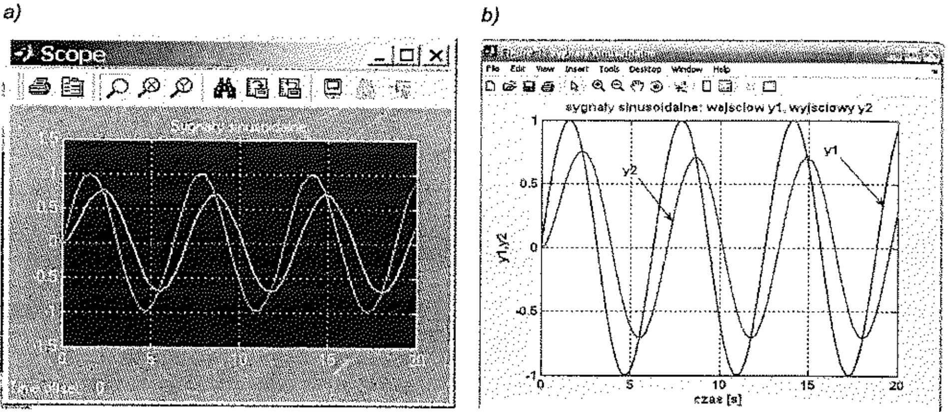
Wyniki symulacji można zobaczyć i odczytać w oknie oscyloskopu otwieranym przez kliknięcie na blok *Scope* lub w oknie graficznym *Figure* programu MATLAB w postaci wykresu otrzymanego za pomocą polecenia

```
plot(t,y1,t,y2);grid;
```

wpisanego w oknie *Command Window* (opis w rozdz. 17.1.3).

Po edycji formalnej, czyli po zmianie grubości linii oraz dodaniu opisów, otrzymano wykresy jak na rys. 17.10b. Wyniki symulacji mogą być także bezpośrednio obserwowane w postaci wykresu czasowego lub na płaszczyźnie *x–y*,

gdzie $x$ i $y$ mogą oznaczać dowolne zmienne występujące w układzie. Wyniki mogą być ponadto zapisane w zdefiniowanym wcześniej pliku, bądź w przestrzeni roboczej (*workspace*) programu MATLAB. Po zakończeniu sesji roboczej opracowany problem może być zapisany w postaci m-pliku, identycznie jak w podstawowym programie MATLAB. Plik taki może być w przyszłości wywoływany dowolną liczbę razy.



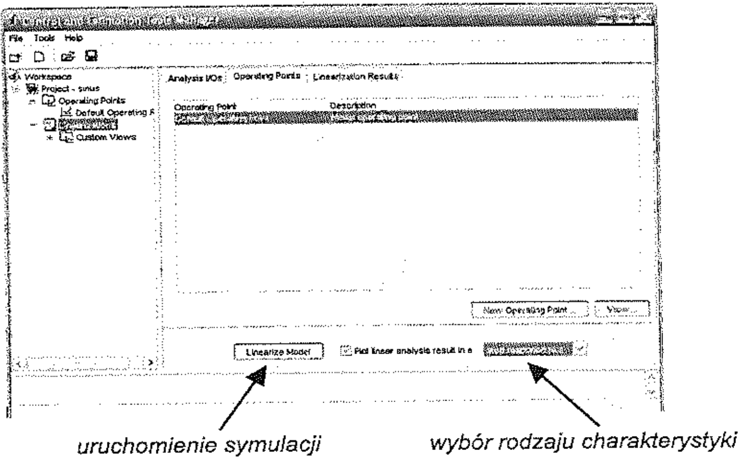

Rys. 17.10. Okna graficzne: a) oscyloskopu (*Scope*) z wynikami symulacji, b) wykres przebiegów sygnału wejściowego i wyjściowego modelu w oknie graficznym programu MATLAB

Do celów automatyki bardzo wygodnym narzędziem pozwalającym na analizę elementów i układów liniowych jest przeglądarka LTIVIEW uruchamiana z okna dialogowego modelu opcją *Tools* → *Control Design* → *Linear analysis*, o ile na schemacie blokowym zaznaczono punkty początku i końca (*input point, output point*) obszaru poddanego analizie, jak to przedstawia schemat blokowy na rys. 17.7. W otwartym oknie dialogowym *Control and Estimation Tools Manager* (rys. 17.11) wybiera się rodzaj odpowiedzi danego członu, układu lub zaznaczonego obszaru. Do dyspozycji są: odpowiedzi skokowe, impulsowe, charakterystyki częstotliwościowe Bodego, Nyquista i Nicholsa oraz rozkład pierwiastków równania charakterystycznego na płaszczyźnie zespolonej.

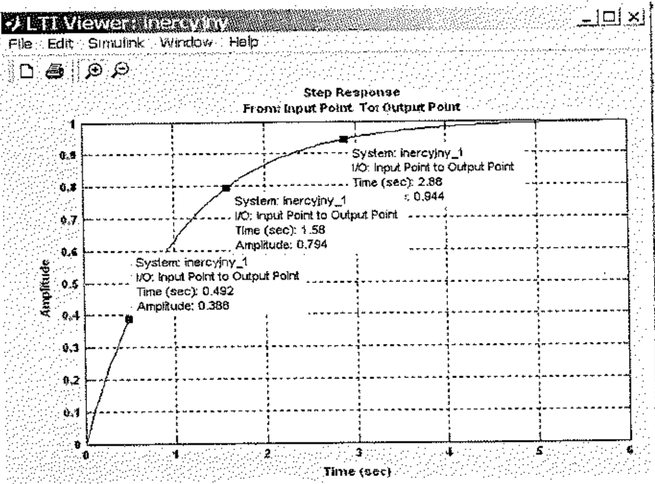
Po kliknięciu na ikonę *Linearyzation* uruchamia się symulacja, a następnie pojawia się okno graficzne *LTIVIEWER* z wykresem wybranej odpowiedzi (rys. 17.12). Kliknięcie na wybrany punkt krzywej umożliwia podgląd wartości liczbowych poszczególnych punktów charakterystyki. Z każdym punktem skojarzona jest ramka z informacją o wartościach współrzędnych punktu. Opcją



*Edit* → *Plot Configurations* z okna *Plot Configuration* można wybrać typ prezentacji charakterystyk obliczonych przez program (rys. 17.13a).

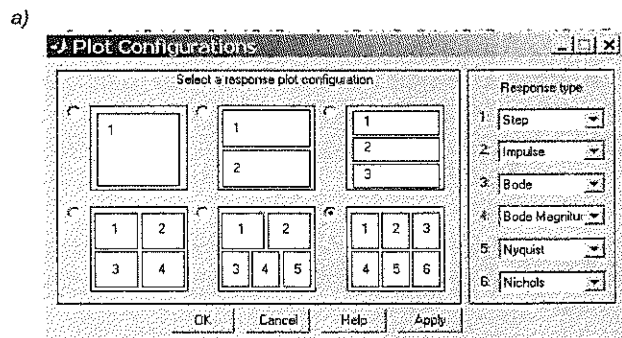



Rys. 17.11. Okno dialogowe *Control and Estimation Tools Manager*

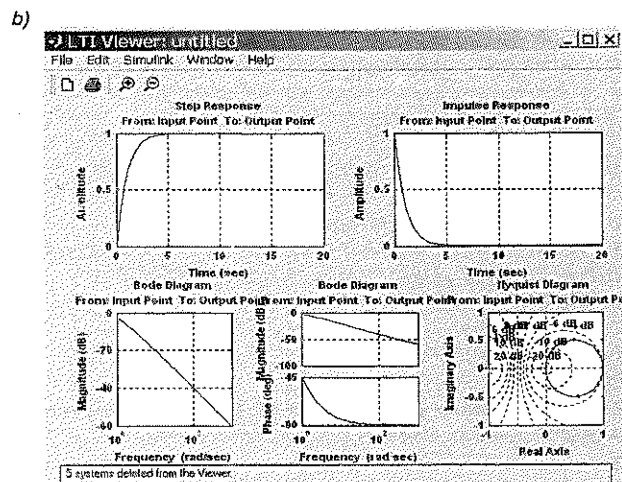



Rys. 17.12. Okno graficzne *LTIVIEWER* z wykresem odpowiedzi jednostkowej członu inercyjnego

a)




b)




Rys. 17.13. Okna *LTIVIEWER*: a) okno *Plot Configuration* wyboru typu charakterystyki, b) okno graficzne z przykładowymi wybranymi charakterystykami

Podany powyżej opis głównych cech funkcjonalnych programu SIMULINK powinien ułatwić wykorzystanie go na ćwiczeniach laboratoryjnych do modelowania elementów i układów regulacji.

**Przykład 17.3**

Wykreślić w środowisku SIMULINK funkcję $y(t)$ z przykładu 2.1 (rozdz. 2), spełniającą równanie

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=0$$

i warunki początkowe: $y(0+)=0$ i $\dot{y}(0+)=2$.

Porównać wynik symulacji z wynikiem analitycznym z przykładu 2.1.



*Rozwiązanie*

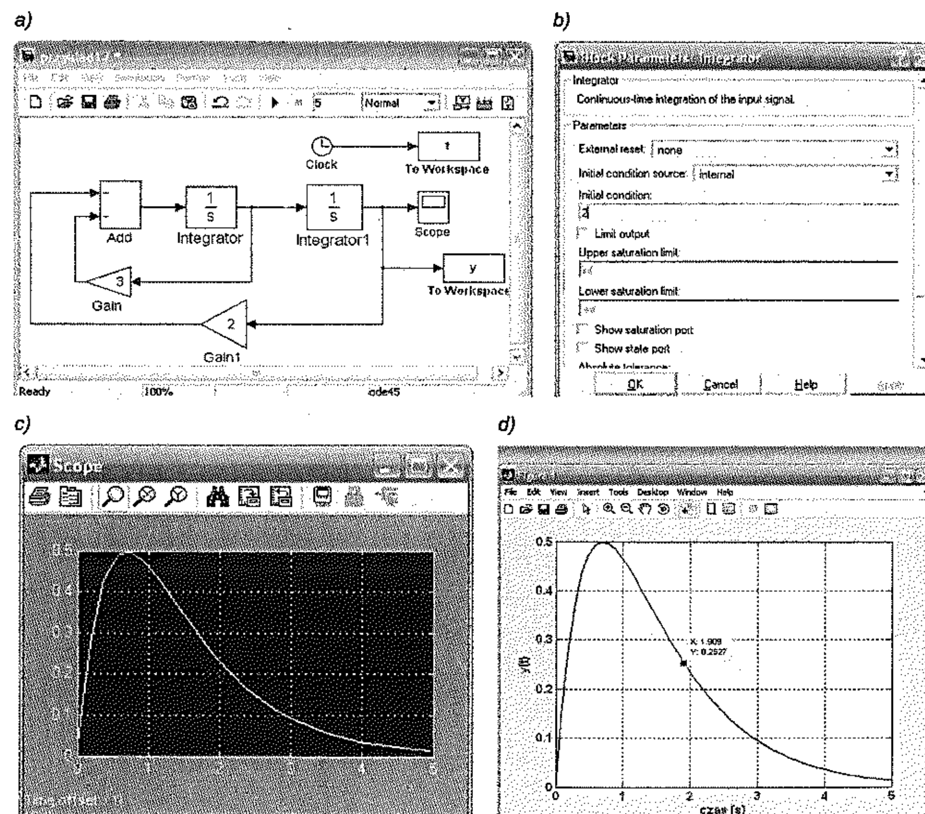
Podane równanie wygodnie jest przedstawić w postaci:

$$\ddot{y}(t)=-3\,\dot{y}(t)-2\,y(t)$$

Wiedząc, że

$$\dot{y}(t)=\int\ddot{y}(t)d\tau,\qquad y(t)=\int\dot{y}(t)d\tau$$

można algorytm rozwiązywania równania różniczkowego w programie SIMULINK przedstawić w postaci schematu blokowego, jak na rys. 17.14a.




Rys. 17.14. Okna programu symulacyjnego SIMULINK do przykładu 17.3: a) okno edycji modelu, b) okno dialogowe integratora, c) okno oscyloskopu (*Scope*) z wykresem funkcji $y(t)$, d) okno graficzne programu MATLAB

Wynik rozwiązania zadanego równania przedstawiony jest w formie wykresu funkcji $y(t)$ wyświetlonego na oscyloskopie (rys. 17.14c) oraz w oknie graficznym *Figure* programu MATLAB (rys. 17.14d). Zgodność otrzymanego rozwiązania z rozwiązaniem analitycznym z przykładu 2.1 jest zależny od przyjętej metody całkowania numerycznego oraz długości kroku całkowania. W symulacji zastosowano metodę ODE 45 ze zmiennym krokiem całkowania dobieranym automatycznie, która dała satysfakcjonującą dokładność (błąd bezwzględny na poziomie 0,001%).



# BIBLIOGRAFIA


1. Amborski K., Marusak A.: *Ćwiczenia z automatyki. Cz. I.* WPW, Warszawa 1976.
2. Äström K.J., Hagglund T.: *The future of PID control.* Control Engineering Practice, 2001, vol. 9.
3. Awrejcewicz J., Wodzicki W.: *Podstawy automatyki. Teoria i przykłady.* Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź 2001.
4. Brzóska J.: *Regulatory cyfrowe w automatyce.* Wydawnictwo MIKOM, Warszawa 2002.
5. Brzóska J.: *Regulatory i układy automatyki.* Wydawnictwo MIKOM, Warszawa 2004.
6. Cheng-Ching Yu: *Autotuning of PID controllers.* Springer, London 1999.
7. Chorowski B., Werszko M.: *Mechaniczne urządzenia automatyki.* WNT, Warszawa 1975.
8. Dorf R., Bishop R.: *Modern Control Systems.* Addison-Wesley, Reading 1995.
9. Findeisen W.: *Technika regulacji automatycznej.* PWN, Warszawa 1978.
10. Gessing R.: *Podstawy automatyki.* Wydawnictwa Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
11. Holejko D., Kościelny W.J., Niewczas W.: *Zbiór zadań z podstaw automatyki.* Wyd. VIII, WPW, Warszawa 1985.
12. Holejko D., Niewczas W.: *Wpływ celowo nieliniowego działania regulatorów pneumatycznych na wybrane wskaźniki jakości regulacji.* Prace VI KKA, Katowice 1974.
13. Jędrzykiewicz Z.: *Teoria sterowania układów jednowymiarowych.* Wyd. AGH, Kraków 2004.
14. Kaczorek T.: *Teoria sterowania.* PWN, Warszawa, tom I – 1977, tom II – 1981.
15. Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: *Podstawy teorii sterowania.* WNT, Warszawa 2005.
16. Koj J., Stelmach J., Zaremba M.: *Projektowanie przemysłowych układów automatycznej regulacji.* WPW, Warszawa 1977.
17. Kołodziejczyk A., Petz M.: *Zbiór zadań z automatyzacji kompleksowej.* WPW, Warszawa 1980.
18. Komor Z., Łobzowski A., Szkolnikowski W.: *Technika regulacji. Regulator LB-600. Automatyzacja procesów przemysłowych, rolniczych i klimatycznych.* Wyd. Czasopisma Pomiary Automatyka Kontrola. Agenda Wydawnicza SIMP, Warszawa 2003.
19. Kościelny W.J.: *Materiały pomocnicze do nauczania podstaw automatyki dla studiów wieczorowych.* WPW, Warszawa 2001.
20. Kuo B.C.: *Automatic control systems.* Prentice Hall, New Jersey 1991.
21. Kwaśniewski J.: *Programowalne sterowniki w systemach automatyki.* WNT, Warszawa 1999.
22. Łukasik Z., Kuśmińska-Fijałkowska A.: *Laboratorium komputerowej symulacji układów automatyki.* Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 2009.
23. Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.: *Podstawy automatyki.* WPW, Warszawa 2002.
24. Nowacki P., Szklarski L., Górecki H.: *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej.* T. 1. PWN, Warszawa 1970.

25. Ogata K.: *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1970.
26. Osowski S.: *Modelowanie układów dynamicznych z zastosowanie języka SIMULINK*. WPW, Warszawa 1999.
27. Osowski S., Cichocki A., Siwek K.: *MATLAB w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów*. WPW, Warszawa 2006.
28. Pełczewski W.: *Teoria sterowania. Ciągłe stacjonarne układy liniowe*. WNT, Warszawa 1980.
29. *Podstawy automatyki*. Praca zb. pod red. T. Mikulczyńskiego. Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1998.
30. Pułaczewski J., Szacka K., Manitius A.: *Zasady automatyki*. WNT, Warszawa 1974.
31. Pułaczewski J.: *Dobór nastaw regulatorów przemysłowych*. WNT, Warszawa 1966.
32. Szymkat M.: *Komputerowe wspomaganie w projektowaniu układów regulacji*. WNT, Warszawa 1993.
33. Trybus L.: *Regulatory wielofunkcyjne*. WNT, Warszawa 1992.
34. Węgrzyn S.: *Podstawy automatyki*. PWN, Warszawa 1980.
35. Żelazny M.: *Podstawy automatyki*. PWN, Warszawa 1976.
36. Żelazny M., Giri F., Bennani T.: *Systemes asservis: commande et regulation*. Vol. 2. EYROLLES Mentor Sciences, Rabat 1994.
37. CEI IEC 60050-31, part 351: *International Electrotechnical Vocabulary – Automatic control*.
38. Norma PN-88/M-42000: Automatyka i pomiary przemysłowe. Terminologia.
39. Norma PN-89/M-42007/01: Automatyka i pomiary przemysłowe. Oznaczenia na schematach. Podstawowe symbole graficzne i postanowienia ogólne.
40. Norma PN-89/M-42007/03: Automatyka i pomiary przemysłowe. Oznaczenia na schematach. Symbole graficzne na schematach obwodowych.
41. Norma PN-89/M-42007/04: Automatyka i pomiary przemysłowe. Oznaczenia na schematach. Symbole graficzne uzupełniające.
42. Norma PN-90/M-42007/02: Automatyka i pomiary przemysłowe. Oznaczenia na schematach. Oznaczenia funkcji systemów komputerowych.

